A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

XXI. KÖTET



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1973

III. OSZT. KÖZL

## TARTALOMJEGYZÉK



## KÖNYVSZEMLE

# INDEX



## BOOK REVIEWS

# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

XXI. KÖTET 1—2. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1973

# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

## MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI




XXI. kötet 1—2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.


A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11488, külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Mathematicarum Hungarica.

# VIZSGÁLATOK LOGIKAI MŰVELETEK SZUPERPOZÍCIÓIRÓL ÉS KÉTPÓLUSÚ GRÁFOK ÁLTALI ISMÉTLÉS NÉLKÜLI REALIZÁLHATÓSÁGÁRÓL[1]

Írta: ÁDÁM ANDRÁS

## Bevezetés

Annak a kutatási iránynak a problematikája, amelyhez a jelen disszertáció tartozik, bizonyos villamosmérnöki tervezési feladatok matematikai formában való kikristályosítása révén állt elő. A kétpólusú jelfogó-érintkezőhálózatok tervezésekor az a cél, hogy adott működési feltételekből kiindulva úgy határozzuk meg a relék egymással (és a két pólussal) való összekötését, hogy az így nyert hálózat éppen az adott feltételek szerint működjék. A hálózat működési feltételei matematikailag kifejezve egy *logikai művelet* (más használatos elnevezésekkel: *Boole*-féle függvény, igazságfüggvény) formájában adhatók meg, a hálózat geometriai (pontosabban: topológiai) szerkezetét pedig egy *kétpólusú gráf* fejezi ki, és azt, hogy a hálózat struktúrája és funkciója hogyan kapcsolódnak egymáshoz, e matematikai modellben az (ismétléses vagy ismétlés nélküli) *realizáció* fogalma tükrözi vissza.[2]

A gráfból kiindulva a realizált függvényre való következtetés nem okoz elvi nehézségeket. A megfordított probléma viszont: az eleve adott függvényből a realizáló gráfra (vagy *egy* ilyen gráfra) való következtetés, ami a tervezési feladatnak felel meg, az elektrotechnika és a matematika határterületén fekvő, igen kiterjedt vizsgálatokat váltott ki, s még korántsem mondhatjuk, hogy a kérdéskör nehézségeinek végérvényes legyőzéséhez közel járnánk.

Bonyolulttá teszi a feladatot két olyan szempont, amelyeknek gyakorlati fontossága közvetlenül nyilvánvaló. Az egyik szempont az, hogy a realizáló hálózat minél egyszerűbb legyen; ezt a követelményt (nem egyedül lehetséges, de) leginkább kézenfekvő abba a precíz formába önteni, hogy a gráf a lehető legkevesebb élt tartalmazza. Ezt az egyszerűségi követelményt úgy szokás kifejezni, hogy az adott függvény *minimális* realizációját keressük. A másik követelmény az, hogy a tervezés során alkalmazott algoritmus elég könnyen végrehajtható legyen abban az értelemben, hogy tényleges végrehajtása a gyakorlatilag felvetődő példákban ne kívánjon oly sok lépést, hogy azok elvégzése még a mai műszaki felkészültség (elektronikus számológépek használata) mellett sem volna megoldható számításba jöhető idő alatt.[3]

[1] A jelen dolgozat (jelentéktelen változtatásoktól eltekintve) megegyezik a szerző 1964-ben benyújtott, 1967-ben megvédett kandidátusi értekezésével. Az értekezésben foglalt eredeti vizsgálatok idegen nyelven a [2], [3], [4], [5] dolgozatokban jelentek meg, a disszertáció egy (az opponensek által igényelt) kiegészítésének anyaga pedig a [6] dolgozatban (vö. a 14. lábjegyzettel). Az I. fejezetben ismertetett előzmények többségének — így valamennyi itt említett tételnek — részletes tárgyalását az olvasó az eredeti közleményeken kívül a [7] könyvben is megtalálhatja.

[2] Az itt szereplő matematikai fogalmakat az I. fejezetben fogjuk precízen definiálni.

[3] Megjegyezzük, hogy az algoritmus egyszerű (néhány rövid szabály általi) leírhatósága és a most mondott értelemben való egyszerűsége nem feltétlenül esnek egybe.

Az eddigi vizsgálatok túlnyomó többsége olyan probléma-felvetésből indul ki, amely már eleve megalkuvást jelent a minimalitás (általános) követelményével szemben. Ez az engedmény abban áll, hogy a tekintetbe jövő gráfok osztályát lényegesen korlátozzuk azáltal, hogy az összes kétpólusú gráfok helyett csupán a sorosan-párhuzamosan teljesen felbontható gráfokra terjesztjük ki a vizsgálatokat. Nyilvánvaló e megszorítás hátrányos volta az első egyszerűségi követelménnyel szemben, hiszen a gráf-osztály szűkítésekor az várható, hogy ugyanannak a függvénynek a szűkebb osztályban való minimális realizációja (általában) nagyobb élszámú gráf lesz, mint az eredeti bővebb osztályban való minimális realizáció. Azt, hogy az eddigi vizsgálatok csaknem mindig e megszorítást elfogadva vetik fel a problémát, az okozza, hogy (mint először SHANNON mutatott rá) a sorosan-párhuzamosan teljesen felbontható kétpólusú gráfok egy-egyértelműen jellemezhetők az állításkalkulus bizonyos formuláival (mégpedig a negálatlan és negált változókból konjunkciók és diszjunkciók ismételt alkalmazása által felépíthető formulákkal). A megszorítás tehát azt az apparátusbeli változást (látszólagos technikai előnyt) nyújtja, hogy a gráfelméleti vonatkozásoktól elszakadva a probléma adekvát módon átfogalmazhatóvá válik a matematikai logika bizonyos formuláira vonatkozó kérdéssé, megszűnik tehát a problémának a gráfelmélet és logika közötti „kétarcú" jellege, és egyetlen matematikai diszciplína korlátain belülre szorul.

Annak ellenére, hogy szinte áttekinthetetlenül gazdag irodalom foglalkozik a problémával az ismertetett megszorítást *elfogadva*, az így előálló feladat megvilágítása felé lényeges „áttöréshez" az általános esetben nem jutottak el a kutatások. Csupán abban a még további súlyos korlátozást jelentő esetben ismeretesek elegáns és jól kezelhető eredmények (QUINE vizsgálatai nyomán), mikor csupán azokat a gráfokat vesszük tekintetbe, amelyeket a *Shannon*-féle hozzárendelés (konjunktív vagy diszjunktív) normálformákkal jellemez.

A jelen dolgozat a kutatásoknak ahhoz az aránylag kevéssé művelt ágához kapcsolódik, amikor a problémát az *összes* kétpólusú gráfokra kiterjedő megfogalmazásban vetjük fel, megőrizve annak határterületi jellegét. Az ilyen irányú vizsgálatokban TRACHTENBROT nagy horderejű eredményei jelentenek határkövet, s nyitnak utat ahhoz, hogy a kérdést részproblémákra tagolva támadhassuk meg.

A kutatások mai fejlettsége mellett központi szerepet játszanak az ismétlés nélküli realizációra vonatkozó részproblémák. Heurisztikusan ez a tény a következő meggondolással támasztható alá. Tételezzük fel, hogy van egy algoritmusunk, amely tetszőleges $f$ függvényre alkalmazva olyan gráfot szolgáltat, amely $f$-et realizálja és minimális számú élt tartalmaz (az $f$-et realizáló gráfok között). Amennyiben ezt az algoritmust speciálisan egy *ismétlés nélkül* realizálható függvényre alkalmazzuk, úgy az ismétlés nélkül realizáló gráfot[4] kell szolgáltatnia; tehát az algoritmus szükségképpen meg kell hogy oldja azt a feladatot is (általános célján belül), hogy eldöntse egy $f$ függvényről, realizálható-e $f$ ismétlés nélkül, és megkonstruálja az ilyen realizációt az igenlő esetben.

Az ismétlés nélküli realizációra vonatkozó kutatások a következő három részprobléma között oszthatók fel. (Mindegyik részprobléma egy tetszőlegesen adott $f$ függvényre vonatkozik.)

*Egzisztencia-probléma.* Adjunk meg egy algoritmust, amely eldönti, hogy létezik-e olyan kétpólusú gráf, amely a függvényt ismétlés nélkül realizálja.

[4] Mint később látni fogjuk, jogos határozott névelőt használnunk.

*Unicitási probléma.* Ha mind a $\mathfrak{G}_1$, mind a $\mathfrak{G}_2$ gráf egy-egy ismétlés nélküli realizációja $f$-nek, akkor $\mathfrak{G}_1$ és $\mathfrak{G}_2$ szükségképpen izomorfak-e egymással?

*Konstrukció-probléma.* Adjunk meg egy olyan algoritmust, amely ismétlés nélkül realizálható függvényre alkalmazva az ismétlés nélkül realizáló gráfot szolgáltatja.

Nem képeznek további részproblémát, hanem az eddigieken belül helyezkednek el a redukciós jellegű vizsgálatok. Ezeknek célja tetszőleges függvények bizonyos felbontásait vizsgálni (egyszerűbb függvényekre) úgy, hogy a felbontásban szereplő konponens-függvények egy szűkebb függvényosztályt alkossanak, s az egzisztencia- és konstrukció-probléma e szűkebb osztály függvényeire legyen redukálható.

A három részprobléma közül az unicitás problémája bizonyult legkönnyebbnek: ezt TRACHTENBROT (lényegileg igenlő választ adva) teljesen megoldotta (IX. tétel.) KUZNYECOV redukciós tétele révén (VII. tétel) a fennmaradó két probléma elsősorban a szuperpozíciókkal szemben irreducibilis függvényekre vonatkozóan bír érdekességgel. A konstrukciós problémára ugyancsak TRACHTENBROT adott elméletileg teljes választ (X. tétel), amely azonban az egyszerű végrehajthatóság gyakorlati szempontjából nézve még nem kielégítő. Legsúlyosabb nehézségeket az exisztencia-probléma támaszt, erre vonatkozóan nem ismeretes konstruktív módszert szolgáltató elegáns kritérium.

A dolgozat négy fejezetre tagolódik. Az első fejezet a szereplő fogalmakat vezeti be és a problémakör korábban ismert fontos tételeit mondja ki. A második fejezetben a *Boole*-féle függvények ismétlés nélküli szuperpozíciókkal való felbontását vizsgáljuk, amely felbontási mód jelentőségére KUZNYECOV redukciós tétele mutat rá. Az ilyen felbontások teljes áttekintésére vonatkozóan korábban maga KUZNYECOV épített ki elméletet (I. tétel), továbbá tőle függetlenül ASHENHURST[5]. Az általunk követett felépítési mód több szempontból különbözik KUZNYECOVétől. Az alapproblémát kissé speciálisabban vetjük fel, mint ő (azáltal, hogy *monoton* szuperpozíciókra szorítkozunk[6], az elmélet részletkérdéseit viszont jobban megvilágítjuk). A használt bizonyítástechnika (a prím-implikánsok kombinatorikus tulajdonságainak alkalmazása) lényegesen eltér az elmélet eddigi változatainak bizonyítási módszereitől.

A dolgozat harmadik fejezetében először egy gráfelméleti tételt bizonyítunk be. E tétel alkalmazásaként egyrészt részleges megoldást (szükséges feltételt) adunk az egzisztencia-problémára, másrészt pedig egy redukciós jellegű tételt mutatunk ki.

A negyedik fejezet TRACHTENBROT már említett eredményét (X. tétel) a gépi végrehajtásra alkalmas algoritmussá fejleszti tovább.

[5] ASHENHURST sokáig csupán a Bell Telephone Laboratories zártabb körű jelentéseiben tette közzé vizsgálatait, módszerét általánosan hozzáférhető módon csak CURTIS publikálta [8] könyvében 1962-ben, a szerzőnek a disszertáció e része alapjául szolgáló dolgozatával egyidejűen.

[6] Az ismétlés nélküli realizáció szempontjából azonban e szuperpozíció-fogalom ekvivalens az általánossal (1. következmény).

## I. fejezet. Alapfogalmak és korábbi eredmények

### 1. §. Boole-féle függvények

*Logikai művelete*n vagy *Boole-féle függvény*en olyan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt értünk, amely az $\uparrow$ (igaz) és $\downarrow$ (hamis) értékeket veheti fel, s amelynek változói is $\uparrow$ és $\downarrow$ értékűek lehetnek, s amely valamennyi változójától ténylegesen függ. Ha világosan nem utalunk az ellenkezőre, úgy függvényen mindig *Boole*-függvényt értünk. Ismertnek tételezzük fel a legegyszerűbb ilyen függvényeket: a diszjunkciót (jele: $\vee$), konjunkciót (&, de jelölni fogjuk szorzásként is), implikációt ($\rightarrow$), negációt ($^-$). Az $\mathfrak{A}$ konjunkciót *elemi konjunkció*nak nevezzük, ha $\mathfrak{A}$ minden tagja negálatlan vagy negált változó, és a fellépő változók különbözőek.[7] Az $\mathfrak{A}$ elemi konjunkció *implikánsa* az $f$ függvénynek, ha az $\mathfrak{A} \rightarrow f$ implikáció azonosan $\uparrow$. $\mathfrak{A}$ *prím-implikánsa* az $f$ függvénynek, ha implikánsa $f$-nek, de nem tartalmaz olyan $\mathfrak{A}'$ elemi konjunkciót valódi részként, hogy $f$-nek $\mathfrak{A}'$ is implikánsa.

Ha az $\mathfrak{A}$ elemi konjunkcióban $f$ minden változója fellép (negálatlanul vagy negálva), akkor $\mathfrak{A}$-t *teljes elemi konjunkció*nak nevezzük ($f$-re vonatkozóan). A teljes elemi konjunkciók és $f$ értelmezési tartományának helyei azonosíthatóak egymással a következő egy-egyértelmű megfeleltetés révén: rendeljük hozzá minden egyes $\mathfrak{A}$ teljes elemi konjunkcióhoz azt a helyet, amelyen $\mathfrak{A}$ értéke $\uparrow$.

Az elemi konjunkciókkal analóg módon értelmezhetőek az *elemi diszjunkciók*. Az $\mathfrak{A}$ elemi diszjunkció *implikátuma* $f$-nek, ha $f \rightarrow \mathfrak{A}$ azonosan $\uparrow$; a legszűkebb implikátumokat *prím-implikátumok*nak nevezzük.

Tekintsünk egy $f$ függvényt és annak egy $x_i$ változóját. Amennyiben nincs olyan két $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ teljes elemi konjunkció $f$-re vonatkozóan, hogy

(1) $\mathfrak{A}$-ban $x_i$ negálatlanul, $\mathfrak{B}$-ben negálva lép fel,

(2) az összes többi változók megegyeznek $\mathfrak{A}$-ban és $\mathfrak{B}$-ben abból a szempontból, negálva vannak-e, és

(3) $f(\mathfrak{A}) = \downarrow$ és $f(\mathfrak{B}) = \uparrow$,

akkor azt mondjuk, hogy $f$ *monoton növekvő* függvénye $x_i$-nek. Ha pedig olyan két elemi konjunkció nincs, hogy azok (1)-et, (2)-t és az alábbi (3') feltételt teljesítenék:

(3') $f(\mathfrak{A}) = \uparrow$ és $f(\mathfrak{B}) = \downarrow$,

akkor $f$-et $x_i$ *monoton csökkenő* függvényének nevezzük. Azon, hogy $f$ *monoton* függvénye $x_i$-nek, azt értjük, hogy monoton növekvő vagy monoton csökkenő függvénye. Könnyen igazolható, hogy $f$ pontosan akkor függ monoton növekvően (ill. csökkenően) $x_i$-től, ha nincs olyan prím-implikánsa, amely $x_i$-t negálva (ill. negálatlanul) tartalmazza.

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változóinak rendezett halmazát $\Theta$-val is jelöljük, magára a függvényre pedig az $f[\Theta]$ jelölést is használjuk. Ha $\mathfrak{A}$ elemi konjunkció $f[\Theta]$-ra vonatkozóan és $\Theta' \subseteq \Theta$, akkor $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ jelentse $\mathfrak{A}$ mindazon változóinak konjunkcióját, amelyek $\Theta'$-ben tartalmazva vannak, mégpedig úgy, hogy egy változó aszerint lép fel negálatlanul vagy negálva $\mathfrak{A}_{\Theta'}$-ben, hogy $\mathfrak{A}$-ban hogyan fordult elő.

A $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta')$ relációt a következőképpen értelmezzük: értéke legyen $\downarrow$, ha $\mathfrak{A}_{\Theta'}$

[7] Megengedjük az egytagú és az üres konjunkciót is (az utóbbi értékét $\uparrow$-nak tekintjük).

az üres konjunkció (azaz ha $\mathfrak{A}$-ban nem fordul elő egy $\Theta'$-beli változó sem), és $\dagger$ az ellenkező esetben.

Tekintsünk egy $f[\Theta]$ függvényt $(\Theta=\{x_1, x_2, ..., x_n\})$. Legyenek $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, ..., \Theta^{(m)}$ egymástól idegen részhalmazai $\Theta$-nak. Jelöljük $\Theta'$-vel a $\Theta^{(1)} \cup \Theta^{(2)} \cup ... \cup \Theta^{(m)}$ egyesítési halmazt. Amennyiben létezik $m+1$ számú függvény:

$$f^*[(\Theta-\Theta') \cup \{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\}],\ f^{(1)}[\Theta^{(1)}],\ f^{(2)}[\Theta^{(2)}], ...,\ f^{(m)}[\Theta^{(m)}]$$

úgy, hogy abban az esetben, ha $x^{(1)}$ helyébe $f^{(1)}$-et, $x_2$ helyébe $f^{(2)}$-t, ..., $x^{(m)}$ helyébe $f^{(m)}$-et helyettesítünk, az $f^*$-ból előálló függvény (mint $x_1, x_2, ..., x_n$ függvénye, ebben a sorrendben tekintve a változókat) megegyezik $f$-fel, úgy $f$-nek egy *egyszeres ismétlés nélküli szuperpozíció-előállításáról* beszélünk. E szuperpozíció-előállítást képletben az

$$f = (f^*;\ f^{(1)} \Rightarrow x^{(1)},\ f^{(2)} \Rightarrow x^{(2)}, ...,\ f^{(m)} \Rightarrow x^{(m)})]$$

módon fejezzük ki.[8] Az $m=1$ speciális esetben *egyszerű ismétlés nélküli szuperpozíció-előállítás*ról beszélünk. $x^{(i)}$-ről és $f^{(i)}$ tetszőleges változójáról azt fogjuk mondani, hogy ezek *megfelelnek* egymásnak.

Legközelebbi célunk induktív módon bevezetni a $k$-szoros szuperpozíció-előállítás fogalmát. Tételezzük fel, hogy az egyszeres, kétszeres, ..., $(k-1)$-szeres ismétlésnélküli szuperpozíciót már definiáltuk. Legyen adva az $f$ függvénynek egy egyszeres ismétlésnélküli szuperpozíció-előállítása. Tekintsük az $f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(m)}$ belső függvények némelyikének egy-egy olyan ismétlésnélküli szuperpozíció-előállítását, hogy

ezeknek az előállításoknak mindegyike egyszeres vagy kétszeres vagy ... ...$(k-1)$-szeres, és

az előállítások legalább egyike $(k-1)$-szeres.

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az összetett előállítás egy *k-szoros ismétlés nélküli szuperpozíció-előállítása az f függvénynek*.

Amennyiben az egyszeres szuperpozíció-előállításban $f^*$ monoton módon függ az $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$ változók mindegyikétől, akkor azt $f$ egy *monoton* szuperpozíció-előállításának nevezzük.

Ha adott $\Theta'(\subseteqq\Theta)$ halmazhoz létezik $f$-nek egy $f[\Theta] = (f^*[(\Theta-\Theta') \cup \{x'\}];\ f'[\Theta'] \Rightarrow x')$ egyszerű ismétlésnélküli szuperpozíció-előállítása, akkor $\Theta'$-t $\Theta$ egy $f$-re vonatkozóan *leválasztható részhalmaz*ának nevezzük. Ha elérhető, hogy a tekintett előállítás monoton legyen, akkor $\Theta'$-t *monoton-leválasztható részhalmaz*nak mondjuk. Ha a leválasztható részhalmaz legalább kételemű és nem esik egybe $\Theta$-val, akkor *valódi*nak nevezzük. *Felbonthatatlan*nak nevezzük az $f[\Theta]$ függvényt, ha $\Theta$-nak nincs valódi leválasztható részhalmaza.

Ha $f[\Theta]$ mind $x_i$, mind $x_j$ változójától monoton növekvően függ és $\{x_i, x_j\}$ monoton-leválasztható részhalmaza $\Theta$-nak $f$-re nézve, akkor $x_i$-t és $x_j$-t *asszociált* változóknak nevezzük. Bármely változót önmagával asszociáltnak tekintünk.

Tekintsünk egy $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ függvényt. Jelöljük $\alpha$-val az $\{1, 2, ..., n\}$ indexhalmaz egy részhalmazát. Értelmezzünk egy $g$ függvényt

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$$

[8] A $\Theta$ halmaz rendezése részhalmazaira is átmegy. Az $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$ változók nem fordulnak elő $\Theta$-ban, és ezek az $(\Theta-\Theta') \cup \{x^{(1)} \cup ... \cup x^{(m)}\}$ halmazban — növekvő indexeik sorrendjében — utolsó elemekként lépnek fel.

által, ahol $\tilde{x}_j$ magát $x_j$-t jelöli a $j \notin \alpha$ esetben, és $\bar{x}_j$-t a $j \in \alpha$ esetben. Ekkor azt mondjuk, hogy az $N_\alpha$ negációs operátort alkalmaztuk $f$-re. Ha $\alpha$ egy elemű, akkor $N_{\{i\}}$ helyett esetleg $N_{x_i}$-t írunk.

A következőkben négy típusba soroljuk azokat a függvényeket, amelyek legalább két változótól függnek, továbbá a (két- vagy több változós) konjunkciótól és diszjunkciótól különböznek. Ha $f$-nek van olyan változója, amelytől monoton csökkenően függ, akkor $f$-et első típusúnak nevezzük. Ha $f$ nem első típusú és van változói között asszociált pár, akkor $f$-et második típusúnak nevezzük. Egy $f[\Theta]$ függvényt, amely nincs sem az első, sem a második típusban (tehát bármely változójától monoton növekvően vagy nem-monoton módon függ és minden változója csupán önmagával asszociált), aszerint nevezzük harmadik vagy negyedik típusúnak, hogy van-e $\Theta$-nak valódi monoton-leválasztható részhalmaza $f$-re nézve, vagy nincs.

KUZNYECOV [10] dolgozatának második felében építette ki az ismétlés nélküli szuperpozíciókra vonatkozó elméletét. Vizsgálatainak eredményét az alábbi tételben foglalta össze:

I. TÉTEL. (KUZNYECOV [10]) *Ha egy Boole-féle függvénynek két tetszőleges olyan (többszörös) ismétlés nélküli szuperpozíció-előállítását tekintjük, hogy az azokban szereplő függvényeknek nincs valódi leválasztható részhalmazuk, akkor a két előállítás majdnem megegyező egymással.*

(A tétel teljes megértéséhez definiálnunk kellene, mikor nevezünk csaknem megegyezőnek két előállítást. Minthogy azonban a disszertáció további részeiben nem lesz szükségünk rá, eltekintünk e fogalom — kissé körülményes — pontos értelmezésétől, és csak hozzávetőlegesen világítjuk meg jelentését. Léteznek olyan módszerek, amelyek egy szuperpozíció-előállításra alkalmazva azt nyilvánvalóan ugyanannak a függvénynek más szuperpozíció-előállításába viszik át, mégpedig úgy, hogy az új előállítás „ugyanolyan mélységű", mint az eredeti. E módszerek pontos körülhatárolása után akkor nevez KUZNYECOV majdnem megegyezőnek két előállítást, ha átvihetőek egymásba ilyen átalakítási módszerek véges sokszori alkalmazásával.)

## 2. §. Kétpólusú gráfok

Gráfon mindig irányítatlan összefüggő hurokmentes véges gráfot értünk. Pontok és élek egy

$$A_0, k_1, A_1, k_2, A_2, \dots, k_l, A_l$$

váltakozó sorozatát *út*nak nevezzük, ha minden $k_i$ él az $A_{i-1}$ és $A_i$ pontokat köti össze ($1 \leq i \leq l$), és a pontok (ebből következően az élek is) páronként különbözőek. A két $a, b$ út egymás utáni összekapcsolásával előálló utat $a$ és $b$ szorzataként, az $a$ út fordított sorrendben való befutásával előálló utat pedig $a$ $(-1)$-ik hatványaként jelöljük. (A szorzat tehát akkor van értelmezve, ha $a$ végpontja egybeesik $b$ kezdőpontjával és nincs más közös pontjuk.) Ha szükséges, az utak kezdő- és végpontját az alábbi formában adjuk meg: $a(AB)$ olyan $a$ utat jelöl, amelynek $A$ a kezdőpontja, $B$ a végpontja. A szögletes zárójel: $a[CD]$ rész-út képzésére utal.

Ha a $\mathfrak{G}$ gráfban a $P$, $Q$ pontok ki vannak tüntetve, akkor *kétpólusú gráf*ról beszélünk, s $P$-t a gráf kezdőpontjának, $Q$-t végpontjának nevezzük. Azokat az utakat, amelyeknek kezdőpontja $P$ és végpontja $Q$, a $\mathfrak{G}$ gráf *pályái*nak mondjuk.

A dolgozatban szereplő kétpólusú gráfoktól mindig megkívánjuk, hogy *erősen összefüggőek* legyenek, azaz bármely pontjukon és élükön menjen át (legalább egy) pálya. Triviálisnak nevezzük a kétpólusú gráfot, ha egyetlen éle van.

Tekintsük a $\mathfrak{G}$ kétpólusú gráf éleinek valamely nem-üres $\alpha$ halmazát. Az $\alpha$-beli élekből és végpontjaikból álló $\mathfrak{H}$ gráfot $\mathfrak{G}$ ($\alpha$ által meghatározott) *részgráfjá*nak nevezzük. $\mathfrak{H}$ pólusának akkor nevezünk egy pontot, ha

a pont éppen $\mathfrak{G}$-nek kezdő- vagy végpontja és benne van $\mathfrak{H}$-ban, vagy

a ponthoz illeszkedik $\alpha$-beli él is, $\alpha$-n kívüli él is.

Az erős összefüggés feltétele miatt $\mathfrak{G}$ bármely részgráfjának legalább két pólusa van.

$\mathfrak{G}$-t *sorosan széttagolható*nak mondjuk, ha van olyan $A$ ($\neq P, Q$) pontja, hogy $A$-n $\mathfrak{G}$ minden pályája átmegy. $\mathfrak{G}$-t *párhuzamosan széttagolható*nak mondjuk, ha

van $P$ és $Q$ közötti éle és nem ebből az egyetlen élből áll, vagy

van olyan két $A, B$ ($\neq P, Q$) pontja, hogy az $A$-t és $B$-t összekötő utak bármelyike tartalmazza $P$ és $Q$ legalább egyikét.

Ha egy gráf sorosan sem széttagolható és párhuzamosan sem, akkor *széttagolhatatlan*nak nevezzük. *Felbonthatatlan*nak nevezünk egy kétpólusú gráfot, ha széttagolhatatlan és nincs más kétpólusú részgráfja, mint a triviálisak (azaz azok, amelyeket egyetlen él határoz meg és az, amelyet a gráf összes élei határoznak meg).

Tekintsük a $\mathfrak{G}'$ kétpólusú gráf egy $k$ élét, $k$ végpontjait jelöljük $A$-val és $B$-vel. Legyen $\mathfrak{H}$ egy ($\mathfrak{G}'$-től idegen) kétpólusú gráf, jelöljék $P_1$, $Q_1$ e $\mathfrak{H}$ gráf pólusait. Ha $P_1$, $Q_1$ egyikét $A$-val, másikát $B$-vel azonosítjuk, a $k$ élt pedig töröljük (szemléletesen kifejezve: ha $\mathfrak{H}$-t *behelyettesítjük* a $k$ él helyébe), akkor $\mathfrak{H}$ kétpólusú részgráfjává válik a keletkező gráfnak. A most látott helyettesítési mód megfordításaként előálló felbontási fogalmat TRACHTENBROT tanulmányozta; részletesen megvizsgálta, hogyan bontható fel egy kétpólusú gráf *maximális* kétpólusú részgráfjainak ilyen kiemelése, soros és párhuzamos széttagolások elvégzése útján. Ennek tárgyalásában központi szerepet játszik a

II. TÉTEL (TRACHTENBROT [11]). *Ha a $\mathfrak{G}$ kétpólusú gráf $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ kétpólusú részgráfjainak van közös éle, akkor $\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2$ is kétpólusú részgráf és $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ teljesítik az alábbi három állítás egyikét;*

*$\mathfrak{H}_1$ része $\mathfrak{H}_2$-nek, vagy megfordítva,*

*$\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ és $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1$ párhuzamosan kapcsolódnak egymáshoz,*

*$\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ és $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1$ sorosan kapcsolódnak egymáshoz.*

(Két részgráf között a halmazelméleti műveleteket úgy értjük, hogy azokat az élhalmazokon hajtjuk végre.)

Ha a $\mathfrak{G}$ gráf $\mathfrak{H}$ kétpólusú részgráfját (pontosabban: $\mathfrak{H}$ összes éleit és a pólusaitól különböző pontjait) töröljük és pólusai közé egyetlen $h$ élt iktatunk, akkor az előálló gráfot $(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$-val jelöljük.

A $\mathfrak{G}'$ gráf valamely éle helyébe nyilván kétféle módon helyettesíthető be a $\mathfrak{H}$ gráf: vagy a $P_1 = A$, $Q_1 = B$ azonosítások, vagy pedig a $P_1 = B$, $Q_1 = A$ azonosítások révén. Azt mondjuk, hogy az így keletkező gráfok egyike $\mathfrak{H}$ *megfordításá*val áll elő a másikból. Ha $\mathfrak{G}$ élei halmazának $\alpha$ részhalmaza olyan, hogy részgráf-megfordítások véges sokszori alkalmazásával elérhető az, hogy az $\alpha$ által meghatározott részgráf kétpólusú legyen, akkor az $\alpha$ által $\mathfrak{G}$-ben meghatározott részgráfot *nem-tulajdonképpeni kétpólusú részgráf*nak nevezzük. Belátható, hogy $\mathfrak{H}$ akkor és csak akkor nem-tulajdonképpeni kétpólusú részgráf $\mathfrak{G}$-ben, ha $\mathfrak{G}$-nek van olyan $\mathfrak{K}$ kétpólusú részgráfja, hogy $\mathfrak{K}$ sorosan felbontható, és $\mathfrak{K}$ soros komponensei között vannak olyan

$\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_p$ komponensek, hogy ezek él-halmazainak egyesítése $\mathfrak{H}$ éleinek halmazát adja, és $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_p$ nem hézagtalanul egymás utáni komponensek $\mathfrak{K}$-ban.

A $\mathfrak{G}$ kétpólusú gráf *kezdő éleinek* nevezzük a $P$-hez illeszkedő éleket, *végső éleinek* a $Q$-hoz illeszkedőket. A többi éleket *belső éleknek* hívjuk. *Kezdő* (ill. *végső*) *él-párnak* nevezünk két élt, ha mindkettő kezdő (ill. végső) él. A *„szélső él-pár"* megjelölést a kezdő és végső él-párok közös elnevezéseként fogjuk használni. — A két pólustól különböző pontokat a gráf *belső pontjainak*, a pólusokon át nem menő utakat *belső utaknak* nevezzük.

Két $k_1$, $k_2$ élt *kiegészíthető él-párnak* nevezzük, ha van olyan pálya a gráfban, amely $k_1$-et is, $k_2$-t is tartalmazza. Szélső él-pár nyilvánvalóan nem lehet kiegészíthető.

III. TÉTEL. [11]. *Ha egy felbonthatatlan gráf $k_1$, $k_2$ élei teljesítik az alábbi három feltétel egyikét, akkor kiegészíthető él-párat alkotnak;*
*$k_1$ és $k_2$ pontosan egyike kezdő él,*
*$k_1$ és $k_2$ pontosan egyike végső él,*
*$k_1$ és $k_2$ olyan belső élek, amelyeknek van közös végpontjuk.*

Az eddig elmondottak részleges választ adnak arra a kérdésre, mikor kiegészíthetőek egy felbonthatatlan gráf $k_1$, $k_2$ élei. A probléma nyitva marad abban az esetben, mikor $k_1$ és $k_2$ közös végpont nélküli belső élek. A dolgozat III. fejezetének fő eredménye teljes megoldást fog adni a problémára.

Felsorolunk néhány ugyancsak TRACHTENBROTtól eredő tételt, amelyekre a továbbiakban támaszkodni fogunk.

IV. TÉTEL [11]. *Ha egy nem-triviális felbonthatatlan gráfban egy élt törlünk, akkor erősen összefüggő gráfot kapunk.*

V. TÉTEL [11]. *Ha töröljük egy felbonthatatlan gráf egy belső pontját és az ahhoz illeszkedő éleket, akkor erősen összefüggő gráfot kapunk.*

VI. TÉTEL [11]. *Bármely széttagolhatatlan gráfban van két olyan pálya, amelyeknek nincs más közös pontjuk, mint a gráf pólusai.*

## 3. §. Realizáció

Legyen $\mathfrak{G}$ egy kétpólusú gráf, jelöljük $\mathfrak{G}$ (összes) éleit $k_1$-gyel, $k_2$-vel, ..., $k_n$-nel. Tekintsük az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ logikai változókat. Rendeljük hozzá az élek mindegyikéhez az $\{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \ldots, x_m, \bar{x}_m\}$ (negálatlan és negált változókból álló) halmaz egy elemét több-egyértelmű módon. Értelmezzük az $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *Boole*-féle függvényt a következőképpen: értelmezési tartományának egy helyén $f$ akkor és csak akkor vegye fel az $\uparrow$ értéket, ha van $\mathfrak{G}$-nek olyan pályája, hogy a pálya minden élének az $\uparrow$ logikai érték felel meg a szóban forgó helyen. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\mathfrak{G}$ gráf (az adott él $\to$ változó hozzárendelés alapján) *realizálja* az $f$ függvényt.

Abban a speciális esetben, mikor az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változók mindegyike pontosan egy élhez van hozzárendelve (negálatlanul vagy negálva), *ismétlés nélküli* realizációról beszélünk. Ekkor az általánosság lényeges megszorítása nélkül feltételezhető, hogy a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ élekhez rendre az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ negálatlan változók tartoznak. A disszertációban (a bevezetéstől eltekintve) realizáción mindig ismétlésnélküli realizációt értünk.

Az ismétlésnélküli realizáció fenti megfogalmazásából és a gráf erős összefüggőségéből könnyen adódik, hogy a realizált függvény ténylegesen és monoton növekvően függ valamennyi változójától. További egyszerűen igazolható és jól ismert tény, hogy a $\mathfrak{G}$ gráf $k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_l}$ élei akkor és csak akkor alkotnak pályát, ha a hozzájuk rendelt $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_l}$ változók konjunkciója prím-implikánsa a realizált $f$ függvénynek. $f$ ismeretében tehát igen könnyű meghatározni a realizált gráf pályáit mint él-halmazokat. A realizáció egzisztencia-problémája megfogalmazható úgy, mint az a kérdés, adott él-halmazokhoz létezik-e olyan kétpólusú gráf, amelynek éppen ezek a halmazok a pályái, a konstrukció-probléma pedig úgy, hogy a pályák ismeretében meghatározandóak az éleknek a pontokba való összefutásai.

Az ismétlés nélküli realizációval kapcsolatos ismert eredmények közül a következőket említjük meg.

VII. TÉTEL (KUZNYECOV [10]). *A $\mathfrak{G}$ gráf élei halmazának $\alpha$ részhalmaza akkor és csak akkor határoz meg tulajdonképpeni vagy nem-tulajdonképpeni kétpólusú részgráfot, ha (a realizált függvényre vonatkozóan) az $\alpha$-beli élekhez rendelt változók leválasztható részhalmazt alkotnak.*

VIII. TÉTEL (TRACHTENBROT [11]). *A $\mathfrak{G}$ gráf élei halmazának $\alpha$ részhalmaza akkor és csak akkor határoz meg tulajdonképpeni vagy nem-tulajdonképpeni kétpólusú részgráfot, ha a következő feltétel teljesül; valahányszor $a_1$ és $a_2$ olyan pályák $\mathfrak{G}$-ben, hogy $a_1$ is, $a_2$ is tartalmaz $\alpha$-beli élt, akkor $a_1$-nek $\alpha$-beli élei és $a_2$-nek $\alpha$-n kívüli élei pályát alkotnak $\mathfrak{G}$-ben.*

IX. TÉTEL [11]. *Ha az $f$ függvény realizálható, akkor bármely két $f$-et realizáló gráf izomorffá tehető kétpólusú részgráfok megfordításai útján.*

X. TÉTEL [11]. *Legyen $\mathfrak{G}$ felbonthatatlan kétpólusú gráf, jelöljük $\alpha$-val $\mathfrak{G}$ élei halmazának valamely nem-üres részhalmazát. Ahhoz, hogy $\mathfrak{G}$-nek legyen olyan $A$ belső pontja, hogy $\alpha$ az $A$-hoz illeszkedő összes élekből és csak ezekből áll, szükséges és elegendő, hogy $\alpha$ teljesítse az alábbi három feltételt:*

A) *bármely $k$ ($\notin \alpha$) élhez van olyan pálya, amely tartalmazza $k$-t és nem tartalmaz egy $\alpha$-beli élt sem,*

B) *ha valamely pálya tartalmaz legalább egy $\alpha$-beli élt, akkor pontosan 2 ilyen élt tartalmaz,*

C) *ha $k_1$ és $k_2$ tetszőleges élei $\alpha$-nak, akkor van olyan pálya, amely $k_1$-et is, $k_2$-t is tartalmazza.*

XI. TÉTEL (ÁDÁM [1]). *Legyen $f$ ismétlés nélkül realizálható függvény. Értelmezzük $f$ változópárjaira az $\varepsilon_2$ relációt, mint az alábbi $\varrho_2$ reláció tranzitív kiterjesztését; $\varrho_2(x_i, x_j)$ legyen igaz akkor és csak akkor, ha $f$-nek van olyan prím-implikátuma, amelyben $x_i$ is, $x_j$ is szerepel. Ekkor ahhoz, hogy az $f$-et ismétlés nélkül realizáló gráfban a $k_i$ és $k_j$ élek közös soros komponensben legyenek, szükséges és elegendő, hogy az $\varepsilon_2$ reláció érvényes legyen a megfelelő $x_i$, $x_j$ változókra.*

A X. tétel közvetlen alkalmazásaival adódó eljárás (azaz a gráf valamennyi él-halmazának végigvizsgálása, teljesítik-e az A), B), C) feltételeket) két okból sem tekinthető az egzisztencia- és a konstrukció-probléma megnyugtató megoldásának. Ha nem realizálható függvényre alkalmazzuk az eljárást, úgy általában csak akkor kapunk választ az egzisztencia-problémára, mikor már elvégeztük a vizsgálatot, tehát esetleg feleslegesen alkalmaztuk a terjedelmes eljárást. (Ugyanis, ha $f$ nem realizálható, akkor vagy már a vizsgálatok folyamán nyilvánvaló rendellenesség adódik, vagy pedig szabályosan kapunk egy kétpólusú gráfot, amely azonban nem az $f$ függvényt realizálja.) Az egzisztencia-problémára a módszer tehát csak kerülő úton ad választ. A konstrukció-probléma szemszögéből nézve pedig $2^n$ él-halmaz végigvizsgálása igen kevéssé gazdaságos eljárás. A fenti hiányosságok indokolják az olyan irányú vizsgálatokat, amelyek az egzisztencia-problémára a X. tétel (teljes vagy részleges) megkerülésével, a konstrukció-problémára pedig a tétel továbbfejlesztésével keresnek választ.

## II. fejezet. Az ismétlés nélküli monoton szuperpozíciók elmélete

### 4. §.

Habár e fejezet főcélja a *monoton* szuperpozíciók vizsgálata, a tárgyalásban fellépnek nem-monoton ismétlés nélküli szuperpozíciók is. Célszerű ezért megjegyeznünk, hogy az 5. § közepétől a 11. §-ig bezárólag szuperpozíción mindig monoton szuperpozíciót értünk, a fejezet kezdő részében és utolsó paragrafusában azonban nem szorítkozunk monoton szuperpozíciókra.

1. TÉTEL. *Tekintsük az $f[\Theta]$ függvénynek az*

$$f=(f^*[(\Theta-\Theta')\cup\{x'\}];\ f'[\Theta']\Rightarrow x')$$

*egyszerű ismétlés nélküli szuperpozíció-előállítását, amelyben $f'$ nem azonosan $\uparrow$ vagy $\downarrow$. Egy $\mathfrak{A}$ elemi konjunkció akkor és csak akkor prím-implikánsa $f$-nek, ha igaz a következő három állítás egyike:*

α) *$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ és $\mathfrak{A}$ prím-implikánsa $f^*$-nak,*

β) *$\mathfrak{A}_{\Theta'}$ prím-implikánsa $f'$-nek és $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}\&x'$ prím-implikánsa $f^*$-nak,*

γ) *$\mathfrak{A}_{\Theta'}$ prím-implikánsa $\bar{f}'$-nek és $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}\&\bar{x}'$ prím-implikánsa $f^*$-nak.*

Először két segédtételt igazolunk.

1. SEGÉDTÉTEL. *Ha $\mathfrak{A}$ prím-implikánsa $f$-nek és $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ nem üres, akkor vagy*

β′) *$\mathfrak{A}_{\Theta'}$ implikánsa $f'$-nek és $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}\&x'$ implikánsa $f^*$-nak, vagy*

γ′) *$\mathfrak{A}_{\Theta'}$ implikánsa $\bar{f}'$-nek és $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}\&\bar{x}'$ implikánsa $f^*$-nak.*

*Bizonyítás.* Ha $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ sem $f'$-nek, sem $\bar{f}'$-nak nem implikánsa, akkor vannak olyan $\mathfrak{A}_{\Theta'}$-t tartalmazó teljes elemi konjunkciók $f'$-re nézve, hogy $f'(\mathfrak{B})=\uparrow$ és $f'(\mathfrak{C})=\downarrow$. Legyen $\mathfrak{D}$ olyan teljes elemi konjunkció $f$-re vonatkozóan, amelynek $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ rész-konjunkciója. Ha $f'(\mathfrak{D}_{\Theta'})=\uparrow$, akkor kell, hogy

$$f(\mathfrak{D})=f(\mathfrak{D}_{\Theta-\Theta'}\ \&\ \mathfrak{B})=\uparrow$$

álljon (az első egyenlőség azért érvényes, mert $f^*$ valamennyi változójának értéke egybeesik, a második pedig, mert $\mathfrak{A}$ rész-konjunkciója $\mathfrak{D}_{\Theta-\Theta'}\&\mathfrak{B}$-nek). Ha pedig $f'(\mathfrak{D}_{\Theta'})=\downarrow$, akkor hasonló okokból

$$f(\mathfrak{D})=f(\mathfrak{D}_{\Theta-\Theta'}\ \&\ \mathfrak{C})=\uparrow.$$

Ennélfogva $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ implikánsa $f$-nek, ellentmondásban a feltevéssel, amely szerint $\mathfrak{A}$ prím-implikáns.

Igazoltuk a $\beta'$) vagy $\gamma'$) állításoknak $\mathfrak{A}_{\Theta'}$-re vonatkozó részét. Be kell még látnunk, hogy érvényes az $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$-ról szóló megfelelő állítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ $f'$-nek implikánsa; tekintsük $f^*$ értékét tetszőleges olyan helyen, ahol $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}\&x'$ igaz. E helyen $f^*$ értéke szükségképpen $f(\mathfrak{C})=\uparrow$, ahol $\mathfrak{C}$ oly teljes elemi konjunkció, amely tartalmazza $\mathfrak{A}$-t. Ha $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ az $\bar{f}'$ függvényt implikálja, a gondolatmenet analóg.

2. SEGÉDTÉTEL. *Ha az $\mathfrak{A}$ elemi konjunkcióra igaz a $\beta'$), $\gamma'$) állítások egyike, akkor $\mathfrak{A}$ implikánsa $f$-nek.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $\beta'$) érvényes $\mathfrak{A}$-ra és $\mathfrak{A}$ igaz $f$ értelmezési tartományának egy helyén. Ekkor $f'$ és $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ is igazak ezen a helyen. Ha tehát $f'$-t helyettesítjük $x'$ helyére, az $f$ függvény értékeként $\uparrow$ adódik. Amennyiben $\gamma'$) teljesül, a bizonyítás analóg.

*Az 1. tétel bizonyítása.* Tekintsük $f$ valamely prím-implikánsát. Ha $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$, $\alpha$) nyilvánvalóan teljesül. Az ellenkező esetben alkalmazhatjuk az 1. segédtételt. Ha $\beta'$) érvényes volna, de $\beta$) nem, akkor lenne $\mathfrak{A}_{\Theta'}$-nak olyan rész-konjunkciója, amely $f'$-nek prím-implikánsa, és $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}\&x'$-nek olyan rész-konjunkciója, amely $f^*$-nek prím-implikánsa úgy, hogy legalább egyik helyen valódi a rész-konjunkció. Ekkor azonban a 2. segédtétel $f$ olyan prím-implikánsát szolgáltatná, amely valódi része $\mathfrak{A}$-nak; ez ellentmondás. Ha $\gamma'$) volna érvényes, de $\gamma$) nem, analóg módon végezhető a bizonyítás.

Megfordítva, legyen $\beta$) vagy $\gamma$) igaz. A 2. segédtétel szerint $\mathfrak{A}$ implikálja $f$-et. Ha $\mathfrak{A}$ nem lenne prím-implikáns, úgy volna olyan valódi része, amely prím-implikáns, ekkor azonban az 1. segédtétel ellentmondásra vezet. — Ha $\alpha$) teljesül, akkor $\mathfrak{A}$ nyilván prím-implikánsa $f$-nek.

2. TÉTEL. *A következő* A), B) *állítások ekvivalensek egymással az $f[\Theta]$ függvény $\Theta$ változó-halmazának tetszőleges $\Theta'$ részhalmazára;*

A) *$\Theta'$ monoton-leválasztható,*

B) *valahányszor $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ olyan prím-implikánsai $f$-nek, hogy $\mathfrak{A}_{\Theta'}$, $\mathfrak{B}_{\Theta'}$ egyike sem üres konjunkció, úgy $\mathfrak{A}_{\Theta'}\&\mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'}$ is prím-implikánsa $f$-nek.*[9]

*Bizonyítás.* Ha A) teljesül, akkor $x'$ vagy csak negálatlanul, vagy csak negálva fordul elő $f^*$ prím-implikánsaiban. B) az 1. tétel $\beta$) vagy $\gamma$) állításából következik.

Megfordítva, legyen igaz B). Értelmezzük az $f'[\Theta']$ és $f^*[(\Theta-\Theta')\cup\{x'\}]$ függvényeket a következőképpen:

$$f'[\Theta'] = \mathfrak{A}^{(1)}_{\Theta'}\vee\ldots\vee\mathfrak{A}^{(k)}_{\Theta'},$$

$$f^*[(\Theta-\Theta')\cup\{x'\}] = \mathfrak{A}^{(k+1)}\vee\ldots\vee\mathfrak{A}^{(m)}\vee\mathfrak{A}^{(1)}_{\Theta-\Theta'}x'\vee\ldots\vee\mathfrak{A}^{(k)}_{\Theta-\Theta'}x',$$

ahol $\mathfrak{A}^{(1)},\ldots,\mathfrak{A}^{(m)}$ az $f$ függvény (összes) prím-implikánsait jelentik úgy számozva, hogy $\mathfrak{A}^{(i)}_{\Theta'}$ pontosan a $k<i\leqq m$ esetekben legyen üres.

Hogy teljessé váljon a bizonyítás, meg kell mutatnunk, hogy $f^*$ egyenlő lesz $f$-fel, ha $x'$ helyébe $f'$-t helyettesítjük. Valóban, amennyiben $x'$ minden előfordulása helyébe az $f'$-t definiáló formulát írjuk, és a disztributív törvényt alkalmazzuk,

[9] A VII. és VIII. tételek, valamint a 2. tételnek az ismétlés nélkül realizálható függvényekre vonatkozó speciális esete oly viszonyban vannak egymással, hogy a három állítás bármelyike rögtön következik a másik kettőből, figyelembe véve a 12. § végén kimondott 1. következményt is.

akkor B) biztosítja, hogy $f$ prím-implikánsait (és csak ezeket) kapjuk. Ugyanaz a prím-implikáns egynél több példányban is felléphet.

3. TÉTEL. *Ha $\Theta'$ és $\Theta''$ monoton-leválasztható részhalmazai $\Theta$-nak az $f[\Theta]$ függvényre vonatkozóan, és $\Theta' \cap \Theta''$ nem üres, akkor ez a metszet is monoton-leválasztható.*

*Bizonyítás.* Igazolnunk kell, hogy $\Theta \cap \Theta''$ is teljesíti a 2. tételben szereplő B) feltételt, amennyiben $\Theta'$ és $\Theta''$ teljesítik. Valóban, akkor $\mathfrak{A}_{\Theta'} \& \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'}$ is és ennek alapján az alábbi konjunkció is prím-implikánsa $f$-nek:

$$(\mathfrak{A}_{\Theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'})_{\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta''} = \mathfrak{A}_{\Theta'\cap\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{(\Theta-\Theta')\cap\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta''} = \mathfrak{A}_{\Theta'\cap\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-(\Theta'\cap\Theta'')}.$$

A 3. tételnek más halmazelméleti műveletekre vonatkozó analogonját később fogjuk igazolni (10. tétel).

## 5. §.

Először azt a nyilvánvaló tényt említjük meg, hogy egy $f$ függvény bármely

$$f = (f^*;\, f^{(1)} \Rightarrow x^{(1)},\, f^{(2)} \Rightarrow x^{(2)}, \dots,\, f^{(m)} \Rightarrow x^{(m)})$$

egyszeres ismétlés nélküli szuperpozíció-előállítása megkapható az alábbi szukcesszív eljárással. Először magát $f$-et tekintjük, aztán $f$-nek egy olyan egyszerű előállítását, amelyben a belső függvény $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(m)}$ egyike (a külső függvényt a belső egyértelműen meghatározza). A harmadik lépésben két belső függvény lép fel: az előző előállítás belső függvénye és — $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(m)}$ körül választva — még egy. Az eljárás folytatása $m$ lépésben a kívánt előállításhoz vezet.

3. SEGÉDTÉTEL. *Tekintsük az $f[\Theta]$ függvényt; legyen $\Theta'$ részhalmaza $\Theta$-nak. Ha van $f$-nek olyan egyszerű szuperpozíció-előállítása, amelyben a belső függvény éppen $\Theta'$ elemeitől függ, akkor $f$-nek pontosan két ilyen előállítása van, mégpedig ezek egyike úgy kapható a másikból, hogy az $N_{x'}$ negációs operátort alkalmazzuk $f^*$-ra, és $f'$-t $\bar{f}'$-vel pótoljuk.*

*Bizonyítás.* Világos, hogy a módszer $f$-nek egy másik szuperpozíció-előállításához vezet. Igazolnunk kell, hogy $f$-nek nincs olyan további előállítása, amelyben a belső függvény $\Theta'$ elemeitől függne. Valóban, legyen

$$(f_1^*[(\Theta - \Theta') \cup \{x'\}];\; f_1'[\Theta'] \Rightarrow x')$$

tetszőleges előállítása $f$-nek.

1. eset. Van $f'$-re vonatkozóan olyan $\mathfrak{A}$ teljes elemi konjunkció, hogy $f'(\mathfrak{A}) = f_1'(\mathfrak{A})$. Szimmetria-okokból elég azt az esetet vizsgálnunk, mikor ez a megegyező érték $\uparrow$. Először azt mutatjuk meg, hogy $f^*$ és $f_1^*$ minden olyan helyen megegyező értékeket vesznek fel, mikor $x' = \uparrow$. Valóban, $f^*$-nek bármely $\mathfrak{B} \& x'$ alakú teljes elemi konjunkciójára

$$f^*(\mathfrak{B} \,\&\, x') = f(\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{A}) = f_1^*(\mathfrak{B} \,\&\, x').$$

Következő célunk azt belátni, hogy $f'$ és $f_1'$ azonosan egyenlők. Mivel $f^*$ is, $f_1^*$ is ténylegesen függ $x'$-től, alkalmas teljes elemi konjunkciókra igazak az

$$f^*(\mathfrak{D} \& x') \neq f^*(\mathfrak{D} \& \bar{x}') \quad \text{és} \quad f_1^*(\mathfrak{E} \& x') \neq f_1^*(\mathfrak{E} \& \bar{x}')$$

egyenlőtlenségek. Legyen $\mathfrak{C}$ tetszőleges elemi konjunkció $f'$-re vonatkozóan. Ha $f'(\mathfrak{C})=\uparrow$ és $f_1'(\mathfrak{C})=\downarrow$ volna, ebből az alábbi ellentmondás adódna:

$$f(\mathfrak{C}\ \&\ \mathfrak{C}) = f^*(\mathfrak{C}\ \&\ x') = f_1^*(\mathfrak{C}\ \&\ x') \neq f_1^*(\mathfrak{C}\ \&\ \bar{x}') = f(\mathfrak{C}\ \&\ \mathfrak{C}).$$

Analóg módon megmutatható, hogy $f'(\mathfrak{C})=\downarrow$ és $f_1'(\mathfrak{C})=\uparrow$ is ellentmondásra vezet. Az $f'$ és $f_1'$ függvények megegyezéséből következik, hogy $f^*$ és $f_1^*$ is azonosan egyenlők egymással.

2. eset. $f_1'$ a negációja $f'$-nek. Ekkor világos, hogy $f_1^*$ az $N_{x'}$ negációs operátor alkalmazásával áll elő $f^*$-ból.

4. TÉTEL. *Tekintsük az $f[\Theta]$ függvényt: legyenek $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \ldots, \Theta^{(m)}$ páronként idegen részhalmazai $\Theta$-nak. Ha van $f$-nek olyan egyszeres ismétlés nélküli szuperpozíció-előállítása, amelyben az $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}$ belső függvények rendre éppen a $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \ldots, \Theta^{(m)}$ halmazok elemeitől függnek, akkor $f$-nek pontosan $2^m$ ilyen előállítása van, mégpedig ezek egyikéből az összes többi egyértelműen kapható a következő módon; kiválasztjuk az $\{1, 2, \ldots, m\}$ halmaznak egy $\alpha$ részhalmazát: $f^*$-ra az $N_\alpha$ negációs operátort alkalmazzuk, és $f^{(i)}$-t $\bar{f}^{(i)}$-vel pótoljuk mindazokra az $i$-kre vonatkozóan, amelyekre $i \in \alpha$.*

*Bizonyítás.* Az $m=1$ speciális eset helyességét a segédtételben láttuk. Az általános eset ebből könnyen következik $m$ szerinti teljes indukcióval, ha a szóban forgó szuperpozíció-előállításnak a § kezdetén megemlített szukcesszív felépítését tekintjük. Feltehető, hogy a belső függvények úgy vannak számozva, hogy az első előállításban $f^{(1)}$, a másodikban $f^{(1)}$ és $f^{(2)}$, a harmadikban $f^{(1)}, f^{(2)}$ és $f^{(3)}, \ldots$ lépnek fel belső függvényekként. Tételezzük fel, hogy $m = i-1$ esetén érvényes a tétel. $f$-nek tehát $2^{i-1}$ olyan előállítása van, amelyben éppen $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \ldots, \Theta^{(i-1)}$ a belső függvények változó-halmazai. Minden egyes ilyen előállításra a külső függvénynek a 3. segédtétel szerint pontosan két olyan egyszerű szuperpozíció-előállítása van, amelyben a belső függvény $\Theta^{(i)}$ elemeitől függ. Ha ezek mindegyikébe behelyettesítjük az $f^{(1)}, \ldots, f^{(i-1)}$ függvényeket, akkor ezzel $f$-nek $2 \cdot 2^{i-1}$ egyszeres szuperpozíció-előállítását kapjuk. A tétel tehát $m=i$ esetén is igaz.

A § hátralevő részében (és még tovább a 11. § végéig) mindig *monoton* ismétlés nélküli szuperpozíciókat fogunk vizsgálni. Egy egyszerű szuperpozíció-előállítást *növekvő*nek nevezünk, ha $f^*$ monoton növekvően függ $x'$-től.

5. TÉTEL. *Tekintsük az $f$ függvénynek egy egyszerű ismétlés nélküli növekvő szuperpozíció-előállítását. A $\Theta-\Theta'$ halmaznak egy $\Theta^+$ részhalmaza akkor és csak akkor monoton-leválasztható $f^*$-ra vonatkozóan, ha $f$-re vonatkozóan is monoton-leválasztható. $\Theta'$-nak egy $\Theta^+$ részhalmaza akkor és csak akkor monoton-leválasztható $f'$-re vonatkozóan, ha $f$-re vonatkozóan is az.*

*Bizonyítás.* Az első állítás „csak akkor" része rögtön belátható. Megfordítva, legyen $\Theta^+(\subseteq \Theta-\Theta')$ monoton-leválasztható $f$-re nézve. Az 1. tétel szerint $f^*$ prím-implikánsai pontosan a következők:

$$(*) \qquad \mathfrak{A}^{(1)}_{\Theta-\Theta'}\ \&\ x', \ldots, \mathfrak{A}^{(k)}_{\Theta-\Theta'}\ \&\ x', \mathfrak{A}^{(k)}, \ldots, \mathfrak{A}^{(m)},$$

ahol $\mathfrak{A}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{A}^{(m)}$ $f$ (összes) prím-implikánsait jelentik, úgy számozva, hogy $\mathfrak{A}^{(i)}_{\Theta'}$ $(1 \leq i \leq m)$ éppen a $k < i \leq m$ esetekben legyen üres konjunkció. (A $(*)$ felsorolásban ugyanaz a prím-implikáns többször is felléphet.) Legyenek $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ tetszőleges olyan prím-implikánsai $f^*$-nak, hogy sem $\mathfrak{B}_{\Theta^+}$, sem $\mathfrak{C}_{\Theta^+}$ nem üres konjunkció. Legyen $\mathfrak{B}$ a $j_1$-ik, $\mathfrak{C}$ pedig a $j_2$-ik tagja a ($*$) felsorolásnak. Az $\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\Theta^+}$, $\mathfrak{A}^{(j_2)}_{\Theta^+}$ konjunkciók nem üresek, ebből a 2. tétel révén következik, hogy $\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\Theta-\Theta^+} \& \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\Theta^+}$ prím-implikánsa $f$-nek. Két esetet fogunk megkülönböztetni aszerint, hogy

$$(\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\Theta-\Theta^+} \& \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\Theta^+})_{\Theta'} = \mathfrak{A}^{(j_1)}_{\Theta'}$$

üres-e vagy nem. Ha üres, úgy érvényes a következő egyenlőség

$$(**) \qquad \mathfrak{A}^{(j_1)}_{\Theta-\Theta^+} \& \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\Theta^+} = \mathfrak{B}_{((\Theta-\Theta')\cup\{x'\})-\Theta^+} \& \mathfrak{C}_{\Theta^+},$$

az ellenkező esetben pedig

$$(\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\Theta-\Theta^+} \& \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\Theta^+})_{\Theta-\Theta'} \& x'$$

nyilvánvalóan megegyezik a ($**$) jobb oldalán fellépő kifejezéssel. Ez a kifejezés tehát prím-implikánsa $f^*$-nek, így a 2. tétel alapján $\Theta^+$ monoton-leválasztható $f^*$-ra nézve.

A tétel második állítását először „csak akkor" irányban igazoljuk. Tekintsük az $f'$ belső függvénynek a

$$(g_1[(\Theta-\Theta^+)\cup\{x''\}]; \quad g_2[\Theta^+]\Rightarrow x'')$$

szuperpozíció-előállítását. Ekkor érvényes

$$f=((f^*;\ g_1\Rightarrow x');\ g_2\Rightarrow x'').$$

Az 1. tétel biztosítja, hogy akkor, ha $g_1$ $x''$-től is, $f^*$ $x'$-től is monoton függ, ennek az előállításnak külső függvénye is monoton módon függ $x''$-től. Ebből következik, hogy $\Theta^+$ monoton-leválasztható $f$-re nézve.

Megfordítva, legyen $\Theta^+(\subseteq\Theta')$ monoton-leválasztható $f$-re vonatkozóan. Legyenek $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ tetszőleges olyan prím-implikánsai $f'$-nek, hogy $\mathfrak{B}_{\Theta^+}$ és $\mathfrak{C}_{\Theta^+}$ nem üresek. Az 1. tétel szerint vannak olyan $\mathfrak{A}^{(1)}$, $\mathfrak{A}^{(2)}$ prím-implikánsai $f$-nek, hogy a $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}^{(1)}_{\Theta'}$ és $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}^{(2)}_{\Theta'}$ egyenlőségek igazak. Ekkor $\mathfrak{A}^{(1)}_{\Theta-\Theta^+}\&\mathfrak{A}^{(2)}_{\Theta^+}$ prím-implikánsa $f$-nek. Mivel $f^*$ monoton függvénye $x'$-nek, az 1. tétel biztosítja, hogy

$$(\mathfrak{A}^{(1)}_{\Theta-\Theta^+} \& \mathfrak{A}^{(2)}_{\Theta^+})_{\Theta'} = \mathfrak{B}_{\Theta'-\Theta^+} \& \mathfrak{C}_{\Theta^+}$$

prím-implikánsa $f$-nek.

## 6. §.

6. TÉTEL.[10] *Legyenek $\Theta'$ és $\Theta''$ monoton-leválasztható részhalmazok az $f[\Theta]$ függvényre vonatkozóan. Tételezzük fel, hogy $\Theta'$ is, $\Theta''$ is legalább két elemű, metszetük pedig egyetlen $x_i$ változóból áll. Ekkor vagy igazak a*

$$\varrho(\mathfrak{A},\Theta'-\{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{A},\{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{A},\Theta''-\{x_i\})$$

*egyenlőségek $f$ valamennyi $\mathfrak{A}$ prím-implikánsára, vagy pedig $f$ bármely prím-implikánsára a*

$$\varrho(\mathfrak{A},\Theta'-\{x_i\}),\ \varrho(\mathfrak{A},\{x_i\}),\ \varrho(\mathfrak{A},\Theta''-\{x_i\})$$

*relációk legfeljebb egyike igaz.*

[10] A 6. tételt általánosítani fogjuk a 9. tételben.

A tétel helyességét a következő öt segédtételen át fogjuk megmutatni. A 6., 7. és 8. segédtételek együtt a tétel állítását adják. A segédtételek mindegyikénél megköveteljük a 6. tétel feltételeinek teljesülését.

4. SEGÉDTÉTEL. *Ha*

$$\varrho(\mathfrak{B}, \Theta' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\})$$

*igaz egy* $\mathfrak{B}$ *prím-implikánsra, akkor van olyan* $\mathfrak{C}$ *prím-implikáns, amelyre*

$$\varrho(\mathfrak{C}, \Theta'' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\})$$

*érvényes.*

*Bizonyítás.* Tekintsünk tetszőleges olyan $\mathfrak{D}$ prím-implikánst, amelyre

$$\varrho(\mathfrak{D}, \Theta'' - \{x_i\}) = \uparrow.$$

Ekkor

$$\mathfrak{C} = (\mathfrak{D}_{\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta - \Theta''})_{\Theta - \Theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta'}$$

olyan prím-implikáns, amely teljesíti a segédtétel konklúzióját.

5. SEGÉDTÉTEL. *Ha létezik olyan* $\mathfrak{B}$ *prím-implikáns, amelyre*

$$\varrho(\mathfrak{B}, \Theta' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\})$$

*teljesül, akkor a*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \Theta') \to \varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\})$$

*implikáció minden prím-implikánsra igaz.*

*Bizonyítás.* Ha a segédtétel hamis volna, akkor a 2. tétel ismételt alkalmazása valamennyi lehetséges esetben ellentmondásra vezetne azzal a ténnyel, hogy egy prím-implikáns nem lehet valódi részkonjunkciója egy másiknak. Legyen $\mathfrak{A}$ olyan prím-implikáns, amely a segédtétel konklúziójának nem tesz eleget, amelyre tehát $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta') = \uparrow$ és $\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \downarrow$.

1. eset. $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$. Ekkor $\mathfrak{B}_{\Theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\Theta - \Theta'}$ és

$$(\mathfrak{B}_{\Theta - \Theta''} \,\&\, \mathfrak{A}_{\Theta''})_{\Theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\Theta - \Theta'}$$

prím-implikánsok, s a második valódi része az elsőnek.

2. eset. $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta'' - \{x_i\}) = \downarrow$ és $\varrho(\mathfrak{B}, \Theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$. Ekkor $\mathfrak{B}$ és a

$$(\mathfrak{B}_{\Theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\Theta - \Theta'})_{\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta - \Theta''} = \mathfrak{B}_{\Theta - (\Theta'' - \{x_i\})}$$

prím-implikáns adnak ellentmondást.

3. eset. $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta'' - \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \Theta'' - \{x_i\}) = \downarrow$. Ekkor $\mathfrak{A}$ valódi része az

$$\mathfrak{A}_{\Theta'} \,\&\, (\mathfrak{C}_{\Theta''} \,\&\, (\mathfrak{B}_{\Theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\Theta - \Theta'})_{\Theta - \Theta''})_{\Theta - \Theta'} = \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C}_{\Theta'' - \{x_i\}}$$

prím-implikánsnak, ahol $\mathfrak{C}$ (a 4. segédtétel miatt létező) tetszőleges olyan prím-implikáns, amelyre

$$\varrho(\mathfrak{C}, \Theta'' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\}) = \uparrow.$$

6. SEGÉDTÉTEL. *Vagy teljesül a*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \Theta' \cup \Theta'') \to \varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\})$$

*implikáció minden prím-implikánsra, vagy pedig bármely prím-implikánsra a*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}), \ \varrho(\mathfrak{A}, (\Theta' \cup \Theta'') - \{x_i\})$$

*relációk legfeljebb egyike igaz.*

*Bizonyítás.* Ha hamis volna a tétel, léteznének olyan $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ prím-implikánsok, amelyekre

$$\varrho(\mathfrak{A}, \Theta' \cup \Theta'') = \varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, (\Theta' \cup \Theta'') - \{x_i\}) = \uparrow$$

és

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \downarrow.$$

A

$$\varrho(\mathfrak{B}, (\Theta' \cup \Theta'') - \{x_i\}) = \uparrow$$

egyenlőség írható a

$$\varrho(\mathfrak{B}, \Theta' - \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{B}, \Theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$$

alakban is. Szimmetria-okokból elég a $\varrho(\mathfrak{B}, \Theta' - \{x_i\})$ esetet vizsgálnunk. A 4. segédtétel szerint van olyan $\mathfrak{C}$ prím-implikáns, amelyre

$$\varrho(\mathfrak{C}, \Theta'' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\}) = \uparrow.$$

Másrészt $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta' \cup \Theta'')$ érvényességéből következik, hogy igaz $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta')$ és $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta'')$ egyike. Ha az 5. segédtételt alkalmazzuk (esetleg úgy, hogy $\Theta''$ játssza $\Theta'$ és $\mathfrak{C}$ játssza $\mathfrak{B}$ szerepét), akkor $\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \uparrow$ adódik, ami ellentmondás.

7. SEGÉDTÉTEL. *Ha a 6. segédtétel első alternatívája igaz, akkor a*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) \rightarrow \varrho(\mathfrak{A}, \Theta' - \{x_i\}),$$
$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) \rightarrow \varrho(\mathfrak{A}, \Theta'' - \{x_i\})$$

*implikációk minden prím-implikánsra teljesülnek.*

*Bizonyítás.* A szimmetria következtében elég az első implikációt igazolni. Legyen $\mathfrak{B}$ olyan prím-implikáns, amelyre $\varrho(\mathfrak{B}, \Theta' - \{x_i\}) = \uparrow$. Ha volna olyan $\mathfrak{A}$ prím-implikáns, amelyre

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \uparrow \quad \text{és} \quad \varrho(\mathfrak{A}, \Theta' - \{x_i\}) = \downarrow$$

lennének érvényesek, akkor $\mathfrak{B}$-nek az alábbi rész-konjunkciója is prím-implikáns lenne:

$$\mathfrak{B}_{\Theta - \Theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\Theta'} = \mathfrak{B}_{\Theta - (\Theta' - \{x_i\})}$$

ami ellentmondás.

8. SEGÉDTÉTEL. *Ha a 6. segédtétel második alternatívája igaz, akkor bármely prím-implikánsra*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \Theta' - \{x_i\}) \quad \textit{és} \quad \varrho(\mathfrak{A}, \Theta'' - \{x_i\})$$

*közül legfeljebb az egyik teljesül.*

*Bizonyítás.* Ha $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta' - \{x_i\})$, $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta'' - \{x_i\})$ és $\varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\})$ volnának igazak alkalmas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ prím-implikánsokra, akkor a $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_{\Theta - \Theta'} \& \mathfrak{B}_{\Theta'}$ prím-implikánsra $\varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{C}, \Theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$ lenne érvényes, ami ellentmond a feltételnek.

7. TÉTEL.[11] *Legyenek $\Theta'$ és $\Theta''$ monoton-leválasztható részhalmazok az $f[\Theta]$ függvényre vonatkozóan. Álljon $\Theta'$ is, $\Theta''$ is legalább két elemből, legyen $\Theta' \cap \Theta'' = \{x_i\}$. Ekkor $\Theta' \cup \Theta''$, $\Theta' - \{x_i\}$, $\Theta'' - \{x_i\}$ és $(\Theta' \cup \Theta'') - \{x_i\}$ is monoton-leválasztható részhalmazok.*

*Bizonyítás.*

A) Először a $\Theta' - \{x_i\}$ halmazra igazoljuk az állítást. Legyenek $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ olyan prím-implikánsok, hogy $\mathfrak{A}_{\Theta'-\{x_i\}}$ sem üres, $\mathfrak{B}_{\Theta'-\{x_i\}}$ sem. Célunk azt megmutatni, hogy

$$\mathfrak{A}_{\Theta'-\{x_i\}} \,\&\, \mathfrak{B}_{(\Theta-\Theta')\cup\{x_i\}}$$

is prím-implikáns. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a 6. tétel konklúziójának melyik alternatívája teljesül.

1. eset. $\mathfrak{A}$ is, $\mathfrak{B}$ is tartalmazzák $x_i$-t. Ekkor

$$\mathfrak{A}_{\Theta'-\{x_i\}} \,\&\, \mathfrak{B}_{(\Theta-\Theta')\cup\{x_i\}} = \mathfrak{A}_{\Theta'-\{x_i\}} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'} \,\&\, \tilde{x}_i = \mathfrak{A}_{\Theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'}$$

valóban prím-implikáns. ($\tilde{x}_i$ itt aszerint jelenti $x_i$-t vagy $\bar{x}_i$-t, hogy $f$ növekvően vagy csökkenően függ-e $x_i$-től.)

2. eset. $\mathfrak{A}_{\{x_i\}}$ és $\mathfrak{B}_{\{x_i\}}$ üresek. Ekkor nyilván

$$\mathfrak{A}_{\Theta'-\{x_i\}} \,\&\, \mathfrak{B}_{(\Theta-\Theta')\cup\{x_i\}} = \mathfrak{A}_{\Theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'}.$$

B) A tételnek a $\Theta'' - \{x_i\}$ halmazra vonatkozó állítása az A) résszel szimmetrikus módon látható be.

C) Bizonyítani akarjuk, hogy $\Theta' \cup \Theta''$ monoton-leválasztható. Legyenek $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ olyan prím-implikánsok, hogy

$$\varrho(\mathfrak{A}, \Theta' \cup \Theta'') = \varrho(\mathfrak{B}, \Theta' \cup \Theta'') = \uparrow.$$

A $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta' \cup \Theta'')$ reláció írható a

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{A}, \Theta' - \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{A}, \Theta'' - \{x_i\})$$

alakban is. Öt esetre fogjuk tagolni a bizonyítást.

1. eset. A 6. tétel első alternatívája érvényes. Ekkor

$$\mathfrak{A}_{\Theta'\cup\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-(\Theta'\cup\Theta'')} = \mathfrak{A}_{\Theta''-\{x_i\}} \,\&\, (\mathfrak{A}_{\Theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'})_{(\Theta-\Theta'')\cup\{x_i\}}$$

valóban prím-implikáns.

A 2—5. esetek mindegyikében a 6. tétel második alternatíváját vesszük érvényesnek.

2. eset.

$$\varrho(\mathfrak{A}, \Theta' - \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \Theta'' - \{x_i\}) = \uparrow.$$

Ekkor

$$\mathfrak{A}_{\Theta'\cup\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-(\Theta'\cup\Theta'')} = \mathfrak{A}_{\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta''}.$$

3. eset.

$$\varrho(\mathfrak{A}, \Theta' - \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \Theta'' - \{x_i\}) = \uparrow.$$

[11] A 7. tételt általánosítani fogjuk a 10. tételben.

Ekkor — $\mathfrak{C}$-vel jelölve tetszőleges olyan prím-implikánst, amelyre $\varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\})=\uparrow$ —

$$\mathfrak{A}_{\Theta' \cup \Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-(\Theta' \cup \Theta'')} = \mathfrak{A}_{\Theta'} \,\&\, (\mathfrak{B}_{\Theta-\Theta''} \,\&\, \mathfrak{C}_{\Theta''})_{\Theta-\Theta'}.$$

A 4. és 5. esetek $\Theta'$ és $\Theta$ szerepének felcserélésével állnak elő a 2., ill. 3. esetekből. Könnyen látható, hogy a 2—5. esetek (az adott feltétel mellett) minden lehetőséget felölelnek.

D) Ki kell még mutatnunk $(\Theta' \cup \Theta'')-\{x_i\}$ monoton leválaszthatóságát, azaz azt, hogy

$$(*) \qquad \mathfrak{A}_{(\Theta' \cup \Theta'')-\{x_i\}} \,\&\, \mathfrak{B}_{(\Theta-(\Theta' \cup \Theta''))\cup\{x_i\}}$$

prím-implikáns, valahányszor

$$\varrho(\mathfrak{A}, \Theta'-\{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{A}, \Theta''-\{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \Theta'-\{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{B}, \Theta''-\{x_i\}) = \uparrow.$$

Valóban, a 6. tétel felhasználásával belátható, hogy a $(*)$ kifejezés mindig megegyezik az

$$\mathfrak{A}_{\Theta' \cup \Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-(\Theta' \cup \Theta'')}$$

konjunkcióval; tehát az igazolandó állítás helyességét már a C) részben beláttuk.

## 7. §.

Legyen $f(x_1, \ldots, x_n)$ első típusú függvény; legyenek $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ azok a változók, amelyektől $f$ monoton csökkenően függ ($i_1 < i_2 < \cdots < i_m$). Jelentse $f$ *kanonikus előállítása* az

$$f = (f^*;\; \bar{x}_{i_1} \Rightarrow x^{(1)},\; \bar{x}_{i_2} \Rightarrow x^{(2)}, \ldots,\; \bar{x}_{i_m} \Rightarrow x^{(m)})$$

szuperpozíció-előállítást. Az $f^*$ külső függvényt $f$ egyértelműen meghatározza, $f$ a második, harmadik vagy negyedik típusba tartozik.

Tekintsünk most egy második típusú $f$ függvényt. Ekkor igaz a

8. TÉTEL. *Az asszociáltság ekvivalencia-reláció $f$ változóinak halmazában. Ha egy ekvivalencia-osztály legalább két elemből áll, akkor az osztály monoton-leválasztható halmaz.*

*Bizonyítás.* Az asszociáltság ekvivalencia-jellegéhez azt kell csak belátnunk, hogy tranzitív reláció. Legyenek $x_1$ és $x_2$, valamint $x_2$ és $x_3$ asszociáltak egymással. Mivel $\{x_1, x_2\}$ és $\{x_2, x_3\}$ monoton-leválaszthatóak, a 7. tétel szerint $\{x_1, x_3\}$ is az, tehát $x_1$ és $x_3$ is asszociáltak.

A tétel második állítását indukcióval igazoljuk. Legyen $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ekvivalencia-osztály az asszociáltságra vonatkozóan; tételezzük fel, hogy $\{x_1, \ldots, x_l\}$ $(1 \leq l < k)$ monoton-leválasztható halmaz. Mivel $x_l$ és $x_{l+1}$ asszociáltak, $\{x_l, x_{l+1}\}$ is monoton-leválasztható halmaz, tehát a 7. tétel szerint $\{x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}\}$ is az.

A 8. tétel lehetőséget nyújt arra, hogy a második típusú függvényekre is bevezessük a kanonikus előállítás fogalmát. Legyenek $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \ldots, \Theta^{(m)}$ a legalább két elemű ekvivalencia-osztályok. Az

$$f = (f^*;\; f^{(1)} \Rightarrow x^{(1)}, \ldots,\; f^{(m)} \Rightarrow x^{(m)})$$

szuperpozíció-előállítást $f$ kanonikus előállításának nevezzük, ha $f^*$ monoton *növekvően* függ az $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ változóktól és $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ változó-halmazai rendre éppen $\Theta^{(1)}, \dots, \Theta^{(m)}$. A kanonikus felbontás egyértelműen meg van határozva, eltekintve $x^{(1)}$-nek, ..., $x^{(m)}$-nek mint $f^*$ változóinak permutációitól (és $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ megfelelő permutációitól).

## 8. §.

9. SEGÉDTÉTEL. *Második típusú függvény kanonikus előállításában minden belső függvény (két vagy több változójú) konjunkció vagy diszjunkció.*

*Bizonyítás.* Legyen $f^{(i)}[\Theta^{(i)}] = f^{(i)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_l})$ az $f[\Theta]$ második típusú függvény kanonikus előállításának egy belső függvénye. Az 1. tétel szerint $f^{(i)}$ prím-implikánsai pontosan a nem üres $\mathfrak{A}_{\Theta^{(i)}}$ elemi konjunkciók, ahol $\mathfrak{A}$ végigfut $f$ prím-implikánsain. Az $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ változók csak negálatlanul fordulhatnak elő $f^{(i)}$ prím-implikánsaiban, mivel $f$ monoton növekvően függ ezektől a változóktól, és $f^*$ is $x^{(i)}$-től. Célunk a következő állítást igazolni: ha $f$ valamely $\mathfrak{A}$ prím-implikánsa tartalmaz két különböző változót $\Theta^{(i)}$-ből, akkor tartalmazza $\Theta^{(i)}$ minden elemét. Tartalmazza $\mathfrak{A}$ az $x_{i_p}, x_{i_q}$ ($\in \Theta^{(i)}$) változókat, legyen $x_{i_r} \in \Theta^{(i)}$. Mivel mind $\{x_{i_p}, x_{i_q}\}$, mind $\{x_{i_p}, x_{i_r}\}$ monoton-leválaszthatóak $f$-re nézve, a 6. tétel alapján $x_{i_r}$ is fellép $\mathfrak{A}$-ban.

A 9. segédtétel lehetővé teszi a következő definíciót. A második típusú $f$ függvény $x_j$, $x_k$ asszociált változóit *konjunktívan asszociáltak*nak (ill. *diszjunktívan asszociáltak*nak) nevezzük, ha az az $f^{(i)}[\Theta^{(i)}]$ belső függvény, amelyre $x_j \in \Theta^{(i)}$ és $x_k \in \Theta^{(i)}$, konjunkció (ill. diszjunkció).

A következő segédtétel helyessége rögtön adódik a definíciókból és az 1. tételből.

10. SEGÉDTÉTEL. *Függjön $f$ monoton növekvően $x_i$-től és $x_j$-től. $x_i$ és $x_j$ akkor és csak akkor diszjunktívan asszociáltak, ha $f$ bármely prím-implikánsában $x_i$, $x_j$ legfeljebb egyike lép fel, és $x_i$, $x_j$ kicserélhetőek egymással $f$ prím-implikánsaiban. $x_i$ és $x_j$ akkor és csak akkor konjunktívan asszociáltak, ha $f$ bármely prím-implikánsa vagy mindkettőjüket tartalmazza, vagy egyiküket sem.*

11. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $f[\Theta]$ negyedik típusú függvény. Ha $x_i$ olyan változója $f$-nek, amelytől $f$ monoton növekvően függ, akkor $f$-nek*

a) *van olyan prím-implikánsa, amelyben $x_i$ fellép és amely két vagy több tagú konjunkció, és*

b) *van olyan prím-implikánsa, amely nem tartalmazza $x_i$-t.*

*Bizonyítás.* Ha a) hamis, akkor $x_i$ maga prím-implikáns, és nem fordulhat elő a többi prím-implikánsokban. Az utóbbiak diszjunkciója által előállított függvényt $g$-vel jelölve, $f$ felbontható $x_i \vee g[\Theta - \{x_i\}]$ alakban, tehát $\Theta - \{x_i\}$ monoton-leválasztható halmaz.

Ha pedig b) hamis, akkor $f = x_i \& h[\Theta - \{x_i\}]$, tehát $\Theta - \{x_i\}$ ekkor is monoton-leválasztható.

12. SEGÉDTÉTEL. *Legyenek $x^{(i)}$, $x^{(j)}$ diszjunktívan asszociált változói a második típusú $f^*$ függvénynek. Helyettesítsük $x^{(i)}$-t $f^{(i)}[\Theta^{(i)}]$-vel, $x^{(j)}$-t $f^{(j)}[\Theta^{(j)}]$-vel megengedve, hogy a két helyettesítés közül csak az egyikre kerül sor. Ekkor a következők igazak az előálló $f$ függvényre:*

a) *ha* $f^{(i)}$ *is*, $f^{(j)}$ *is diszjunkció, akkor a* $\Theta^{(i)} \cup \Theta^{(j)}$ *halmaz bármely két eleme diszjunktívan asszociált,*

b) *ha* $f^{(i)}, f^{(j)}$ *(legalább) egyike konjunkció vagy negyedik típusú függvény, akkor az* $x_{i_k}(\in \Theta^{(i)})$, $x_{j_l}(\in \Theta^{(j)})$ *párok egyike sem asszociált.*

*Bizonyítás.* a) azonnal következik az 1. tételből és a 10. segédtételből. Tegyük fel, hogy pl. $f^{(i)}$ konjunkció vagy negyedik típusú függvény; vizsgáljunk egy olyan elempárt, amilyen a b) állításban szerepel. Mivel $x^{(i)}$ és $x^{(j)}$ $f^*$ egy prím-implikánsában sem lépnek fel közösen, az 1. tétel szerint $f$ bármely $\mathfrak{A}$ prím-implikánsára $\mathfrak{A}_{\Theta^{(i)}}, \mathfrak{A}_{\Theta^{(j)}}$ egyike üres, $x_{i_k}$ és $x_{j_l}$ tehát nem lehetnek konjunktívan asszociáltak. További feladatunk azt kimutatni, hogy diszjunktívan asszociáltak sem lehetnek. $f^{(i)}$-nek van olyan $\mathfrak{B}$ prím-implikánsa, amely legalább kéttagú és tartalmazza $x_{i_k}$-t. Legyen $\mathfrak{C} \& x^{(i)}$ az $f^*$ függvénynek valamely $x^{(i)}$-t tartalmazó prím-implikánsa. $\mathfrak{C} \& \mathfrak{B}$ prím-implikánsa $f$-nek, s akkor ha $x_{i_k}$, $x_{j_l}$ diszjunktívan asszociáltak lennének, a 10. segédtétel szerint

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta^{(i)} - \{x_{i_k}\}} \,\&\, x_{j_l}$$

is prím-implikánsa volna $f$-nek, ellentmondásban azzal, hogy $\mathfrak{A}_{\Theta^{(i)}}$ és $\mathfrak{A}_{\Theta^{(j)}}$ egyikének üresnek kell lennie.

13. SEGÉDTÉTEL. *Legyenek* $x^{(i)}, x^{(j)}$ *konjunktívan asszociált változói a második típusú* $f^*$ *függvénynek. Helyettesítsük* $x^{(i)}$*-t* $f^{(i)}$*-vel,* $x^{(j)}$*-t* $f^{(j)}$*-vel (mint az előző segédtételben). Ekkor igazak a következők:*

a) *ha* $f^{(i)}$ *is*, $f^{(j)}$ *is konjunkció, akkor a* $\Theta^{(i)} \cup \Theta^{(j)}$ *halmaz bármely két eleme konjunktívan asszociált,*

b) *ha* $f^{(i)}, f^{(j)}$ *(legalább) egyike diszjunkció vagy negyedik típusú függvény, akkor az* $x_{i_k}(\in \Theta^{(i)})$, $x_{j_l}(\in \Theta^{(j)})$ *párok egyike sem asszociált.*

*Bizonyítás.* a) következik a 10. segédtételből. Legyen $f^{(i)}$ diszjunkció vagy negyedik típusú függvény. Mivel $x^{(i)}$ és $x^{(j)}$ együtt lépnek fel $f^*$ prím-implikánsaiban, $f$-nek valamely $\mathfrak{A}$ prím-implikánsára $\mathfrak{A}_{\Theta^{(i)}}$ és $\mathfrak{A}_{\Theta^{(j)}}$ vagy mindketten üresek, vagy egyikük sem. Tekintsünk egy megadott alakú változó-párt. $f^{(i)}$-nek van $x_{i_k}$-t nem tartalmazó $\mathfrak{E}$ prím-implikánsa. Ha $\mathfrak{B}$ olyan prím-implikánsa $f^{(j)}$-nek, amely tartalmazza $x_{j_l}$-t, akkor az 1. tétel miatt van $f$-nek olyan $\mathfrak{C}$ prím-implikánsa, hogy

$$\mathfrak{C}_{\Theta^{(i)} \cup \Theta^{(j)}} = \mathfrak{E} \,\&\, \mathfrak{B}.$$

$x_{i_k}$ és $x_{j_l}$ tehát konjunktívan nem lehetnek asszociáltak. Legyen most $\mathfrak{D}$ olyan prím-implikánsa $f^{(i)}$-nek, amely tartalmazza $x_{i_k}$-t. Mivel $f$ alkalmas $\mathfrak{A}$ prím-implikánsára

$$\mathfrak{A}_{\Theta^{(i)} \cup \Theta^{(j)}} = \mathfrak{D} \,\&\, \mathfrak{B},$$

$x_{i_k}$ és $x_{j_l}$ diszjunktívan asszociáltak sem lehetnek.

14. SEGÉDTÉTEL. *Tekintsük az f függvénynek egy egyszerű növekvő szuperpozíció-előállítását. Ha* $\Theta^*$ *olyan monoton-leválasztható részhalmaza* $\Theta$*-nak, amelynek* $\Theta'$ *valódi része, akkor* $(\Theta^* - \Theta') \cup \{x'\}$ *monoton-leválasztható* $f^*$*-ra nézve.*

*Bizonyítás.* Legyenek $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*$ olyan prím-implikánsai $f^*$-nak, hogy

$$\varrho(\mathfrak{A}^*, (\Theta^* - \Theta') \cup \{x'\}) = \varrho(\mathfrak{B}^*, (\Theta^* - \Theta') \cup \{x'\}) = \uparrow.$$

Az $f'$ függvény valamely $\mathfrak{C}$ prím-implikánsát kiválasztva, képezzük az $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ elemi konjunkciókat úgy $\mathfrak{A}^*$-ból, ill. $\mathfrak{B}^*$-ból, hogy $\mathfrak{C}$-t helyettesítjük $x'$ helyére. Az 1. tétel szerint $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ prím-implikánsai $f$-nek. Mivel $\varrho(\mathfrak{A}, \Theta^*)=\varrho(\mathfrak{B}, \Theta^*)=\uparrow$, $f$-nek $\mathfrak{A}_{\Theta^*}\&\mathfrak{B}_{\Theta-\Theta^*}$ is prím-implikánsa, ebből ugyancsak az 1. tétel segítségével adódik, hogy

$$(\mathfrak{A}_{\Theta^*} \& \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta^*})_{\Theta-\Theta'}[\& x'] = \mathfrak{A}^*_{(\Theta^*-\Theta')\cup\{x'\}} \& \mathfrak{B}^*_{\Theta-\Theta^*}$$

$f^*$-nek prím-implikánsa (a legutóbbi egyenlőség bal oldalán $x'$ pontosan akkor lép fel, ha $\mathfrak{A}^*$-ban előfordult).

## 9. §.

E szakasz fő célja a harmadik típusú függvények kanonikus felbontásának bevezetése. A vizsgálatokat a 6. és 7. tételek általánosításával kezdjük.

Legyenek $\Theta'$ és $\Theta''$ olyan monoton-leválasztható részhalmazok $f[\Theta]$-ra nézve, hogy $\Theta'\cap\Theta''$, $\Theta'-\Theta''$, $\Theta''-\Theta'$ egyike sem üres. Tekintsük azt az $f=(f^*; f'\Rightarrow x')$ egyszerű szuperpozíció-előállítást, amelyben $f'$ éppen $\Theta'\cap\Theta''$ elemeitől függ. Alkalmazzuk $f^*$-ra a 6. és 7. tételeket, úgy hogy $\Theta'$ és $\Theta''$ szerepét $(\Theta'-\Theta'')\cup\{x'\}$, ill. $(\Theta''-\Theta')\cup\{x'\}$ játsszák (ezek a 14. segédtétel miatt monoton-leválaszthatóak). Ha $f'$-nek $x'$-be való behelyettesítésével visszaállítjuk az $f$ függvényt, akkor a 6. és 7. tételek a következő állításokba mennek át (figyelembe véve az 1. és 5. tételeket is):

9. TÉTEL. *Legyenek $\Theta'$ és $\Theta''$ olyan monoton-leválasztható részhalmazok $f[\Theta]$-ra nézve, hogy $\Theta'\cap\Theta''$, $\Theta'-\Theta''$, $\Theta''-\Theta'$ egyike sem üres. Ekkor vagy igazak a*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \Theta'-\Theta'') = \varrho(\mathfrak{A}, \Theta'\cap\Theta'') = \varrho(\mathfrak{A}, \Theta''-\Theta')$$

*egyenlőségek $f$ minden prím-implikánsára, vagy pedig $f$ bármely prím-implikánsára a*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \Theta'-\Theta''), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \Theta'\cap\Theta''), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \Theta''-\Theta')$$

*relációk legfeljebb egyike igaz.*

10. TÉTEL. *Teljesüljön $\Theta'$-re és $\Theta''$-re a 9. tétel feltétele. Ekkor $\Theta'\cup\Theta''$, $\Theta'-\Theta''$, $\Theta''-\Theta'$ és $(\Theta'-\Theta'')\cup(\Theta''-\Theta')$ monoton-leválaszthatóak.*

Legyen $f[\Theta]$ harmadik típusú függvény. $\Theta$-nak egy legalább két elemű, monoton-leválasztható $\Theta^*$ részhalmazát *kanonikus részhalmaz*nak fogjuk nevezni ($f$-re nézve), ha minden olyan esetben, mikor $x_i\in\Theta^{**}\subseteq\Theta^*$, ahol $\Theta^{**}$ monoton-leválasztható, igaz a

$$\Theta^{**}=\{x_i\} \quad \text{és} \quad \Theta^{**}=\Theta^*$$

egyenlőségek valamelyike.

11. TÉTEL. *$\Theta$-nak ($f$-re vonatkozó) kanonikus részhalmazai páronként idegenek.*

*Bizonyítás.* Legyenek $\Theta'$ és $\Theta''$ kanonikus részhalmazok. $\Theta'\subset\Theta''$ vagy $\Theta''\subset\Theta'$ a definíció miatt lehetetlen. A tétel helyességéhez azt kell belátnunk, hogy $\Theta'\cap\Theta''$, $\Theta'-\Theta''$ és $\Theta''-\Theta'$ legalább egyike üres. Tegyük fel az ellenkezőt. A kanonikus részhalmazok értelmezése miatt e három halmaz mindegyike egyelemű; jelöljük ezeket az elemeket rendre $x_i$-vel, $x_j$-vel, $x_k$-val. Ekkor $\Theta'=\{x_i, x_j\}$ és $\Theta''=\{x_j, x_k\}$. Azt kaptuk, hogy $\Theta$-ban vannak asszociált változó-párok, holott $f$-et harmadik típusúnak feltételeztük.

Az így bebizonyított 11. tétel lehetőséget ad az alábbi definícióra. A harmadik típusú $f[\Theta]$ függvény *kanonikus előállítás*át úgy értelmezzük, mint azt az

$$f = (f^*;\ f^{(1)} \Rightarrow x^{(1)}, \ldots, f^{(m)} \Rightarrow x^{(m)})$$

egyszeres szuperpozíció-előállítást, amelyben $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ változó-halmazai éppen a kanonikus részhalmazok, és $f^*$ monoton *növekvően* függ $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ mindegyikétől. E kanonikus előállítás ugyanolyan értelemben egyértelmű, mint a második típusú függvények kanonikus előállítása.

## 10. §.

Könnyű belátni, hogy ha egy egyszeres ismétlés nélküli szuperpozíció-előállítás az első típusú $f$ függvényt állítja elő, úgy ez az előállítás abban és csak abban az esetben a kanonikus előállítása $f$-nek, amikor $f^*$ nem első típusú függvény, és a belső függvények mindegyike egy olyan változó negációja, amelytől $f^*$ monoton növekvően függ. A következő két tételben a második és harmadik típusú függvények kanonikus előállításait fogjuk hasonló értelemben jellemezni.

Először induktív módon értelmezzük az *általánosított kanonikus* halmazokat a második és harmadik típusú függvényekre. Harmadik típusú függvény kanonikus részhalmazát általánosítottan kanonikusnak is tekintjük. Ha $f[\Theta]$ második típusú függvény, $\Theta^* \subset \Theta$, $\Theta^*$ elemei $f^*$-nak is változói, továbbá $\Theta^*$ általánosított kanonikus részhalmaz $f^*$-ra vonatkozóan, akkor $\Theta^*$ általánosított kanonikus részhalmaz $f$-re nézve is.

12. TÉTEL. *Az*

$$(*) \qquad f = (f^*;\ f^{(1)} \Rightarrow x^{(1)}, \ldots, f^{(m)} \Rightarrow x^{(m)})$$

*előállítás akkor és csak akkor kanonikus előállítása a második típusú $f$ függvénynek, ha a következő α)—δ) feltételek teljesülnek:*

α) *$f^*$ nem első típusú;*

β) *$f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ mindegyike (két vagy több változójú) konjunkció vagy diszjunkció;*

γ) *amennyiben ($f^*$ második típusú és) $f^*$ bizonyos változói éppen diszjunktív-asszociált változók egy teljes osztályát alkotják, és e változók számát $l$-lel jelöljük, úgy közülük legalább $(l-1)$-et $(*)$-ban konjunkcióval helyettesítünk,*

δ) *amennyiben $f^*$ bizonyos ($l$ számú) változói teljes konjunktív-asszociáltsági osztályt alkotnak, úgy közülük legalább $(l-1)$-et $(*)$-ban diszjunkcióval helyettesítünk.*

*Bizonyítás.* Tekintsük $f$ kanonikus előállítását. α) nyilvánvalóan teljesül, β) a 9. segédtétel alapján igaz. γ)-t indirekt úton fogjuk bizonyítani. Ha γ) hamis, akkor van két olyan diszjunktívan asszociált változója $f^*$-nak, hogy ezek mindegyike vagy $f$-nek is változója lesz, vagy diszjunkcióval lesz helyettesítve. Tekintsük $f$ ezeknek megfelelő változóit; $f$ szóban forgó változói a 12. segédtétel szerint páronként diszjunktívan asszociáltak. Ekkor azonban $f^*$ egyetlen változójának kellene megfelelniök a kanonikus felbontásban. — δ) analóg módon igazolható a 13. segédtétel felhasználásával.

Megfordítva, tegyük fel, hogy α), β), γ), δ) teljesülnek a $(*)$ előállításra. α)-ból és β)-ból következik, hogy $f$ második típusú, γ)-ból és δ)-ból pedig az (figyelembe véve a 12., 13. segédtételeket), hogy az $f^{(i)}$ belső függvények változó-halmazai éppen az asszociáltság szerinti (egynél több elemű) ekvivalencia-osztályok.

13. TÉTEL. *A* $(*)$ *előállítás akkor és csak akkor kanonikus előállítása a harmadik típusú* $f$ *függvénynek, ha a következő* $\alpha$)—$\delta$) *feltételek teljesülnek:*

$\alpha$) $f^*$ *nem első típusú;*

$\beta$) *mindegyik* $f^{(i)}$ *negyedik típusú;*

$\gamma$) *amennyiben* $f^*$ *némely változói általánosított kanonikus részhalmazt alkotnak, úgy közülük legalább egyet helyettesítünk;*

$\delta$) *amennyiben* $f^*$ *némely (l számú) változói teljes asszociáltsági osztályt alkotnak, úgy közülük legalább* $(l-1)$*-et helyettesítünk.*

*Bizonyítás.* Ha $(*)$ a kanonikus előállítása $f$-nek, akkor $\alpha$) nyilvánvalóan, $\beta$) az 5. tétel miatt teljesül. Tételezzük fel, hogy $\gamma$) nem érvényes. Ekkor van $f^*$ változóinak olyan általánosított kanonikus halmaza, hogy e halmaz elemeinek egyikét sem helyettesítjük. A halmaz elemei $f$-re vonatkozóan kanonikus részhalmazt képeznek, ami ellentmondás. — $\delta$) (szintén indirekt módon) könnyen igazolható: ha hamis lenne, úgy volna $f$-nek asszociált változó-párja.

Megfordítva, teljesüljenek az $\alpha$), $\beta$), $\gamma$), $\delta$) feltételek. $\alpha$) és $\beta$) alapján $f$ nem tartozik az első típusba. A 12. és 13. segédtételek segítségével $\delta$)-ból az következik, hogy $f$-nek nem lehet asszociált változó-párja, tehát $f$ harmadik típusú. Az, hogy a belső függvények változó-halmazai a kanonikus halmazok, az 5. tételt figyelembe véve adódik $\beta$)-ból és $\gamma$)-ból.

## 11. §.

Legyen $f[\Theta]$ második vagy harmadik típusú függvény. Induktív módon definiálni fogjuk a konjunktív és diszjunktív asszociáltságot $\Theta$ részhalmazaiból álló párokra.

Ha $x_i$ és $x_k$ konjunktívan asszociált változók $f$-re nézve, akkor az $\{x_i\}$, $\{x_k\}$ halmazok is konjunktívan asszociáltak. Tekintsük egy $f$ függvény kanonikus előállítását; legyenek a $\Theta^*$, $\Theta^{**}$ halmazok konjunktívan asszociáltak az $f^*$ külső függvényre vonatkozóan. Jelöljük $\Theta^+$-tel, ill. $\Theta^{++}$-tel $f$ mindazon változóinak halmazát, amelyek $\Theta^*$, ill. $\Theta^{**}$ elemeinek felelnek meg. Ekkor $\Theta^*$-ot és $\Theta^{**}$-ot egymással konjunktívan asszociált halmazoknak nevezzük $f$-re vonatkozóan.

Ha $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \ldots, \Theta^{(l)}$ $(l \geqq 2)$ páronként (idegen és) konjunktívan asszociált halmazok $f$-re nézve, akkor azt is mondjuk, hogy igaz a

$$\sigma_k^f(\Theta^{(1)}, \ \Theta^{(2)} \cup \ldots \cup \Theta^{(l)})$$

reláció.

A részhalmazok diszjunktív asszociáltságának fogalmát és a $\sigma_d^f$ relációt analóg módon értelmezhetjük.

14. TÉTEL. *Tekintsük az* $f[\Theta]$ *függvénynek egy egyszerű ismétlés nélküli szuperpozíció-előállítását, amelyben* $f'$ *vagy negyedik típusú, vagy konjunkció, vagy diszjunkció. Legyen* $\Theta^*$ *olyan részhalmaza* $\Theta$*-nak, amelyre* $\Theta^* - \Theta' \neq \emptyset$ *és* $\Theta^* \cap \Theta' \neq \emptyset$. $\Theta^*$ *akkor és csak akkor monoton-leválasztható* $f$*-re vonatkozóan, ha* $(\Theta^* - \Theta') \cup \{x'\}$

*monoton-leválasztható $f^*$-re nézve, továbbá teljesül a következő három állítás valamelyike:*

A) $\Theta^* \supset \Theta'$;

B) $\sigma_k^{f^*}(\{x'\}, \Theta^* - \Theta') = \uparrow$ *és* $f'$ *konjunkció;*

C) $\sigma_d^{f^*}(\{x'\}, \Theta^* - \Theta') = \uparrow$ *és* $f'$ *diszjunkció.*

*Bizonyítás.* Könnyen kimutatható, hogy $(\Theta^* - \Theta') \cup \{x'\}$ monoton-leválaszthatósága szükséges feltétel. Ezt $\Theta^* \supset \Theta'$ esetén már a 14. segédtétel kimondta; az ellenkező esetben a 10. tétel szerint $\Theta^* \cup \Theta'$ monoton-leválasztható $f$-re nézve, s így ugyancsak alkalmazható a 14. segédtétel.

Be akarjuk látni, hogy az is szükséges $\Theta^*$ monoton-leválaszthatóságához, hogy A), B), C) egyike teljesüljön. Legyen $\Theta^*$ monoton-leválasztható és $\Theta' - \Theta^* \neq \emptyset$. Legközelebbi célunk azt igazolni, hogy $f'$ nem negyedik típusú. $\Theta^* \cap \Theta'$ és $\Theta' - \Theta^*$ monoton-leválaszthatóak $f$-re nézve (10. tétel), tehát $f'$-re nézve is (5. tétel). Ha $f'$ negyedik típusú volna, úgy ez a két halmaz egy-egy $x_i$, $x_j$ elemből állna, tehát $f = x_i \& x_j$ vagy $f = x_i \vee x_j$ volna igaz, ami azonban ellentmondás.

A feltételek szükségessége csupán abban az esetben lehet hamis, ha létezik a következő szerkezetű ellenpélda:

$$f[\Theta] = (f^*;\, f'[\Theta'] \Rightarrow x'),$$

ahol $f'$ konjunkció (ill. diszjunkció), továbbá $\Theta^*$ olyan monoton-leválasztható halmaz $f$-re nézve, hogy $\Theta^* \cup \Theta'$, $\Theta^* - \Theta'$, $\Theta' - \Theta^*$ egyike sem üres és

$$\sigma_k^{f^*}(\{x'\}, \Theta^* - \Theta') = \downarrow, \quad (\text{ill. } \sigma_d^{f^*}(\{x'\}, \Theta^* - \Theta') = \downarrow).$$

Az ellenpéldát választhatjuk úgy, hogy $f$ változóinak száma minimális legyen. Ebből az következik, hogy $\Theta^* - \Theta'$, $\Theta^* \cap \Theta'$, $\Theta' - \Theta^*$ rendre egyetlen $x_i$, $x_j$, $x_k$ elemből állnak (ugyanis az ellenkező esetben $f$-nek az az egyszeres előállítása, amelyben éppen ettől a három halmaztól függnek a belső függvények, még kevesebb változójú ellenpéldát szolgáltatna). A 6. tétel alapján $x_i$, $x_j$, $x_k$ páronként konjunktívan (ill. diszjunktívan) asszociáltak, ami ellentmondás.

Megfordítva, legyen $(\Theta^* - \Theta') \cup \{x'\}$ monoton-leválasztható $f^*$-ra nézve, továbbá

$$f^{**}[(\Theta - (\Theta^* \cup \Theta')) \cup \{x'\}] \quad \text{és} \quad f''[(\Theta^* - \Theta') \cup \{x'\}]$$

olyan függvények, hogy

$$f^* = (f^{**};\, f'' \Rightarrow x'')$$

igaz. Ekkor az

$$f = ((f^{**};\, f'' \Rightarrow x'');\, f' \Rightarrow x')$$

függvény előállítható az

$$(f^{**};\, (f'';\, f' \Rightarrow x') \Rightarrow x'') = (f^{**};\, g[\Theta^* \cup \Theta'] \Rightarrow x'')$$

alakban is. Ha A) teljesül, úgy $g$ éppen $\Theta^*$ elemeitől függ.

Tételezzük most fel, hogy B) teljesül, A) nem. Ekkor ki kell mutatnunk, hogy $\Theta^*$ monoton-leválasztható a $g = (f''; f' \Rightarrow x')$ függvényre nézve. Mivel

$$\sigma_k^{f^*}(\{x'\}, \Theta^* - \Theta') = \uparrow,$$

$f^*$ minden prím-implikánsára igaz a

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x'\}) = \varrho(\mathfrak{A}, \Theta^* - \Theta')$$

egyenlőség (1. tétel). Ennélfogva $x'$ fellép $f''$ minden prím-implikánsában, és $\Theta'$ összes elemei (negálatlanul) fellépnek $g$ minden prím-implikánsában. Tehát

$$\mathfrak{A}_{\Theta^*} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta^*} = \mathfrak{A}$$

$g$ bármely két $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ prím-implikánsára igaz.

Amennyiben C) teljesül (de A) nem), úgy a gondolatmenet hasonló. $\sigma_d^{f^*}(\{x'\}, \Theta^*-\Theta')=\uparrow$ miatt $x'$ prím-implikánsa $f''$-nek, $\Theta'$ valamennyi eleme egy-egy prím-implikánsa $g$-nek, tehát $g$ előállítható $h_1[\Theta^*] \vee h_2[\Theta'-\Theta'']$ alakban.

## 12. §.

A dolgozat második fejezetének utolsó tétele általános (nem feltétlenül monoton) ismétlés nélküli szuperpozíciókra vonatkozik, és olyan jellegű állítás, hogy egy nyilvánvaló összefüggés megfordítását mondja ki.

15. TÉTEL. *Tekintsük az $f$ függvénynek egy egyszerű*

$$(f^*;\, f'[\Theta'] \Rightarrow x')$$

*szuperpozíció-előállítását. Ha $f$ monoton módon függ a $\Theta'$ halmazban levő $x_i$ változótól, akkor mind $f^*$ $x'$-nek, mind $f'$ $x_i$-nek monoton függvénye.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy a tétel nem érvényes.

1. eset. $f'$ nem monoton függvénye $x_i$-nek. $f^*$-nak van $x'$-t tartalmazó prím-implikánsa; nem lényeges megszorítás ezt a prím-implikánst $\mathfrak{C}\&x'$ alakban (tehát negálatlan $x'$-vel) felvennünk. Az $f'$ függvénynek vannak $\mathfrak{A}\&x_i$ és $\mathfrak{B}\&\bar{x}_i$ alakú prím-implikánsai. Az 1. tétel szerint $\mathfrak{C}\&\mathfrak{A}\&x_i$ is, $\mathfrak{C}\&\mathfrak{B}\&\bar{x}_i$ is prím-implikánsai $f$-nek, $f$ tehát nem-monoton módon függ $x_i$-től.

2. eset. $f'$ monoton függvénye $x_i$-nek és $f^*$ nem-monoton függvénye $x'$-nek. Ekkor $\bar{f}'$ is monoton módon függ $x_i$-től, mégpedig $f'$, $\bar{f}'$ egyike növekvően, másika csökkenően. $f^*$-nek vannak $\mathfrak{A}\&x'$, $\mathfrak{B}\&\bar{x}'$ alakú prím-implikánsai; $f'$-nek, ill. $\bar{f}'$-nek pedig egy-egy $\mathfrak{C}\&\tilde{x}_i$, ill. $\mathfrak{D}\&\bar{\tilde{x}}_i$ alakú prím-implikánsa. ($\tilde{x}_i$ itt vagy magát $x_i$-t, vagy negációját jelöli, aszerint, hogy $f'$ növekvően vagy csökkenően függ-e $x_i$-től.) Az 1. tétel szerint $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C}\&\tilde{x}_i$ is, $\mathfrak{B}\&\mathfrak{D}\&\bar{\tilde{x}}_i$ is prím-implikánsai $f$-nek.

1. következmény. *Legyen $f[\Theta]$ monoton függvénye valamennyi változójának. $\Theta$ egy $\Theta'$ részhalmaza akkor és csak akkor leválasztható, ha monoton-leválasztható halmaz ($f$-re nézve).*

# III. fejezet. A kétpólusú gráfok kvázi-soros felbontása

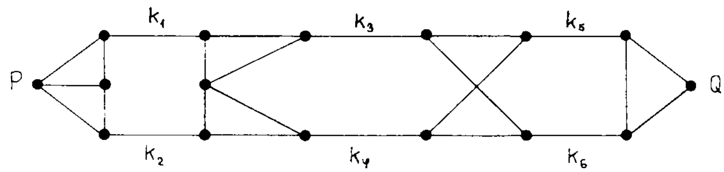
## 13. §.

Legyenek $\mathfrak{G}_1$ és $\mathfrak{G}_2$ (egymástól idegen) felbonthatatlan kétpólusú gráfok. Jelöljük pólusaikat $P_1$-gyel és $Q_1$-gyel, illetve $P_2$-vel és $Q_2$-vel. Tételezzük fel, hogy $\mathfrak{G}_1$-nek $Q_1$ végpontjához pontosan két él illeszkedik: $k_1(A_1Q_1)$ és $k'_1(A'_1Q_1)$, továbbá, hogy

$\mathfrak{G}_2$-nek $P_2$ kezdőpontjához is pontosan kettő: $k_2(P_2A_2)$ és $k_2'(P_2A_2')$. Képezzünk egy újabb $\mathfrak{G}$ gráfot a következő módon. $\mathfrak{G}$ pontjai legyenek $\mathfrak{G}_1$ és $\mathfrak{G}_2$ összes pontjai, kivéve $Q_1$-et és $P_2$-t. $\mathfrak{G}_1$ kezdő és belső élei, továbbá $\mathfrak{G}_2$ belső és végső élei legyenek $\mathfrak{G}$-nek is élei. Ezeken kívül vegyünk még fel $\mathfrak{G}$-ben két élt: $k$-t az $A_1$ és $A_2$ pontok között, $k'$-t az $A_1'$ és $A_2'$ pontok között. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{G}$ *kvázi-soros kapcsolás*sal állt elő a $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ gráfokból. A kvázi-soros kapcsolás nyilván kétféle módon végezhető el; a kapott gráfok általában nem izomorfak. Mivel $\mathfrak{G}_1$ és $\mathfrak{G}_2$ felbonthatatlanok voltak, $\mathfrak{G}$ is felbonthatatlan.

E § további részében a fenti összekapcsolási mód megfordításának tekinthető felbontási eljárást fogjuk elemezni. Legyen $\mathfrak{G}$ egy felbonthatatlan kétpólusú gráf. Ha $k_1$ és $k_2$ olyan belső élek $\mathfrak{G}$-ben, hogy $\mathfrak{G}$ bármely pályája tartalmazza $k_1, k_2$ (legalább) egyikét, akkor azt mondjuk, hogy $k_1$ és $k_2$ *szétválasztó él-pár*at képeznek $\mathfrak{G}$-ben. Az 1. ábra gráfja három szétválasztó él-párat tartalmaz: $(k_1, k_2)$-t, $(k_3, k_4)$-et és $(k_5, k_6)$-ot.

Ha $\mathfrak{G}$-ben töröljük a $(k_1, k_2)$ szétválasztó párat, akkor $\mathfrak{G}$ úgy esik szét két összefüggő komponensre, hogy $P$, $Q$ különböző komponensekben vannak. Ebből következik, hogy $\mathfrak{G}$ bármely pályájában $k_1, k_2$ *pontosan* egyike lép fel.




1. ábra

15. SEGÉDTÉTEL. *Ha a $\mathfrak{G}$ felbonthatatlan gráfban $(k_1, k_2)$ is, $(k_1, k_3)$ is szétválasztó él-pár, akkor $k_2 = k_3$.*

*Bizonyítás.* Tekintsük azokat a $\mathfrak{G}_P, \mathfrak{G}_Q$ összefüggő komponenseket, amelyek $k_1, k_2$ törlésével adódnak. Ha $k_2 \neq k_3$, akkor feltételezhetjük, hogy $k_3$ $\mathfrak{G}_Q$-ban van. Jelöljük $\mathfrak{G}_P'$-vel és $\mathfrak{G}_Q'$-val a $k_1, k_3$ törlésekor előálló összefüggő komponenseket. Azok az élek, amelyek $\mathfrak{G}_Q$-ben is, $\mathfrak{G}_P'$-ben is benne vannak, továbbá $k_2$ és $k_3$ (egynél több élű) kétpólusú részgráfot határoznak meg, ami ellentmondás.

16. SEGÉDTÉTEL. *Legyenek $(k_1, k_2)$ és $(k_3, k_4)$ különböző szétválasztó párok a $\mathfrak{G}$ felbonthatatlan gráfban. Tekintsük a $k_1, k_2$ törlésekor keletkező $\mathfrak{G}_P, \mathfrak{G}_Q$ összefüggő komponenseket. $k_3$ és $k_4$ ugyanabban a komponensben vannak.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy a segédtétel hamis. Ha csupán $k_2$-t töröljük, úgy erősen összefüggő gráfot kapunk (IV. tétel). Ebben a gráfban a $k_1$ él soros komponens. $k_3, k_4$ egyike olyan soros komponensben van, amely megelőzi $k_1$-et; a másik pedig valamely $k_1$-et követő komponensben. Így azt az ellentmondást kapjuk, hogy van olyan pálya, amely $k_3$-on is, $k_4$-en is átmegy.

A 15., 16. segédtételek lehetővé teszik egy természetes megelőzési reláció bevezetését a $\mathfrak{G}$ felbonthatatlan gráf szétválasztó él-párjának halmazában. Legyenek $(k_1, k_2)$, $(k_3, k_4)$, ..., $(k_{2t-1}, k_{2t})$ $\mathfrak{G}$ (összes) szétválasztó párjai, e természetes megelőzés sorrendjében. Értelmezni akarjuk $\mathfrak{G}$ *kvázi-soros komponens*eit. Az $s$-ik komponens (ahol $2 \leqq s \leqq t$) értelmezésében jelöljék $\mathfrak{G}_P$ és $\mathfrak{G}_Q$ a $(k_{2s-3}, k_{2s-2})$ pár törlésével előálló összefüggő részeket és $\mathfrak{G}'_P, \mathfrak{G}'_Q$ a $(k_{2s-1}, k_{2s})$ pár törlésével előállóakat. Az $s$-ik kvázi-soros komponenst a következő módon definiáljuk: élei legyenek $\mathfrak{G}_Q$ és $\mathfrak{G}'_P$ közös élei és $k_{2s-3}, k_{2s-2}, k_{2s-1}, k_{2s}$, pontjai pedig $\mathfrak{G}_Q$ és $\mathfrak{G}'_P$ közös pontjai, valamint az újonnan felvett $P_s$, $Q_s$ pontok. A $\mathfrak{G}$-ből átvett pontok megőrzik a $\mathfrak{G}$-beli illeszkedési relációt, $P_s$ a $k_{2s-3}$, $k_{2s-2}$ élekhez illeszkedik, $Q$ pedig $k_{2s-1}$-hez és $k_{2s}$-hez. — Az első és $(t+1)$-ik kvázi-soros komponenseket a fenti eljárás célszerű módosításával (egyszerűsítésével) értelmezzük: itt csak egy új pont ($Q_1$, illetve $P_{t+1}$) bevezetésére van szükség.

## 14. §.

17. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\mathfrak{G}$ felbonthatatlan gráf. $\mathfrak{G}$ tetszőleges $A$ belső pontjához van egy olyan $b(PA)$ út, amely átmegy $Q$-n.*

*Bizonyítás.* Legyenek $c_1$, $c_2$ egymástól idegen pályák, $B$ pedig $c_1$ egy belső pontja. Vegyünk fel a gráfban egy $d(AB)$ belső utat, jelölje $C$ az első olyan pontot $d$-n, amely pontja $c_1$, $c_2$ egyikének is. Ekkor a következő két út egyike létezik és eleget tesz az állításnak:

$$c_1 \cdot c_2^{-1}[QC] \cdot d^{-1}[CA], \quad c_2 \cdot c_1^{-1}[QC] \cdot d^{-1}[CA].$$

18. SEGÉDTÉTEL. *Alkossanak $k_1$, $k_2$ szétválasztó párat a $\mathfrak{G}$ felbonthatatlan gráfban. Legyen $A(\neq P)$ a $k_1$, $k_2$ által szétválasztott részek közül $\mathfrak{G}_P$-nek valamely pontja. Ekkor van olyan $f(PA)$ út a gráfban, hogy $f$ tartalmazza mind $k_1$-et, mind $k_2$-t, és nem megy át $Q$-n.*

*Bizonyítás.* Alakítsuk át $\mathfrak{G}_P$-t egy pillanatra kétpólusú gráffá azáltal, hogy azonosítjuk egymással $k_1$ és $k_2$ $\mathfrak{G}_Q$ felé eső végpontjait. Alkalmazzuk a 17. segédtételt. A kapott $b$ út két (egymással össze nem függő) $b_1$, $b_2$ úttá esik szét, ha visszaállítjuk az eredeti $\mathfrak{G}_P$ gráfot. $k_1$-nek és $k_2$-nek $\mathfrak{G}_Q$-ba eső végpontjai ($\mathfrak{G}$ felbonthatatlansága miatt) összeköthetőek $\mathfrak{G}_Q$-ban olyan $c$ úttal, amely nem tartalmazza $Q$-t. $b_1 c b_2^{-1}$ eleget tesz a konklúziónak.

19. SEGÉDTÉTEL. *Legyenek $k_1$ és $k_2$ végső élek a $\mathfrak{G}$ felbonthatatlan gráfban. Vannak olyan egymástól idegen $b_1$, $b_2$ pályák, hogy $b_1$-nek $k_1$, $b_2$-nek $k_2$ a végső éle.*

*Bizonyítás.* Töröljük a $k_1$-től, $k_2$-től különböző végső éleket. Az előálló gráf (sorosan-párhuzamosan) széttagolhatatlan és (a III. tétel szerint) erősen összefüggő, tehát van két egymástól idegen pályája.

20. SEGÉDTÉTEL. *Tegyük fel, hogy $k_1$ és $k_2$ szélső vagy szétválasztó párat képeznek a $\mathfrak{G}$ felbonthatatlan gráfban. Legyen $A$ belső pont. Ekkor $\mathfrak{G}$-nek van olyan $R$ pólusa, hogy egy alkalmas $b(RA)$ útban $k_1$ is, $k_2$ is fellép.*

*Bizonyítás.* Ha $k_1$, $k_2$ szétválasztó pár, akkor a 18. segédtétel szerint igaz az állítás. — Alkossanak $k_1$ és $k_2$ végső párat, tekintsük a 19. segédtételben szereplő $b_1$, $b_2$ pályákat. $B$-vel jelölve $b_1$ egy belső pontját, a 17. segédtétel gondolatmenete teljessé teszi a bizonyítást. — Ha $k_1$, $k_2$ kezdő él-pár, az előzővel analóg eljárást alkalmazhatunk.

21. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $k(AB)$ belső él a $\mathfrak{G}$ széttagolhatatlan gráfban. Tételezzük fel, hogy $\mathfrak{G}$-nak nincs olyan $\mathfrak{G}^*$ valódi kétpólusú részgráfja, hogy $\mathfrak{G}^*$ tartalmazná $k$-t és $Q$ pólusa volna $\mathfrak{G}^*$-nak. Ekkor van $\mathfrak{G}$-ben olyan $b(PA)$ út, amely sem $B$-t, sem $Q$-t nem tartalmazza.*

*Bizonyítás.* Felbonthatatlan gráfra az állítás rögtön következik az V. tételből (a $B$-hez illeszkedő élek törlésével), az összes széttagolható gráfokra pedig indukcióval terjeszthető ki érvényessége.

22. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\mathfrak{G}$ széttagolhatatlan vagy sorosan széttagolható gráf; $A$ belső pont, $k$ tetszőleges él $\mathfrak{G}$-ben. Ekkor $\mathfrak{G}$-nek van olyan $R$ pólusa, hogy alkalmas $b(RA)$ út tartalmazza $k$-t, de $\mathfrak{G}$ másik pólusát nem.*

*Bizonyítás.* Legyen $c$ a $k$ élen átmenő pálya. $C$ belső pontja $c$-nek, és $d(AC)$ belső út $\mathfrak{G}$-ben. Jelöljük $B$-vel $d$ első olyan pontját, amely $c$-n is rajta van. Léteznek a

$$c[PB]\cdot d^{-1}[BA] \quad \text{és} \quad c^{-1}[QB]\cdot d^{-1}[BA]$$

utak, egyikük tartalmazza $k$-t.

23. SEGÉDTÉTEL. *Alkossanak a $k_1$ és $k_2(AB)$ élek szélső vagy szétválasztó párat a $\mathfrak{G}$ felbonthatatlan gráfban. Ekkor van $\mathfrak{G}$-nek olyan $R$ pólusa, hogy alkalmas $b(AR)$ út tartalmazza $k_1$-et, de $k_2$-t nem.*

*Bizonyítás.* Ha $A$ pólus, akkor a $k_1$-et tartalmazó utak bármelyike eleget tesz az állításnak. — Ha $B$ pólus, akkor

$$b=a^{-1}(AC)\cdot k_1^{-1}(CB)$$

kívánt tulajdonságú út ($a$ tetszőleges belső út $\mathfrak{G}$-ben). — Ha $k_1$, $k_2$ szétválasztó párat képeznek, jelöljük $\mathfrak{G}_A$-val azt a szétválasztott részt, amely tartalmazza $A$-t, $C$-vel $k_1$-nek $\mathfrak{G}_A$-ban fekvő végpontját, $f$-fel valamely $k_1$-et tartalmazó pályát. Van $\mathfrak{G}_A$-ban egy $d(AC)$ alakú út. A $b=d[AD]\cdot f[DR]$ út eleget tesz a tételnek (ahol $D$ $d$ első olyan pontja, amely $f$-en rajta van, és $R$ az a pólusa $\mathfrak{G}$-nek, amelyik nincs $\mathfrak{G}_A$-ban).

24. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\mathfrak{G}$ széttagolhatatlan gráf, $A$ belső pont, $k$ tetszőleges él $\mathfrak{G}$-ben. Ekkor van olyan $b(PA)$ út, amely tartalmazza $k$-t.*[12]

*Bizonyítás.*[13] Vezessünk be egy újabb $k'$ élt a $P$ és $A$ pontok között. Jelöljük $\mathfrak{G}^+$-tel az így előálló gráfot. Ismeretes, hogy az a reláció, amely akkor igaz két élre, ha kiegészíthetőek körré, reflexív, szimmetrikus és tranzitív. E reláció $\mathfrak{G}^+$ valamennyi élpárjára igaz, mivel az ellenkező esetben $\mathfrak{G}^+$ előállna két olyan részgráfjának egyesítéseként, amelyek metszete csupán egyetlen pont, ekkor azonban $\mathfrak{G}$ vagy nem volna erősen összefüggő, vagy sorosan széttagolható lenne. Tekintsünk $\mathfrak{G}^+$-ben egy kört, amely $k$-t is, $k'$-t is tartalmazza. Ha $k'$-t kihagyjuk, a kívánt tulajdonságú út adódik.

25. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\mathfrak{G}$ olyan széttagolhatatlan gráf, amelynek legalább három végső éle van. Legyen $k_1$ és $k_2(BQ)$ két végső él $\mathfrak{G}$-ben: tegyük fel, hogy $B$ belső*

[12] Nem zárjuk ki azt a lehetőséget, hogy $b$ átmenjen $Q$-n.

[13] A 24. segédtételre a szerzőnek csak hosszadalmas bizonyítást sikerült találnia. A jelen igazolás Gallai Tibor professzortól származik.

*pontja* $\mathfrak{G}$ *valamennyi kétpólusú részgráfjának. Ekkor van olyan* $a(PB)$ *út* $\mathfrak{G}$*-ben, hogy* $a$ *tartalmazza* $k_1$*-et, de nem tartalmazza* $k_2$*-t.*

*Bizonyítás.* Ha $\mathfrak{G}$-ben egy pillanatra töröljük $k_2$-t, akkor az előálló kétpólusú gráf szintén széttagolhatatlan; van tehát $\mathfrak{G}$-ben két $b$, $c$ pálya, amelyeknek nincs közös belső pontjuk és nem tartalmazzák $k_2$-t. Van továbbá egy olyan $d(CB)$ út (amely esetleg egyetlen ponttá fajul el), hogy

$d$ nem tartalmazza egyik pólust sem,

$c$ belső pont $b$-ben vagy $c$-ben is, és

$d$-nek nincs olyan $C$-től különböző pontja, amely $b$-ben vagy $c$-ben fellépne. A szimmetria folytán feltehetjük, hogy $c$ tartalmazza $C$-t.

1. eset. $k_1$ fellép $b$-ben vagy $c$-ben. Ekkor a $b\cdot c^{-1}[QC]\cdot d$ út kielégíti a segédtétel állítását.

2. eset. $k_1$ sem $b$-ben, sem $c$-ben nem fordul elő. Legyen $e$ olyan pálya, amely tartalmazza $k_1$-et. Jelöljük $E$-vel $e$ utolsó olyan pontját, amely különbözik $Q$-tól és fellép $b$, $c$, $d$ egyikében. $E$ elhelyezkedésére nézve öt lehetőséget különböztethetünk meg:

$E=P$,

$E$ belső pontja $b$-nek,

$E$ belső pontja $c[PC]$-nek,

$E$ pontja $c[CQ]$-nak,

$E$ pontja $d$-nek.

Rendre ennek az öt lehetőségnek megfelelően, az

$$e\cdot c^{-1}[QC]\cdot d,$$
$$b[PE]\cdot e[EQ]\cdot c^{-1}[QC]\cdot d,$$
$$c[PE]\cdot e[EQ]\cdot c^{-1}[QC]\cdot d,$$
$$b\cdot e^{-1}[QE]\cdot c^{-1}[EC]\cdot d,$$
$$b\cdot e^{-1}[QE]\cdot d[EB]$$

utak egyike teljesíti a segédtétel konklúzióját.

## 15. §.

Legyen $\mathfrak{G}$ (nem feltétlenül felbonthatatlan) kétpólusú gráf. Tekintsük $\mathfrak{G}$-ben a $k_1, k_2$ éleket. Jelölje $\mathfrak{G}^*$ azt a minimális kétpólusú részgráfot, amely $k_1$-et is, $k_2$-t is tartalmazza. Ha $\mathfrak{G}^*$ széttagolhatatlan, jelölje $\mathfrak{G}_1$, ill. $\mathfrak{G}_2$ a $k_1$-et, illetve $k_2$-t tartalmazó maximális kétpólusú részgráfot $\mathfrak{G}^*$-ban. ($\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ egy élűek is lehetnek.) Ha $g_1$ és $g_2$ szélső, ill. szétválasztó él-párat alkotnak a $\mathfrak{G}^*/(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ gráfban, úgy $k_1$-et és $k_2$-t *általánosan szélső,* ill. *általánosan szétválasztó* él-párnak nevezzük. A most bevezetett definíciót (amely csak arra az esetre vonatkozott, ha $\mathfrak{G}^*$ széttagolhatatlan) a következő megállapodásokkal egészítjük ki: amennyiben $\mathfrak{G}^*$ párhuzamosan széttagolható, úgy $k_1$-et és $k_2$-t mind általánosan szélső, mind általánosan szétválasztó él-párnak tekintjük; ha pedig $\mathfrak{G}^*$ sorosan széttagolható, úgy sem általánosan szélső, sem általánosan szétválasztó él-párnak nem nevezzük.

16. TÉTEL. *Az alábbi* A) *és* B) *állítások ekvivalensek egymással a* $\mathfrak{G}$ *kétpólusú gráf* $k_1, k_2$ *éleire:*

A) $k_1$ *és* $k_2$ *kiegészíthető él-párat alkotnak,*

B) $k_1$ *és* $k_2$ *nem képeznek sem általánosan szélső, sem általánosan szétválasztó él-párat.*

Külön is kimondjuk a 16. tételnek a felbonthatatlan gráfokra vonatkozó speciális esetét:

2. következmény. *Az alábbi két állítás ekvivalens egymással a* $\mathfrak{G}$ *felbonthatatlan gráf* $k_1, k_2$ *éleire:*

$k_1$ *és* $k_2$ *kiegészíthető él-párat alkotnak,*

$k_1$ *és* $k_2$ *nem képeznek sem szélső, sem szétválasztó él-párat.*

A 16. tétel *bizonyítása.*[14] Mindenekelőtt felsorolunk néhány tényt, amelyek nyilvánvalóan igazak $\mathfrak{G}$-re és $\mathfrak{G}$ egy $\mathfrak{H}$ kétpólusú részgráfjára. $\mathfrak{H}$ két éle akkor és csak akkor kiegészíthető $\mathfrak{G}$-ben, ha $\mathfrak{H}$-ban azok. $\mathfrak{H}$ egy $k_1$ éle és $\mathfrak{G}$-nek egy $\mathfrak{H}$-n kívüli éle pontosan akkor kiegészíthetők $\mathfrak{G}$-ben, ha $h$ és $k_2$ azok $(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$-ban. Két $\mathfrak{H}$-n kívüli él pontosan akkor kiegészíthető $\mathfrak{G}$-ben, ha $(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$-ban. — $\mathfrak{H}$ két éle akkor és csak akkor alkot általánosan szélső, illetve általánosan szétválasztó párat $\mathfrak{G}$-ben, ha $\mathfrak{H}$-ban ugyanilyen párat képez. Hasonlóképpen $\mathfrak{H}$ egy $k_1$ és $\mathfrak{G}—\mathfrak{H}$ egy $k_2$ éle pontosan akkor általánosan szélső, illetve általánosan szétválasztó él-pár $\mathfrak{G}$-ben, ha $h$ és $k_2$ ugyanilyenek $(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$-ben. Két $(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$-beli él pontosan akkor általánosan szélső, ill. általánosan kiegészíthető $\mathfrak{G}$-ben, ha $(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$-ban.

Könnyű belátni, hogy ha a tétel B) állítása nem teljesül, akkor A) sem. A B)$\to$A) implikációt indukcióval fogjuk igazolni. Tételezzük fel érvényességét az $1, 2, \ldots, n-1$ élű gráfokra, tekintsük az $n$ élű $\mathfrak{G}$ gráfot. Legyenek $k_1, k_2$ nem kiegészíthető élek $\mathfrak{G}$-ben.

A bizonyítást esetekre tagolva végezzük. Az első három eset átfedheti egymást.

1. eset. $\mathfrak{G}$-nek van olyan $\mathfrak{H}$ valódi kétpólusú részgráfja, amely $k_1$-et is, $k_2$-t is tartalmazza. Az indukciós feltevés alapján B) hamis rájuk $\mathfrak{H}$-ban, tehát $\mathfrak{G}$-ben is.

2. eset. $\mathfrak{G}$-nek van olyan $\mathfrak{H}$ valódi kétpólusú részgráfja, amely egynél több élű, és $k_1, k_2$ pontosan egyikét tartalmazza, pl. $k_1$-et, Ekkor $h$ és $k_2$ nem teljesíthetik B)-t $(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$-ban, tehát $k_1$-re és $k_2$-re B) hamis $\mathfrak{G}$-ben is.

3. eset. $\mathfrak{G}$-nek van olyan egynél több élű valódi $\mathfrak{H}$ kétpólusú részgráfja, hogy $k_1$ is, $k_2$ is $\mathfrak{H}$-n kívüli élek. A gondolatmenet hasonló az előző két esetéhez.

4. eset. $\mathfrak{G}$ felbonthatatlan. Ekkor azt kell belátnunk, hogy lehetetlen az, hogy a (nem kiegészíthető) $k_1, k_2$ belső élek ne alkossanak szétválasztó párat. Tegyük fel az ellenkezőt. Mivel $k_1, k_2$ nem szétválasztóak, alkalmas $b$ pálya egyiküket sem tartalmazza. Töröljük $\mathfrak{G}$ egy $l(AQ)$ végső élét, amely nem egyezik meg $b$ végső élével, és jelöljük az előálló (erősen összefüggő, nem feltétlenül felbonthatatlan) gráfot

[14] A disszertációban eredetileg szereplő bizonyítás kissé hiányos volt, a jelen dolgozat a helyesbített változatot tartalmazza.

$\mathfrak{G}_1$-gyel. $k_1$ és $k_2$ nem kiegészíthetőek $\mathfrak{G}_1$-ben sem, tehát általánosan szélső vagy általánosan szétválasztó párat alkotnak $\mathfrak{G}_1$-ben az indukciós feltevés miatt.

4/a. eset. $\mathfrak{G}_1$ felbonthatatlan. $k_1, k_2$ ekkor szétválasztó párat alkotnak $\mathfrak{G}_1$-ben. Mivel $\mathfrak{G}$-ben nem képeznek ilyen párt, az $A$ pont a ($k_1$, $k_2$ által szétválasztott) $\mathfrak{G}_p$ részben van. A 18. segédtétel szerint $\mathfrak{G}$-ben van olyan út $P$ és $A$ között, amely $k_1$-en és $k_2$-n átmegy, de $Q$-n nem. $k_1$, $k_2$ tehát kiegészíthetőek $\mathfrak{G}$-ben, ami ellentmondás.

4/b. eset. $\mathfrak{G}_1$ felbontható. $\mathfrak{G}$ felbonthatósága következtében $\mathfrak{G}_1$-ben a nem-triviális részgráfok elhelyezkedésére a következő állítások igazak. Bármely ilyen részgráfban $A$ belső pont. $\mathfrak{G}_1$-nek van egy egyértelműen meghatározott $\mathfrak{G}_2$ maximális kétpólusú részgráfja, és igaz az alábbi két állítás egyike:

$\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$ felbonthatatlan gráf és ebben $g_2$ nem végső él,

$\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$ két sorosan kapcsolt élből áll, s a $P$-hez illeszkedő éle $g_2$.

4/b/$\alpha$. eset. $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$ felbonthatatlan; mind $k_1$, mind $k_2$ kívül van $\mathfrak{G}_2$-n. Ekkor $k_1$ és $k_2$ szükségképpen szétválasztó párat alkotnak ($\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$)-ben, és $g_2$ az első szétválasztott részben van. A 4/a. eset gondolatmenete ellentmondáshoz vezet.

4/b/$\beta$. eset. $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$ felbonthatatlan; mind $k_1$, mind $k_2$ $\mathfrak{G}_2$-ben van. Jelöljük $\mathfrak{H}$-val $\mathfrak{G}_2$-nek azt a minimális kétpólusú részgráfját, amely tartalmazza $k_1$-et és $k_2$-t. Világos, hogy $\mathfrak{H}$ szerkezetére igaz a következő öt alternatíva egyike:

(1) $\mathfrak{H}$ felbonthatatlan,

(2) $\mathfrak{H}$-nak egyetlen $\mathfrak{H}'$ maximális valódi kétpólusú részgráfja van és $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}'$ felbonthatatlan,

(3) $\mathfrak{H}$ két soros komponensre bomlik s azok egyike egy élű,

(4) $\mathfrak{H}$ három soros komponensre bomlik s azok közül csak a középső két vagy több élű,

(5) $\mathfrak{H}$ két párhuzamos komponensre bomlik s azok egyike egy élű, mégpedig ez az él $k_1$, $k_2$ egyike. (Feltehető, hogy $k_1$.)

Mivel feltételeztük, hogy $k_1, k_2$ nem kiegészíthetőek $\mathfrak{H}$-ban, a (3), (4) esetek rögtön ellentmondást adnak. A többi három eset mindegyikében olyan utat akarunk kapni $P$ és $A$ között, amely $k_1$-et is, $k_2$-t is tartalmazza, de $Q$-t nem. Egy ilyen út létezése nyilván ellentmondást jelent, hiszen az $l$ éllel pályává egészíthető ki.

Amennyiben (1) teljesül, $k_1$ és $k_2$ szélső vagy szétválasztó párat képeznek a $\mathfrak{H}$ gráfban. Ha alkalmazzuk a 20., ill. 21. segédtételt $\mathfrak{H}$-ban, ill. ($\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$)-ban, a kívánt tulajdonságú út adódik. — Ha (2) érvényes és $k_1$, $k_2$ egyike sincs $\mathfrak{H}'$-ben, az eljárás hasonló. — Ha (2) igaz és $\mathfrak{H}'$ tartalmazza pl. $k_2$-t, akkor a 22. segédtételt $\mathfrak{H}'$-ben, a 23. segédtételt ($\mathfrak{H}/\mathfrak{H}'$)-ben (a $k_1, h'$ élekre) és a 21. segédtételt ($\mathfrak{G}_1/\mathfrak{H}$)-ban kell alkalmaznunk, hogy célt érjünk. — Ha (5) teljesül, akkor a 22. segédtételt alkalmazzuk $\mathfrak{H}$ nem-triviális párhuzamos komponensében, a 21. segédtételt pedig ($\mathfrak{G}_1/\mathfrak{H}$)-ban ($h$-ra és $\mathfrak{G}_1$ alkalmas pólusára).

4/b/$\gamma$. eset. $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$ felbonthatatlan, $k_1$ és $k_2$ közül pontosan egyik van benne $\mathfrak{G}_2$-ben, pl. $k_2$. Ekkor $k_1$ és $g_2$ szétválasztó párat alkotnak ($\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$)-ben (nem képezhetnek szélső párat, mivel $k_1$ belső él $\mathfrak{G}$-ben). Jelöljük $P_1$-gyel és $Q_1$-gyel $g_2$ végpontjait úgy, hogy $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$ $g_2$-n átmenő pályáin $P_1$ megelőzi $Q_1$-et. A 18. segédtétel értelmében van olyan $c_1$ út $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$-ben, amelynek első pontja $P$, utolsó éle $g_2$ — mégpedig

$P_1$ felé átfutva —, s amely tartalmazza $k_1$-et, de $Q$-t nem. A $k_2$ él nem első soros komponens $\mathfrak{G}_2$-ben, mivel $k_1$, $k_2$ nem alkotnak $\mathfrak{G}$-ben szétválasztó párat. A 24. segédtétel szerint van $\mathfrak{G}_2$-ben olyan $c_2$ út a $Q_1$ ponttól az $A$ pontig, amely tartalmazza $k_2$-t. Helyettesítsük $c_1$-nek $g_2$ élét $c_2$-vel. Az így nyert út $l$-lel kiegészítve olyan pályát ad, amely tartalmazza $k_1$-et és $k_2$-t. Ellentmondás.

4/b/$\delta$. eset. $\mathfrak{G}_1$ sorosan széttagolható. Mint láttuk, $\mathfrak{G}_1$ két soros komponensre bomlik, ezek közül az első $\mathfrak{G}_2$, a második egyetlen élből áll. Ekkor $k_1$ és $k_2$ $\mathfrak{G}_2$-ben fekszenek. Képezzünk $\mathfrak{G}_2$-ből egy $\mathfrak{G}^*$ gráfot úgy, hogy $A$ és $\mathfrak{G}_2$-nek $Q_2$ végpontja között egy új $l^*$ élt veszünk fel. Mivel $k_1$ és $k_2$ nem kiegészíthetőek $\mathfrak{G}$-ben, ezért $\mathfrak{G}^*$-ben sem azok. $\mathfrak{G}^*$ éleinek száma $n-1$. $\mathfrak{G}^*$ bármely kétpólusú részgráfja (ha egyáltalán van ilyen) $A$-t belső pontjaként, $Q_2$-t pólusaként tartalmazza. Az indukciós feltevés szerint $k_1$ és $k_2$ általánosan-szétválasztó vagy általánosan-végső élpárat képeznek $\mathfrak{G}^*$-ban; s a III. tétel alapján nem lehetnek kiegészíthetőek $\mathfrak{G}$-ben.

Jelöljük $\mathfrak{H}_1$-gyel, ill. $\mathfrak{H}_2$-vel $\mathfrak{G}^*$ azon legszűkebb (nem-triviális) kétpólusú részgráfjait, amelyek tartalmazzák $k_1$-et, ill. $k_2$-t. Elegendő a $\mathfrak{H}_1 \supseteq \mathfrak{H}_2$ esetet vizsgálnunk. Jelölje $\mathfrak{H}^*$ $\mathfrak{H}_1$-nek a legbővebb valódi kétpólusú részgráfját és $\mathfrak{R}$ a legszűkebb olyan kétpólusú részgráfot, amelyre $\mathfrak{H}_1 \supset \mathfrak{R} \supset \mathfrak{H}_2$ (amennyiben $\mathfrak{H}^*$, ill. $\mathfrak{R}$ létezik). A $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2$ és $\mathfrak{R}/\mathfrak{H}_2$ gráfok felbonthatatlanok és legalább két élűek. Az alábbi hét helyzet lehetséges:

(1) $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$,

(2) $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}^*$ (létezik és) két párhuzamosan kapcsolódó élből áll, továbbá $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{H}^*$,

(3) $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}^*$ felbonthatatlan, $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}^*$, $k_2$ soros komponense $\mathfrak{H}_2$-nek,

(4) $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}^*$ felbonthatatlan, $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}^*$, $\mathfrak{H}_2$ széttagolhatatlan,

(5) $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}^*$ felbonthatatlan, $\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}^*$, és $\mathfrak{R}/\mathfrak{H}_2$ két párhuzamosan kapcsolódó élből áll,

(6) $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}^*$ felbonthatatlan, $\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}^*$, és $\mathfrak{R}/\mathfrak{H}_2$ két sorosan kapcsolódó élből áll,

(7) $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}^*$ és $\mathfrak{R}/\mathfrak{H}_2$ felbonthatatlanok, $\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}^*$.

E hét eset mindegyikében ki tudjuk mutatni, hogy van $\mathfrak{G}^*$-ben olyan út $P$ és $A$ között, amely $k_1$-en is, $k_2$-n is átmegy. Valóban, ha (1) igaz, úgy $k_1$ és $k_2$ szétválasztó párat képeznek $\mathfrak{H}_1$-ben; a 18. segédtétel célhoz vezet. Ha (2) érvényes, akkor van $\mathfrak{H}_1$-ben $Q_2$ és $A$ közötti út, amely $k_1$-et és $k_2$-t tartalmazza (24. segédtétel); ez $\mathfrak{G}^*$ alkalmas pályájával kiegészíthető $P$ és $A$ közötti úttá. (Felhasználtuk a 19. segédtételt is; ezt a tényt a következőkben is szem előtt kell tartanunk.) A (3)—(7) esetekben $k_1$ és $h^*$ végső élek a $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}^*$ gráfban. Ha (3) teljesül, úgy elég azt a lehetőséget vizsgálni, amikor $k_1, k_2$ nem alkotnak szétválasztó párat $\mathfrak{H}_1$-ben; $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2$ legalább három végső élt tartalmaz, ennélfogva alkalmazhatjuk a $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2$ gráfban a 25. segédtételt $k_1$-re és $h_2$-re. Ha a fennmaradó négy lehetőség közül (5) áll fenn, úgy a 22. segédtételt alkalmazhatjuk $\mathfrak{H}_2$-ben; ha pedig (4), (6), (7) egyike érvényes, akkor a 24. segédtételt használhatjuk fel.

## 16. §.

A III. fejezet e befejező paragrafusának célja: az előző gráfelméleti eredmények egyikének (2. következmény) alkalmazása révén részleges eredményeket elérni az ismétlés nélküli realizáció egzisztencia-problémájában. Tekintetbe véve a kétpólusú gráf pályái és a realizált függvény prím-implikánsai közötti kapcsolatot, a 2. következmény lehetőséget nyújt annak tanulmányozására, hogy a gráfok kvázi-soros felbontása hogyan tükröződik vissza a realizált műveletekben. Aszerint, hogy ez a visszatükröződés (egy-egy függvény esetén) megvalósul-e vagy sem, és hogy az igenlő esetben fennáll-e a valódi kvázi-soros felbontás lehetősége, három osztályra fogjuk tagolni a monoton növekvő, ismétlés nélküli szuperpozíciókra vonatkozóan felbonthatatlan függvények összességét:

azok a függvények, amelyekre nincs értelmezve a kvázi-soros felbontás,
kvázi-sorosan felbonthatatlan függvények,
kvázi-sorosan felbontható függvények.

A fenti osztályok értelmezése kissé körülményes lesz, mivel a gráfelméleti jellegű fogalmaknak és összefüggéseknek az „idegen környezetbe való átültetésével" adódik. A három osztály célszerű definíciója után már nehézség nélkül kapjuk, hogy az egzisztencia-probléma csupán a kvázi-sorosan felbonthatatlan függvényekre vonatkozóan bír érdekességgel.

Legyen $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ monoton növekvő függvény, amely ténylegesen függ minden változójától, s nem bontható fel másképp ismétlés nélküli szuperpozícióval, mint a triviális módokon. Az $x_1, x_2, ..., x_n$ változók (rendezett) halmazát $\Theta$-val fogjuk jelölni. $\Theta$ két $x_i$, $x_j$ elemére a következőképpen értelmezzük a $\varrho$ relációt: $\varrho(x_i, x_j)$ akkor és csak akkor $\uparrow$, ha $f$-nek nincs olyan prím-implikánsa, amely $x_i$-t is, $x_j$-t is tartalmazza. Ha $x_i = x_j$, akkor $\varrho(x_i, x_j)$-t hamisnak tekintjük. $\varrho$ nyilvánvalóan szimmetrikus reláció.

I. RÉSZLEGES DEFINÍCIÓ. Ha $\Theta$-nak van olyan három különböző eleme, amelyekre $\varrho(x_i, x_j) = \varrho(x_j, x_k) = \uparrow$, $\varrho(x_i, x_k) = \downarrow$, akkor a kvázi-soros felbontás nincs értelmezve $f$-re.

Tételezzük fel, hogy $\varrho$ tranzitív a különböző elemekből álló $x_i, x_j, x_k$ $(\in \Theta)$ hármasokon. Ez azt jelenti, hogy van olyan $\Theta'(\subseteq \Theta)$ halmaz és $\Theta'$-nek olyan $\pi$ particiója, hogy $\Theta'$ bármely mod $\pi$ vett osztálya legalább két elemű és

$$\varrho(x_i, x_j) = \uparrow \Leftrightarrow (x_i \equiv x_j (\mathrm{mod}\, \pi)\ \&\ x_i \neq x_j).$$

Világos, hogy $f$ bármely prím-implikánsa legfeljebb egy elemet tartalmazhat $\Theta'$ tetszőleges $\pi$ szerinti osztályából.

II. RÉSZLEGES DEFINÍCIÓ. Ha van $f$-nek olyan $\mathfrak{A}$ prím-implikánsa és $\Theta'$-nek mod $\pi$ olyan $\Pi$ osztálya, hogy $\mathfrak{A}$ nem tartalmaz $\Pi$-be tartozó elemet, akkor a kvázi-soros felbontás nincs értelmezve $f$-re.

Tegyük fel, hogy $f$ bármely prím-implikánsa bármely osztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Valamely $x_i (\in \Theta')$ változóra vonatkozóan jelentse $f_{x_i}$ azt a függvényt, amelyet $f$ $x_i$-t tartalmazó prím-implikánsainak diszjunkciója állít elő. Jelöljük $\Pi_{x_i}$-vel $\Theta'$-nek azt az osztályát mod $\pi$, amely $x_i$-t tartalmazza. Bármely $x_i (\in \Theta')$ elemre jelentse $\sigma_{x_i}$ azt az ekvivalencia-relációt, amely úgy van értelmezve a $\Theta - \Pi_{x_i}$ halmazon, mint a tranzitív kiterjesztése annak a relációnak, amely pontosan akkor érvényes $\Theta - \Pi_{x_i}$ két elemére, ha előfordulnak közösen $f_{x_i}$ alkalmas prím-implikátumában.

III. RÉSZLEGES DEFINÍCIÓ. Ha vannak olyan $x_i$, $x_j$ elemek $\Theta'$-ben, hogy ezek közös osztályban vannak mod $\pi$ és a $\sigma_{x_i}$, $\sigma_{x_j}$ relációk nem esnek egybe egymással, akkor a kvázi-soros felbontás nincs értelmezve $f$-re.

A fenti előkészületek után véglegesen lerögzíthetjük, mikor van értelmezve $f$-re a kvázi-soros felbontás.

DEFINÍCIÓ. Tegyük fel, hogy az $f$ függvény az I—III. részleges definíciókban szereplő premisszák egyikét sem teljesíti. Akkor mondjuk, hogy a *kvázi-soros felbontás értelmezve van f-re*, ha $\Theta$ elemei beoszthatóak úgy a (páronként idegen)

$$(*)\qquad \Pi^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \Pi^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Pi^{(t)}, \Gamma^{(t+1)}, \Pi^{(t+1)} \qquad (t \geqq 0)$$

halmazokba[15], hogy igazak a következők:

$\alpha$) a $\Pi^{(0)}, \Pi^{(1)}, \ldots, \Pi^{(t+1)}$ halmazok éppen $\Theta'$ ekvivalencia-osztályai mod $\pi$,

$\beta$) teljesülnek az elemszámokra vonatkozó alábbi feltételek:

$$\overline{\overline{\Pi}}^{(0)} \geqq 2, \ \overline{\overline{\Pi}}^{(t+1)} \geqq 2,$$

$$\overline{\overline{\Pi}}^{(1)} = \overline{\overline{\Pi}}^{(2)} = \cdots = \overline{\overline{\Pi}}^{(t)} = 2$$

$$\overline{\overline{\Gamma}}^{(1)} \geqq 1, \ \overline{\overline{\Gamma}}^{(2)} \geqq 1, \ldots, \ \overline{\overline{\Gamma}}^{(t+1)} \geqq 1,$$

$\gamma$) amennyiben $x_i \in \Pi^{(s)}$ ($s$ lehet $0, 1, 2, \ldots, t+1$), úgy $(\Theta - \Pi^{(s)})$-nek mod $\sigma_{x_i}$ vett ekvivalencia-osztályai:

$$\Pi^{(0)} \cup \Gamma^{(1)} \cup \Pi^{(1)} \cup \Gamma^{(2)} \cup \ldots \cup \Pi^{(s-1)} \cup \Gamma^{(s)}$$

és

$$\Gamma^{(s+1)} \cup \Pi^{(s+1)} \cup \ldots \cup \Gamma^{(t+1)} \cup \Pi^{(t+1)}.$$

DEFINÍCIÓ. Legyen értelmezve $f$-re a kvázi-soros felbontás. Ha $t=0$, azt mondjuk, hogy $f$ *felbonthatatlan kvázi-soros módon*. Ha pedig ($f$-re értelmezve van a kvázi-soros felbontás és) $t \geqq 1$, akkor $f$-et *kvázi-sorosan felbonthatón*ak mondjuk.

DEFINÍCIÓ. Amennyiben $f$ felbonthatatlan kvázi-soros módon, azt mondjuk, hogy $f$-nek egyetlen *kvázi-soros komponense* van: önmaga. Ha pedig $f$ felbontható kvázi-sorosan, akkor $f$ $s$-ik $(1 \leqq s \leqq t+1)$ *kvázi-soros komponensén* azt az $f_s$ függvényt értjük, amelyet az

$$\mathfrak{A}_{\Pi^{(s-1)} \cup \Gamma^{(s)} \cup \Pi^{(s)}}$$

elemi konjunkciók diszjunkciója jellemez, ahol $\mathfrak{A}$ végigfut $f$ prím-implikánsain.

1. MEGÁLLAPÍTÁS. *$f$ bármely kvázi-soros komponense felbonthatatlan az ismétlés nélküli szuperpozíciókra vonatkozóan és kvázi-sorosan. Az $f_s$ komponensnek az*

$$\mathfrak{A}_{\Pi^{(s-1)} \cup \Gamma^{(s)} \cup \Pi^{(s)}}$$

*konjunkciók és csak ezek a prím-implikánsai. Egy $\mathfrak{A}$ konjunkció akkor és csak akkor prím-implikánsa f-nek, ha $\mathfrak{A}$ előállítható a*

$$(**)\qquad \mathfrak{B}^{(1)} \,\&\, \mathfrak{B}^{(2)} \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{B}^{(t+1)}$$

*alakban, ahol $\mathfrak{B}^{(s)}$ prím-implikánsa $f_s$-nek $(1 \leqq s \leqq t+1)$ és $\mathfrak{B}^{(s)}$-nek van közös változója $\mathfrak{B}^{(s+1)}$-gyel $(1 \leqq s \leqq t)$.*

[15] A $(*)$ sorozat $f$ által egyértelműen meg van határozva a sorrend megfordításától eltekintve.

*Bizonyítás.* Először a második állítást fogjuk indirekt módon igazolni. Legyen

$$\mathfrak{A}_{\Pi^{(s-1)}\cup\Gamma^{(s)}\cup\Pi^{(s)}}$$

valódi rész-konjunkciója

$$\mathfrak{B}_{\Pi^{(s-1)}\cup\Gamma^{(s)}\cup\Pi^{(s)}}$$

-nek, ahol $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ az $f$ függvény prím-implikánsai. Jelöljük $x_i$-vel az $\mathfrak{A}_{\Pi^{(s-1)}}$-ben levő, $x_j$-vel az $\mathfrak{A}_{\Pi^{(s)}}$-ben levő (egyetlen) változót. Ekkor $\mathfrak{B}_{\Pi^{(s-1)}}=x_i$ és $\mathfrak{B}_{\Pi^{(s)}}=x_j$. Az $f_{x_i}, f_{x_j}$ függvények előállíthatóak a következő alakban:

$$f_{x_i} = g^{(1)}[\Pi^{(0)}\cup\Gamma^{(1)}\cup\ldots\cup\Gamma^{(s-1)}] \,\&\, x_i \,\&\, g^{(2)}[\Gamma^{(s)}\cup\Pi^{(s)}\cup\ldots\cup\Pi^{(t+1)}],$$

$$f_{x_j} = h^{(1)}[\Pi^{(0)}\cup\Gamma^{(1)}\cup\ldots\cup\Gamma^{(s)}] \,\&\, x_j \,\&\, h^{(2)}[\Gamma^{(s+1)}\cup\Pi^{(s+1)}\cup\ldots\cup\Pi^{(t+1)}].$$

Továbbá azt az $f_{[x_i,x_j]}$ függvényt, amelyet a mind $x_i$-t, mind $x_j$-t tartalmazó ($f$-re vonatkozó) prím-implikánsok diszjunkciója jellemez, előállíthatjuk a

$$g^{(1)}[\Pi^{(0)}\cup\Gamma^{(1)}\cup\ldots\cup\Gamma^{(s-1)}] \,\&\, x_i \,\&\, f^*[\Gamma^{(s)}] \,\&$$

$$\&\, x_j \,\&\, h^{(2)}[\Gamma^{(s+1)}\cup\Pi^{(s+1)}\cup\ldots\cup\Pi^{(t+1)}]$$

alakban, ezt az előállítást úgy is megkaphatjuk, hogy az $f$ prím-implikánsaiban levő változókat az előírt változó-halmazok szerint csoportosítjuk. ($f^*$ általában nem függ ténylegesen minden $\Gamma^{(s)}$-beli változótól). Látható, hogy $\mathfrak{B}$ alábbi valódi rész-konjunkciója szintén prím-implikánsa $f$-nek:

$$\mathfrak{B}_{\Pi^{(0)}\cup\Gamma^{(1)}\cup\ldots\cup\Gamma^{(s-1)}} \,\&\, x_i \,\&\, \mathfrak{A}_{\Gamma^{(s)}} \,\&\, x_j \,\&\, \mathfrak{B}_{\Gamma^{(s+1)}\cup\Pi^{(s+1)}\cup\ldots\cup\Pi^{(t+1)}}.$$

Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy az

$$\mathfrak{A}_{\Pi^{(s-1)}\cup\Gamma^{(s)}\cup\Pi^{(s)}}$$

konjunkciók nem állhatnak valódi rész-konjunkció kapcsolatban egymással.

A megállapítás harmadik állításában foglalt szükségesség nyilvánvaló, az elegendőség a most látott gondolatmenet továbbvitelével adódik.

$f_s$ felbonthatatlanságát is indirekt módon fogjuk igazolni. Tételezzük fel, hogy $f_s$-nek van olyan egyszerű ismétlés nélküli szuperpozíció-előállítása, amelyben a belső függvény $\Delta$ változó-halmaza legalább két elemű, és szűkebb, mint $\Pi^{(s-1)}\cup\cup\Gamma^{(s)}\cup\Pi^{(s)}$. Jelöljük $x'$-vel a helyettesített változót. Állítsuk elő $f$-et ($\ast\ast$) alakú konjunkciók diszjunkciójaként. Helyettesítsük be ebbe az előállításba $x'$-et minden olyan változó helyére, amely $\Delta$-ban előfordul (ilyen változók $\mathfrak{B}^{(s-1)}$-ben, $\mathfrak{B}^{(s)}$-ben, $\mathfrak{B}^{(s+1)}$-ben lehetnek). Ha az így kapott függvényt külső függvénynek, az $f_s$ előállításában szereplő belső függvényt pedig belső függvénynek tekintjük, akkor $f$-nek nemtriviális előállítását nyertük ($x'$ helyettesítendő a belső függvénnyel).

Az $f_s$ függvények kvázi-soros felbonthatatlansága világos.

17. TÉTEL. *Legyen $f$ monoton növekvő, változóitól ténylegesen függő, szuperpozícióival szemben felbonthatatlan függvény. Ha a kvázi-soros felbontás nincs értelmezve $f$-re, akkor $f$ nem realizálható kétpólusú gráffal ismétlés nélkül.*

18. TÉTEL. *Teljesítse $f$ az előző tétel kikötéseit, és legyen rá értelmezve a kvázi-soros felbontás. $f$ akkor és csak akkor realizálható kétpólusú gráffal ismétlés nélkül, ha $f$ valamennyi kvázi-soros komponense realizálható ilyen módon.*

A 17., 18. tételek *bizonyítása*. Realizálja $f$-et a (szükségképpen felbonthatatlan) $\mathfrak{G}$ gráf. A 2. következmény alapján valamennyi olyan fogalomnak megfeleltethető egy-egy gráfelméleti fogalom, amely a részleges definíciók során fellépett. (A következő megfelelkezések állnak fenn: a $\Pi^{(s)}$ osztályok — a kezdő élek halmaza, a szétválasztó párok, a végső élek halmaza; a $\Theta-\Pi_{x_i}$ halmaz két ekvivalencia-osztálya mod $\sigma_{x_i}$ — a $\Pi_{x_i}$-nek megfelelő él-halmazt megelőző, ill. követő élek halmaza; a $\Gamma$ osztályok — $\mathfrak{G}$ kvázi-soros komponensei belső éleinek halmazai.) Ezek a hozzárendelések rögtön mutatják, hogy $f$-re értelmezve kell hogy legyen a kvázi-soros felbontás, tovább, hogy $\mathfrak{G}$ kvázi-soros komponensei éppen $f$ ilyen komponenseit realizálják. — Megfordítva: legyen $f$ valamennyi $f_s$ kvázi-soros komponense realizálható. Ha az $f_s$ függvényeket rendre realizáló $\mathfrak{G}_s$ gráfok kvázi-soros kapcsolását képezzük (mégpedig úgy, hogy az élek azonosítása a függvények közös változói által előírt módon történjék), akkor olyan gráfot kapunk, amely $f$-et realizálja.

## IV. fejezet. Konstruktív módszer az ismétlés nélkül realizáló gráf meghatározására

### 17. §.

A disszertáció utolsó fejezetének célja: halmazelméleti eszközökkel olyan algoritmust kidolgozni, amely lehetővé teszi a X. tételben szereplő A), B) és C) feltételeknek eleget tevő halmazok meghatározását egy ismétlés nélkül realizálható $f$ függvényből (pontosabban: annak prím-implikánsaiból) kiindulva. Először a probléma halmazelméleti megfogalmazását adjuk, s néhány bevezető megjegyzést teszünk.

Legyen adva az $E$ véges halmaz, és $E$ részhalmazainak egy olyan $\mathcal{P}$ összessége[16], hogy valahányszor $P_1 \in \mathcal{P}$, $P_2 \in \mathcal{P}$ és $P_1 \neq P_2$, akkor $P_1 \not\supset P_2$ és $P_1 \not\subset P_2$. $E$ egy $F$ részhalmazát *W-halmaz*nak nevezzük, ha $F$ teljesíti a következő három tulajdonságot:

(I) Bármely $x(\in E-F)$ elemhez van olyan $P(\in \mathcal{P})$, hogy $x \in P \subseteq E-F$.

(II) Ha valamely $P \cap F$ metszet nem üres, akkor $\overline{\overline{P \cap F}}=2$ ($\mathcal{P}$ valamennyi $P$ tagjára).

(III) Bármely $x(\in F)$, $y(\in F)$ elempárhoz van olyan $P(\in \mathcal{P})$, hogy $P \supseteq \{x, y\}$.

Rögzítsük tetszőlegesen $E$ két $a$, $b$ elemét. A 18. paragrafusban eljárást fogunk kidolgozni az $a$-t is, $b$-t is tartalmazó, legalább 4 elemű $W$-halmazok meghatározázására; speciálisan annak eldöntésére, létezik-e ilyen $W$-halmaz (egy adott $a$, $b$ párhoz). Ha valamely $F$ $W$-halmazra $F \supseteq \{a, b\}$ és $\overline{\overline{F}} \geqq 4$, akkor $F$-et egy *keresett W-halmaz*nak nevezzük.

A következő megállapítások némelyike elegendő feltételt fog adni ahhoz, hogy (egy adott $a$, $b$ párra) ne létezzen keresett $W$-halmaz. Valahányszor egy ilyen jellegű megállapításon túljutunk, feltételezni fogjuk a későbbiekben, hogy a megállapítás premisszája nem teljesül.

[16] Az „összesség", „tag" kifejezéseket „halmaz", ill. „elem" szinonimáiként használjuk, ha a szereplő elemek maguk is halmazok.

## 18. §.

2. MEGÁLLAPÍTÁS. *Ha igaz a következő* $\alpha$), $\beta$), $\gamma$) *feltételek valamelyike, akkor nincs keresett W-halmaz:*

$\alpha$) $a \in P$ *és* $b \in P$ $\mathcal{P}$*-nek egy P tagjára sem igaz (egyidejűleg),*

$\beta$) $a \in P$ *és* $b \notin P$ $\mathcal{P}$*-nek egy P tagjára sem igaz,*

$\gamma$) $a \notin P$ *és* $b \in P$ $\mathcal{P}$*-nek egy P tagjára sem igaz.*

*Bizonyítás.* Ha $\alpha$) teljesül, akkor $\{a, b\}$ nem bővíthető a (III) feltételt teljesítő halmazzá. Ha $\beta$) teljesül és $c(\neq a, b)$ tetszőleges eleme egy $F(\supset \{a, b\})$ halmaznak, akkor $\mathcal{P}$-nek nincs olyan $P$ tagja, amelyre $P \cap F = \{a, c\}$ igaz volna, tehát $F$ nem teljesítheti (III)-at. A harmadik eset analóg a másodikkal.

Definiálni fogunk újabb összességeket a $\mathcal{P}$ összesség tagjaiból kiindulva. (Megengedjük, hogy egy összesség tagjai között az üres halmaz is fellépjen.) Jelentse $\mathcal{P}_{ab}^{(0)}$ a $\mathcal{P} - \{a, b\}$ alakú halmazok összességét, ahol $P$ $\mathcal{P}$-nek azon tagjain fut át, amelyek $a$-t is, $b$-t is tartalmazzák. Jelentse $\mathcal{P}_a^{(0)}$ a $P - \{a\}$ alakú halmazok összességét, ahol $P$ $\mathcal{P}$-nek az $a \in P$, $b \notin P$ feltételeket kielégítő tagjain fut át. $\mathcal{P}_b^{(0)}$-t analóg módon értelmezzük, mint $\mathcal{P}_a^{(0)}$-t ($a$ és $b$ szerepének felcserélésével). Álljon $\mathcal{P}_0^{(0)}$ $\mathcal{P}$ azon tagjaiból, amelyek $a$-t sem, $b$-t sem tartalmazzák.

Jelöljük $H_{ab}^{(0)}$-vel $\mathcal{P}_{ab}^{(0)}$ tagjainak egyesítési halmazát. Jelölje $\mathcal{P}_x^{(1)}, \mathcal{P}_b^{(1)}, \mathcal{P}_0^{(1)}$ a

$$P - H_{ab}^{(0)}$$

alakú hamazok összességét, ahol $P$ rendre $\mathcal{P}_a^{(0)}, \mathcal{P}_b^{(0)}$, ill. $\mathcal{P}_0^{(0)}$ elemein fut végig. $\mathcal{P}_a^{(1)}$ (ill. $\mathcal{P}_b^{(1)}, \mathcal{P}_0^{(1)}$) tagjainak egyesítési halmaza legyen $H_a^{(1)}$ (ill. $H_b^{(1)}$, $H_0^{(1)}$).

3. MEGÁLLAPÍTÁS. *Ha a*

$$(*) \qquad (H_a^{(1)} \cup H_b^{(1)}) - H_0^{(1)}$$

*halmaz nem üres, akkor nincs keresett W-halmaz.*

*Bizonyítás.* Indirekt úton következtetünk. Legyen $F$ tetszőleges $W$-halmaz; első célunk azt megmutatni, hogy $F$-nek része a $(*)$ halmaz. Az ellenkező esetben, mivel (I) miatt $E-F$ tetszőleges eleme fellép $\mathcal{P}_0^{(0)}$ alkalmas tagjában, a $(*)$ halmaz bármely olyan eleme, amely $F$-ben nincs benne, fellépne $\mathcal{P}_0^{(1)}$ valamely tagjának elemeként. — A további bizonyítás két esetre tagolódik.

1. eset. $(*)$ legalább két elemű; legyenek $x, y$ különböző elemei. (III) miatt van $\mathcal{P}$-nek olyan $P$ tagja, amely tartalmazza $x$-et is, $y$-t is. Ennek a $P$-nek $a$, $b$ egyikét is tartalmaznia kell, ami ellentmond a (II) tulajdonságnak.

2. eset. $(*)$ egyetlen $x$ elemből áll. Ha $F$ valamely keresett $W$-halmaz, akkor tartalmaznia kell $a$-t is, $b$-t is, $x$-et is. Jelöljük $y$-nal $F$ egy további elemét. (III) értelmében van olyan $P(\in \mathcal{P})$, hogy $P \cap F = \{x, y\}$. Az azonban, hogy $P$ se $a$-t, se $b$-t ne tartalmazza, ellentmond $x$ értelmezésének.

Újabb definíciókra térünk rá. Feltételezhetjük, hogy $H_a^{(1)} \subseteq H_0^{(1)}$ és $H_b^{(1)} \subseteq H_0^{(1)}$. Jelöljük $\mathcal{P}_a^{(2)}$-val (ill. $\mathcal{P}_b^{(2)}$-vel, $\mathcal{P}_0^{(2)}$-val) a $Q \cap (H_a^{(1)} \cap H_b^{(1)})$ alakú metszetek összességét, ahol $Q$ $\mathcal{P}_a^{(1)}$ (ill. $\mathcal{P}_b^{(1)}, \mathcal{P}_0^{(1)}$) tagjain fut át. Hasonlóképpen, értelmezzük $\mathcal{P}_a^{(3)}$-t, $\mathcal{P}_b^{(3)}$-t, $\mathcal{P}_0^{(3)}$-t a $Q-R$ különbségek rendszere gyanánt, ahol $Q$ rendre $\mathcal{P}_a^{(2)}, \mathcal{P}_b^{(2)}, \mathcal{P}_0^{(2)}$ tagjain fut végig, $R$-et pedig az alább következő induktív eljárás definiálja. Legyen $R_1$ azon $\mathcal{P}_0^{(2)}$-beli tagok egyesítési halmaza, amelyek egyetlen elemből állnak. Ha $R_{i-1}$ már definiálva van és van (legalább egy) egy-elemű $P-R_{i-1}$ halmaz ($P\in\mathcal{P}_0^{(2)}$), akkor értelmezzük $R_i$-t úgy, mint $R_{i-1}$ és az egy-elemű $P-R_{i-1}$ halmazok ($P\in\mathcal{P}_0^{(2)}$) egyesítését. Jelölje $R$ azt az $R_i$-t, amelynél az eljárás megszakad.

Jelöljük $H_a^{(2)}$-val, $H_b^{(2)}$-vel, $H_0^{(2)}$-lal, $H_a^{(3)}$-val, $H_b^{(3)}$-vel, $H_0^{(3)}$-lal rendre $\mathcal{P}_a^{(2)}$, $\mathcal{P}_b^{(2)}$, $\mathcal{P}_0^{(2)}$, $\mathcal{P}_a^{(3)}$, $\mathcal{P}_b^{(3)}$, $\mathcal{P}_0^{(3)}$ tagjainak egyesítési halmazát. A 4. megállapítás rögtön következik a definíciókból.

4. MEGÁLLAPÍTÁS. *Igazak a* $H_a^{(2)}=H_b^{(2)}=H_0^{(2)}$ *és* $H_a^{(3)}=H_b^{(3)}=H_0^{(3)}$ *egyenlőségek.*

5. MEGÁLLAPÍTÁS. *Bármely keresett W-halmaz része a* $H_0^{(3)}\cup\{a,b\}$ *halmaznak.*

*Bizonyítás.* Legyen $x(\neq a,b)$ egy keresett $W$-halmaz valamely eleme. (II) biztosítja, hogy $x$ nem léphet fel $\mathcal{P}_{ab}^{(0)}$ egy tagjában sem. $x$ tehát eleme a $\mathcal{P}_a^{(1)}\cup\mathcal{P}_b^{(1)}\cup\mathcal{P}_0^{(1)}$ összesség valamely tagjának. Tekintettel a 3. megállapítás bizonyítása utáni feltételezésre, $x$ eleme $\mathcal{P}_0^{(1)}$ alkalmas tagjának. Ha $x$-et $\mathcal{P}_a^{(1)}$ egy tagja sem tartalmazná, akkor $\{a,x\}$ nem volna részhalmaza $\mathcal{P}$ egy tagjának sem, ami ellentmond a (III) sajátságnak. Ezért $x\in H_a^{(1)}$ és hasonló meggondolás alapján $x\in H_b^{(1)}$. Innen következik, hogy $x\in H_0^{(2)}$.

A bizonyítás végső szakaszában azt akarjuk belátni, hogy egy keresett $W$-halmaz tetszőleges ($\neq a,b$) eleme benne van $H_0^{(3)}$-ban. Ez a következő állításból adódik: ha $y$ eleme az $R_i$ halmazok valamelyikének, akkor $y$ nem lehet benne egy keresett $W$-halmazban sem. E legutóbbi állítás igazolására tegyük fel, hogy $R_{i-1}$ elemeire igaz az állítás. Van olyan $P(\in\mathcal{P}_0^{(2)})$, hogy $P-R_{i-1}=\{y\}$. Ha $y$-t tartalmazná egy $F$ keresett $W$-halmaz, akkor $P\cap F=\{y\}$ volna érvényes, ellentmondásban a (II) tulajdonsággal.

6. MEGÁLLAPÍTÁS. *Ha a* $\mathcal{P}_a^{(3)}$ *és* $\mathcal{P}_b^{(3)}$ *összességek (legalább) egyike tartalmazza tagjaként az üres halmazt, akkor nincs keresett W-halmaz.*

*Bizonyítás.* Tételezzük fel, hogy pl. $\emptyset\in\mathcal{P}_a^{(3)}$. Ez azt jelenti, hogy van olyan $P(\in\mathcal{P})$, hogy $\emptyset=P\cap H_a^{(3)}=P\cap H_0^{(3)}$. Ha $F$ a keresett $W$-halmazok egyike lenne, akkor $P\cap F=\{a\}$ teljesülne, ellentmondásban (II)-vel.

7. MEGÁLLAPÍTÁS. *E valamely* $F(\supset\{a,b\})$ *részhalmaza akkor és csak akkor keresett W-halmaz, ha a következő hét állítás mindegyike teljesül rá* ($F'$ *az* $F-\{a,b\}$ *különbséget jelöli*):

(0') $F'\subseteq H_0^{(3)}$.

(I') (=(I)) *Bármely* $x(\in E-F)$ *elemhez van olyan* $P(\in\mathcal{P})$, *hogy* $x\in P\subseteq E-F$.

($\mathrm{II}_1'$) $\mathcal{P}_a^{(3)}$ *és* $\mathcal{P}_b^{(3)}$ *bármely tagjának nem-üres az* $F'$*-fel való metszete.*

($\mathrm{II}_2'$) $F'$*-nek nincs olyan valódi részhalmaza, amely* ($\mathrm{II}_1'$)*-et ugyancsak teljesítené.*

($\mathrm{II}_3'$) *A* ($\mathrm{II}_1'$) *feltételben említett metszetek mind egy eleműek.*

($\mathrm{II}_4'$) *Ha valamely* $P\cap F'$ *metszet nem üres* ($P\in\mathcal{P}_0^{(3)}$), *akkor* 2 *elemű.*

(III') $F'$ *bármely* $x,y$ *elempárjához van* $\mathcal{P}_0^{(3)}$*-nak olyan tagja, amely* $x$*-et is,* $y$*-t is tartalmazza.*

*Bizonyítás.* A keresett $W$-halmazokat az (I), (II), (III), $\overline{\overline{F}}\geqq 4$, $F\supset\{a,b\}$ feltételekkel jellemeztük. Először azt igazoljuk, hogy bármely keresett $W$-halmaz teljesíti a 7. megállapításban felsorolt feltételeket. (0′) kielégülését már láttuk az 5. megállapításban. (I′) triviálisan igaz. Felhasználva (0′)-t, (II)-ből következik ($II_1'$) és ($II_3'$). Könnyű belátni, hogy (0′), ($II_1'$) és ($II_3'$) maguk után vonják ($II_2'$)-t (tekintettel a 4. megállapításra).[17] ($II_4'$) és (III′) nyilvánvalóan következnek (II)-ből, ill. (III)-ból.

Megfordítva, teljesítse $E$ egy $F$ részhalmaza a (0′)—(III′) tulajdonságokat. $F$ triviálisan (I) tulajdonságú. A (II) sajátság igazolása végett azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen elemszámúak a $P \cap F$ metszetek ($P \in \mathscr{P}$) közül a nem üresek. A következő három lehetőség állhat fenn:

ha mind $a$, mind $b$ benne van $P \cap F$-ben, akkor (0′) miatt $P \cap F = \{a, b\}$ (ugyanis $H_0^{(3)}$, definíciójánál fogva, idegen $\mathscr{P}$-nek $a$-t is, $b$-t is tartalmazó tagjaitól),

ha $P \cap F$-nek $a$ és $b$ pontosan egyike eleme, akkor $\overline{\overline{P \cap F}} = 2$ a (0′), ($II_3'$) sajátságokból adódik,

ha sem $a$-t, sem $b$-t nem tartalmazza $P \cap F$, akkor e metszet (0′) és ($II_4'$) következtében két elemű.

Be kell még látnunk, hogy $F$ teljesíti a (III) tulajdonságot is. Legyenek $x$ és $y$ $F$-beli elemek. Ha $x = a$ és $y = b$, akkor (III) abból adódik, hogy a 2. megállapításban szereplő α) feltétel hamis. Ha $a$ és $b$ pontosan egyike lép fel az $(x, y)$ párban, akkor (III) (0′)-ből és ($II_1'$)-ből következik (mivel pl. ha $x \neq a$ és $x \neq b$, úgy (0′) és a 4. megállapítás miatt $x$ fellép mind $\mathscr{P}_a^{(3)}$, mind $\mathscr{P}_b^{(3)}$ egy-egy tagjában). Ha pedig sem $a$, sem $b$ nem fordul elő a vizsgált $(x, y)$ párban, úgy (III) (III′)-ből következik.

## 19. §.

A 18. paragrafus megállapításai a legalább négy elemű $W$-halmazok meghatározása felé mutattak utat. Ki kell még egészíteni módszereinket olyan állításokkal, amelyek a három elemű $W$-halmazok előállítását teszik lehetővé. Most is abban a beállításban tekintjük problémánkat, hogy adott $(a, b)$ elempárból kiindulva akarunk $\{a, b, c\}$ alakú $W$-halmazt kapni, ill. eldönteni, van-e ilyen halmaz. A 2. megállapítás bizonyítása most is érvényes lévén, igaz a

8. MEGÁLLAPÍTÁS. *Ha a 2. megállapításban szereplő α), β), γ) feltételek valamelyike igaz, akkor nincs olyan 3 elemű W-halmaz, amely a-t is, b-t is tartalmazná.*

Értelmezzük a $D_1, D_2, D_3, C$ halmazokat a következőképpen:

$$D_1 = \bigcup_{\substack{P \ni a \\ P \ni b}} P, \quad D_2 = \bigcup_{\substack{P \not\ni a \\ P \not\ni b}} P, \quad D_3 = \bigcup P, \quad C = \bigcap P$$

ahol $D_3$ és $C$ definíciójában $P$ a $\mathscr{P}$ összesség azon tagjait futja végig, amelyek $a$ és $b$ pontosan egyikét tartalmazzák.

9. MEGÁLLAPÍTÁS. *Ha a $C - (D_1 \cup D_2)$ halmaz üres vagy legalább két elemű, akkor nincs olyan 3 elemű W-halmaz, amely a-t is, b-t is tartalmazná. Ha $C - (D_1 \cup D_2)$ egyetlen c elemből áll, akkor az alábbi két alternatíva egyike igaz:*

[17] Láthatjuk, hogy a (0′)—(III′) feltételek nem alkotnak független rendszert: ($II_2'$) kihagyható közülük. További céljaink szempontjából azonban előnyös lesz, hogy ($II_2'$)-t felléptettük a 7. megállapításban.

(1) $\{a, b, c\}$ *W-halmaz, nincs más olyan három elemű W-halmaz, amely a-t és b-t tartalmazná, továbbá* $(D_1 \cup D_3) - \{a, b, c\} \subseteq D_2$,

(2) *nincs a-t is, b-t is tartalmazó három elemű W-halmaz, és* $((D_1 \cup D_3) - \{a, b, c\}) - D_2 \neq \emptyset$.

*Bizonyítás.* Könnyű belátni, hogy $\{a, b, c\}$ pontosan akkor elégíti ki a (II), (III) feltételeket, ha $c \in C - (D_1 \cup D_2)$. Amennyiben $c'$ a $C - (D_1 \cup D_2)$ halmaznak $c$-től különböző eleme, úgy $\{a, b, c\}$ nem teljesítheti az (I) követelményt. Ha $C - (D_1 \cup D_2) = \{c\}$, akkor annak, hogy $\{a, b, c\}$ (I) tulajdonságú legyen, szükséges és elegendő feltétele a $((D_1 \cup D_3) - \{a, b, c\}) - D_2$ halmaz üressége.

## 20. §.

A jelen paragrafusban bebizonyított állításra mint segédeszközre van szükségünk az algoritmus folyamán. A megállapítás alapgondolata nem új: a szerző tudomása szerint McCluskey [9] dolgozatában fordul elő legkorábban; azonban az itt következő explicit megfogalmazásban valószínűleg még nem szerepelt az irodalomban.

Legyen $M = \{r_1, r_2, \ldots, r_\alpha\}$ egy véges halmaz. Tekintsük $M$ részhalmazainak némelyikét: $N_1$-et, $N_2$-t, ..., $N_\beta$-t. Feltehetjük, hogy $\bigcup_{\gamma=1}^{\beta} N_\gamma = M$. Rendeljük hozzá az $r_1, r_2, \ldots, r_\alpha$ elemekhez rendre az $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\alpha$ logikai változókat, továbbá minden $N_\gamma$ halmazhoz az $N_\gamma$ elemeinek megfelelő változók $\mathfrak{N}_\gamma$ diszjunkcióját $(\gamma = 1, 2, \ldots, \beta)$.

10. MEGÁLLAPÍTÁS. *A következő két tulajdonság ekvivalens egymással az M halmaz M′ részhalmazaira vonatkozóan:*

(1) *$M'$-nek $N_1, N_2, \ldots, N_\beta$ mindegyikével nem-üres metszete van, és $M'$ bármely $M''$ valódi részhalmazához van olyan $\gamma$ $(1 \leqq \gamma \leqq \beta)$, hogy $M'' \cap N_\gamma = \emptyset$.*

(2) *Az $M'$ elemeinek megfelelő változók konjunkciója prím-implikánsa az alábbi módon definiált $\mathfrak{f}$ függvénynek:*

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\alpha) = \mathfrak{N}_1 \,\&\, \mathfrak{N}_2 \,\&\ldots\&\, \mathfrak{N}_\beta.$$

*Bizonyítás.* Az $\mathfrak{f}$-re vonatkozó $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ teljes elemi konjunkciókról azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ nagyobb, mint $\mathfrak{B}$, ha $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$, és nincs olyan változó, amely $\mathfrak{A}$-ban negálva, $\mathfrak{B}$-ben negálatlanul lépne fel.

Rendeljünk hozzá bármely $M' (\subseteq M)$ halmazhoz egy teljes elemi konjunkciót úgy, hogy abban az $M'$ elemeinek megfelelő változók negálatlanul, a többiek negálva forduljanak elő. Nyilvánvaló, hogy $M'$-hez akkor és csak akkor tartozik nagyobb vagy egyenlő konjunkció, mint $M''$-höz, ha $M' \supseteq M''$. Az $\mathfrak{f}$ függvény azon a helyen, amelyet az $M'$-höz tartozó teljes elemi konjunkció jelöl ki, pontosan akkor lesz $\uparrow$ értékű, ha $M' \cap N_1, M' \cap N_2, \ldots, M' \cap N_\beta$ egyike sem üres.

$M'$-nek akkor és csak akkor van meg az (1) tulajdonsága, ha a hozzá tartozó $\mathfrak{A}$ konjunkció olyan, hogy

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{A}) = \uparrow,$$

és valahányszor $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, akkor $\mathfrak{f}(\mathfrak{B}) = \downarrow$ (ahol $\mathfrak{B}$ teljes elemi konjunkció $\mathfrak{f}$-re nézve). Jelöljük $\mathfrak{A}'$-vel azt az elemi konjunkciót, amely úgy kapható $\mathfrak{A}$-ból, hogy töröljük azokat a tagokat, amelyek *negált* változók. Tekintettel arra, hogy $\mathfrak{f}$ monoton növekvő függvény, $\mathfrak{A}$-nak pontosan akkor van meg a fenti két tulajdonsága, ha $\mathfrak{A}'$ prímimplikánsa $\mathfrak{f}$-nek.

## 21. §.

A 18—20. paragrafusokban bevezetett definíciók és a kimutatott megállapítások lehetővé teszik egy olyan algoritmus kiépítését, amellyel (ismétlés nélkül realizálható, felbonthatatlan függvényből kiindulva) meghatározhatóak a $W$-halmazok, s amely elektronikus számológépekre gazdaságosan programozható eljárásnak látszik. A teljes algoritmus $\binom{n}{2}$ rész-algoritmusból áll ($n$ az $E$ halmaz elemeinek száma), mégpedig a rész-algoritmusok mindegyikénél $E$ egy-egy $(a, b)$ elempárjából indulunk ki. Egy-egy rész-algoritmus végrehajtása során a következő eljárások történnek. Először megnézzük, a sorra kerülő $(a, b)$ elempár nem része-e egy korábban már meghatározott $W$-halmaznak. Ha igen, akkor a rész-algoritmus befejeződött azzal az eredménnyel, hogy az $(a, b)$ pár vizsgálata nem szolgáltat új $W$-halmazt.[18] Ha nem, akkor a 19. § eredményeit felhasználva megvizsgáljuk, van-e $a$-t és $b$-t tartalmazó 3 elemű $W$-halmaz. Ha van, akkor ezt felvesszük a $W$-halmazok listájába, s az $(a, b)$ párra vonatkozó rész-algoritmust befejezettnek tekintjük. Ha nincs, úgy a 18. §-ban foglalt eredmények alapján elkezdjük kiépíteni a $\mathcal{P}_a^{(3)}, \mathcal{P}_b^{(3)}, \mathcal{P}_0^{(3)}$ összességeket, és ellenőrizzük a megfelelő helyeken, teljesül-e valamely olyan feltétel, amely cáfolja a keresett $W$-halmaz létezését (2., 3., 6. megállapítások). Ha egy ilyen feltétel kielégül, akkor újra csak befejezettnek vesszük a rész-algoritmust. Az ellenkező esetben a 10. megállapítás segítségével meghatározzuk $H_0^{(3)}$ mindazon részhalmazait, amelyek a 7. megállapításban szereplő $(\mathrm{II}_1')$, $(\mathrm{II}_2')$ feltételeknek eleget tesznek, és közvetlen ellenőrzéssel megvizsgáljuk, kielégíti-e ezek valamelyike az $(\mathrm{I}')$, $(\mathrm{II}_3')$, $(\mathrm{II}_4')$, $(\mathrm{III}')$ tulajdonságokat is. (Legfeljebb egy elégítheti ki ezek mindegyikét.) Az így megtalált $W$-halmazt a listába iktatjuk (ha létezik), s a rész-algoritmus mindenképpen véget ért.

## IRODALOM


[1] ÁDÁM A.: Kétpólusú elektromos hálózatokról, III. *Az MTA Mat. Kut. Int. Közleményei*, **3** (1958), 207—218.

[2] A. ÁDÁM: Zur Theorie der Wahrheitsfunktionen. *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 47—52.

[3] A. ÁDÁM: Über die monotone Superposition der Wahrheitsfunktionen. *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 18—37.

[4] A. ÁDÁM: The quasi-series decomposition of two-terminal graphs. *Publ. Math.*, **10** (1963), 96—107.

[5] A. ÁDÁM: On the repetition-free realization of truth functions by two-terminal graphs, I. *Az MTA Mat. Kut. Int. Közleményei*, **9** (1964), 11—20

[6] A. ÁDÁM: Correction to my paper „The quasi-series decomposition of two-terminal graphs". *Publ. Math.* **14** (1967), 415—416.

[7] A. ÁDÁM: *Truth functions and the problem of their realization by two-terminal graphs.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.


[18] Ezt a lépést az a feltevés igazolja, hogy a vizsgált függvényt realizálhatónak feltételeztük olyan gráf által, amelyben párhuzamos él-párak nincsenek, s az teszi célszerűvé, hogy egyébként minden egyes $F$ $W$-halmazt $\binom{m}{2}$ példányban kapnánk (ahol $m = \bar{\bar{F}}$).

[8] H. A. CURTIS: *A new approach to the design of switching circuits*. Princeton, 1962.
[9] E. J. McCLUSKEY: Minimization of Boolean functions. *Bell System Technical Journal*, **35** (1956), 1417—1444.
[10] А. В. Кузнецов: О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики. *Труды Мат. Инст. им. Стеклова*, **51** (1958), 186—225.
[11] Б. А. Трахтенброт: К теории бесповторных контактных схем. *Труды Мат. Инст. им. Стеклова*, **51** (1958), 226—269.

(Beérkezett: 1970. III. 10.)

## INVESTIGATIONS ON THE SUPERPOSITIONS OF TRUTH FUNCTIONS AND ON THEIR REPETITION-FREE REALIZABILITY BY TWO-TERMINAL GRAPHS

by
A. ÁDÁM

Summary

The paper coincides with the author's dissertation for the candidate degree. The original results, contained in the article, were published in the papers [2], [3], [4], [5], too (see also [6]).

# TALÁLKOZÁSOM MAURICE D'OCAGNE-NYAL, A NOMOGRÁFIA TUDOMÁNYÁNAK MEGALAPÍTÓJÁVAL

Írta: BALOGH ARTHÚR

A nomográfia tudománya d'OCAGNE *Nomográfia* [2] könyvének megjelenésével született meg. Munkájában összefoglalta az eladdig megjelent tanulmányokat és azt tetemesen saját kutatásaival egészítette ki. Igen kedvezően nyilatkozott a később megjelent egyező tárgyú és SOREAU által írt könyvről, amely e tudomány elterjedéséhez lényegesen hozzájárult.

A nomográfia tudománya a Szovjetunióban azonnal megértő talajra talált, és ott NIL GLAGOLEFF vezetésével megalakult a Nomográfia Tudományos Intézete. Az intézet megünnepelte d'OCAGNE munkája megjelenésének 50-edik évfordulóját, amint arról az 1884-ben megjelent *Annales des Ponts et Chausses* c. folyóiratban olvashatunk.

Felismerték, hogy a gyakorlatban jelentkező sok és sokszor nehéz számítást egyszerű leolvasásra lehet visszavezetni. Magának az ábrának a megszerkesztése aránylag egyszerű munka, ha megfelelő és helyesen megválasztott osztáspapírt alkalmaznak.

Ezzel szemben nálunk ugyanezen időszakban d'OCAGNE munkái mellett a legnagyobb közönyösséggel haladtak el. Még könyve se volt sehol található. Ez indított azután arra, hogy elsőnek foglalkozzam hazánkban e tudománnyal, mert mint mérnök azonnal felismertem gyakorlati jelentőségét.

A *Nomográfia* fejezetei közül a párhuzamos és a sugárnyalábbal kapcsolatos megoldásokkal foglalkoztam, amelyekre a hálós ábra összefoglaló nevet használtam, és amelyek a készen vásárolható osztáspapírokon gyorsan és könnyen ábrázolhatók, kevés rajzkészséggel is. Emellett foglalkoztam a háromszög- és a hexagonális ábrákkal és ezek eladdig ismeretlen elméletét dolgoztam ki. A háromszögábrákkal azért volt érdemes foglalkozni, mert velük néhány fontos gyakorlati kifejezést könnyen lehetett ábrázolni, és ehhez a gyakorlati használathoz kiválóan alkalmas osztáspapírokat lehetett kapni, amelyeket más téren a *Pascal*-féle háromszögek részére is fel lehetett használni.

Amint megtudtam d'OCAGNE könyvének címét, azonnal meghozattam. És a legnagyobb lelkesedéssel végigtanulmányoztam. Igazolva láttam felfogásomat, mert gyakorlatilag értékes és hasznos könyv került a kezembe. Elragadtatásomban 1932. szept. 19-én levelet intéztem hozzá, amelyre ugyane hó 21-én válaszolt. Ebben a levélben arra kért, hogy küldjem el a már megjelent idevágó dolgozataimat, ami természetesen meg is történt. Még pedig azokat a dolgozatokat küldtem el, amelyek nem magyar nyelven jelentek meg.

Melléklem d'Ocagne ezen levelét fordítással együtt.

Ezek után levelezésünkben hosszabb szünet állt be.

Későbbi levelezésünk egy nomográfiai kongresszus jegyében folyt le. Ez ügyben az első levelem 1937. jan. 26-án kelt és arra febr. 13. kelettel válaszolt.

Mellékelem e levél eredetijét a fordítással együtt.

Arra kértem levelemben, hogy a kongresszus megtartására tegyen meg mindent az ő részéről és vállalja annak vezetését és az elnökséget. Azzal érveltem, hogy ez a kongresszus lényeges fejlődést jelent e tudományban, és ezen nemcsak matematikusok, hanem főleg mérnökök és esetleg vezető gyárosok is részt fognak venni. Ez az együttes megbeszélés a tudomány jövő fejlődésére bizonyára értékes eredményt hozott volna.

D'OCAGNE arra az álláspontra helyezkedett, hogy egy önálló nomográfiai kongresszus megtartását nem találja célszerűnek, hanem egy matematikai kongresszus keretében lehetne egy olyan csoportot alakítani, amely e témával foglalkozna. De ebben az esetben is arra kért, hogy személyét ne vegyük számításba, és nem kíván ebben részt venni.

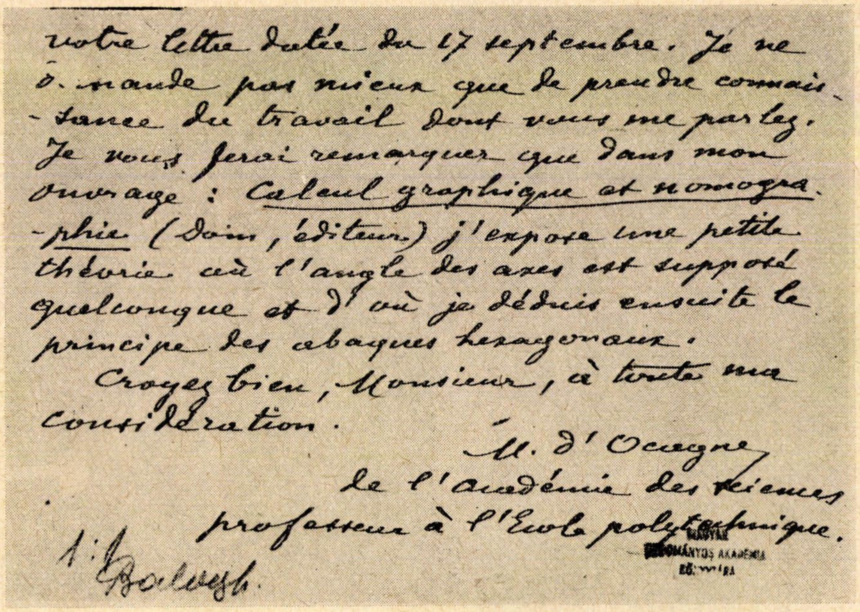
Ugyanezt az álláspontot foglalta el 1937. május 31-én kelt levelében, és mellékelte azt a levelet, amelyet NIL GLAGOLEFF hozzám intézett, aki a kongresszus megtartása mellett volt.

Mellékelem e levelet GLAGOLEFF levelével együtt és azok fordítását.

Ugyanez évben Párizsban tartózkodtam és személyes tárgyalásaink alkalmával is igyekeztem a kongresszus megtartásának fontosságáról meggyőzni. De eredménytelenül. Meghívott azonban *Sorbonne*-ba, és bemutatta az általa alapított Nomográfiai Múzeumot. Érdekes rajzokat láttam, amelyet ő maga készített. Láttam az akkor már hatalmas könyvtárát és köztük az én munkáimat. Akkor egyedül én képviseltem hazánkat e téren, amit ő elég különösnek talált.

Eredménytelenül búcsúztam el d'OCAGNE professzortól, aki a következő évben eltávozott az élők sorából. Úgy látszik, ez lehetett oka annak, hogy a fent közölt álláspontot foglalta el.


Nom et adresse de l'expéditeur
M. d'Ocagne
30 rue La Boëtie
Paris 8e
CARTE POSTALE
CORRESPONDANCE
ADRESSE
Etretat, le 21 sept. 1932
Monsieur,
Je reçois dans la villégiature où je suis pour quelques jours encore, avant de rentrer à mon adresse ci-dessus,
Dipl. Ing. Arthur Balogh
Lipot körut 27
Budapest V
(Hongrie)


votre lettre datée du 17 septembre. Je ne
demande pas mieux que de prendre connais-
-sance du travail dont vous me parlez.
Je vous ferai remarquer que dans mon
ouvrage : Calcul graphique et nomogra-
-phie (Doin, éditeur) j'expose une petite
théorie où l'angle des axes est supposé
quelconque et d'où je déduis ensuite le
principe des abaques hexagonaux.
Croyez bien, Monsieur, à toute ma
considération.
M. d'Ocagne
de l'Académie des sciences
professeur à l'Ecole polytechnique.

Etreta, 1932. szept. 21.

Uram!

Nyaralásom alatt — ahol még néhány napig tartózkodom — és mielőtt még a fenti címre visszatérnék (Párizs, La rue de Boetie 30) értesítem, hogy szept. 17-én kelt levelét megkaptam. Az a kívánságom, hogy megismerjem az Ön által említett dolgozatot. Megjegyzem, hogy könyvemben:

*Calcul graphique et nomographie*, (Doin kiadás)

ismertetem annak az elméletét, amelynél feltételezzük, hogy a tengelyek által bezárt szög tetszőleges és amelyből azután a háromszögábra alapgondolatát vezetem le.

Fogadja uram teljes megbecsülésemet

*D'Ocagne*
a Tud. Akadémia tagja és műegyetemi tanár

Moszkva, 1937. máj. 25.

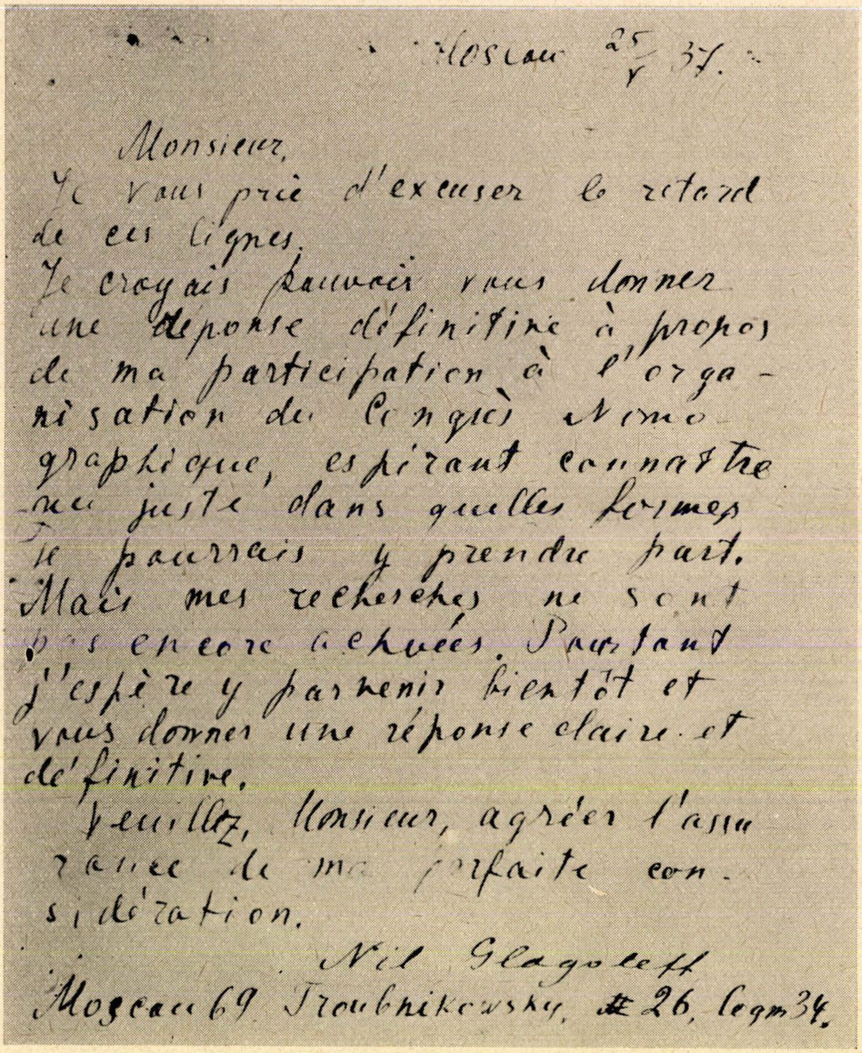
Uram!

Elnézést kérek e soraim késedelméért!

Azt hiszem végleges választ adhatok arra nézve, vajon részt vehetek a nomográfiai kongresszus megszervezésében abban a reményben, hogy ismeretes előttem az a körülmény, hogy milyen formában vehetek abban részt. Azonban kutatásaimat még eddig nem fejeztem be. Azonban remélem, hogy ezzel mihamarabb végzek, és akkor világos és végleges választ adhatok.

Fogadja uram az én legnagyobb megbecsülésemet

*Nil Glagoleff*
Moszkva 69 Troubnikowsky 26, 34 sz. lakás.



Moscou 25/V 37.

Monsieur,

Je vous prie d'excuser le retard de ces lignes.

Je croyais pouvoir vous donner une réponse définitive à propos de ma participation à l'organisation du Congrès Nomographique, espérant connaître au juste dans quelles formes je pourrais y prendre part. Mais mes recherches ne sont pas encore achevées. Pourtant j'espère y parvenir bientôt et vous donner une réponse claire et définitive.

Veuillez, Monsieur, agréer l'assurance de ma parfaite considération.

Nil Glagoleff

Moscou 69 Troubnikowsky, #26, logm 34.

Párizs, 1937. máj. 31.

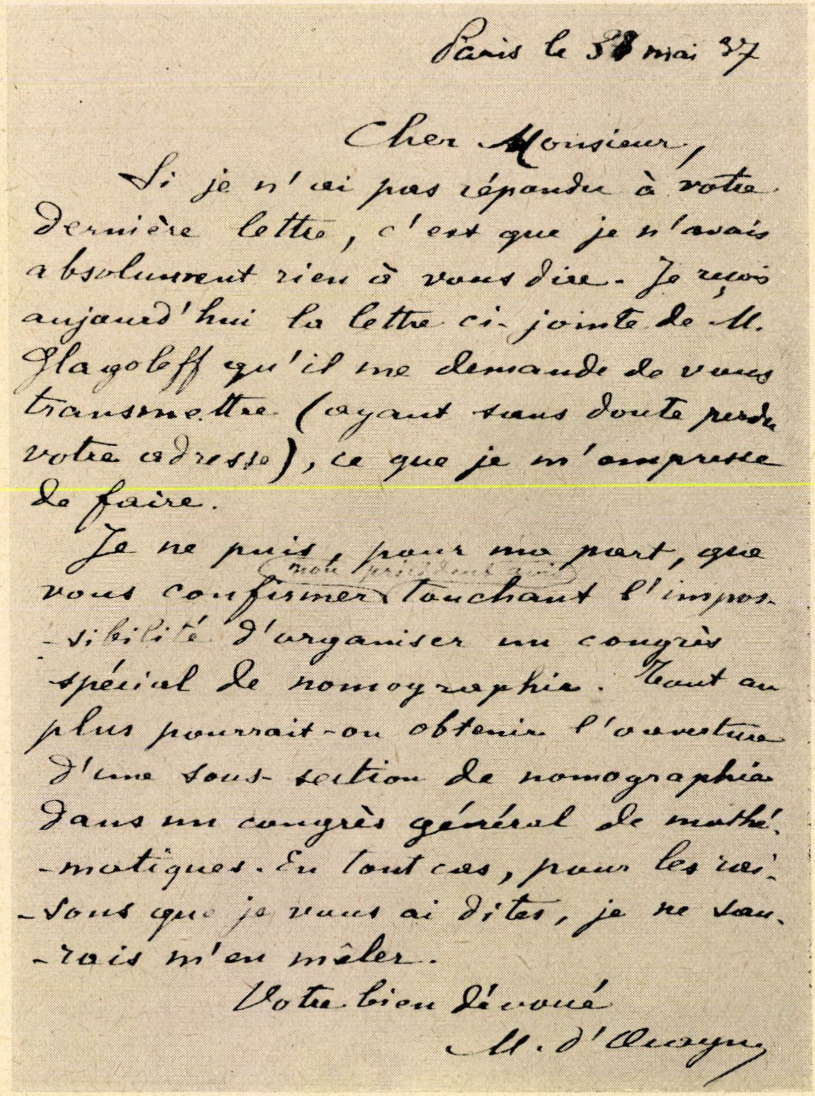
Kedves Uram!

Azért nem válaszoltam eddig az Ön utolsó levelére, mert egyáltalában nem volt mit írnom. Ma azonban megkaptam Glagoleff úrtól az itt mellékelt levelet, amelyben arra szólít fel, hogy közöljem Önnel (elvesztette az Ön címét), amit sietek is megtenni.

Részemről nem tehetek mást, mint hogy közöljem ismét Önnel eddigi álláspontomat, amely szerint lehetetlennek tartom a nomográfiai kongresszus megszervezését. De egy általános matematikai kongresszus keretében meg lehetne alakítani a nomográfia alosztályát. Minden körülmények között azonban, Ön előtt ismert okokból, ettől is távol kívánok maradni.

Az Ön igaz híve

*M. D'Ocagne*



Paris le 28 mai 37

Cher Monsieur,

Si je n'ai pas répondu à votre dernière lettre, c'est que je n'avais absolument rien à vous dire. Je reçois aujourd'hui la lettre ci-jointe de M. Glagoleff qui me demande de vous transmettre (ayant sans doute perdu votre adresse), ce que je m'empresse de faire.

Je ne puis, pour ma part, que vous confirmer (notre président ami) touchant l'impossibilité d'organiser un congrès spécial de nomographie. Tout au plus pourrait-on obtenir l'ouverture d'une sous-section de nomographie dans un congrès général de mathématiques. En tout cas, pour les raisons que je vous ai dites, je ne saurais m'en mêler.

Votre bien dévoué

M. d'Ocagne

Paris le 13 février 1937

Cher Monsieur,

Si je ne réponds qu'avec un peu de retard à votre lettre du 26 janvier (accompagnée de divers documents) c'est que j'ai tenu à le faire à bon escient, après échanges de vues avec des hommes aptes à formuler un avis sur la question. Ces échanges de vues n'ont fait que me confirmer dans la manière de voir que je vous ai exprimée lors de la visite que vous avez eu l'amabilité de me faire :

1° J'estime qu'il n'y a pas lieu de compter sur un rassemblement suffisant pour constituer les éléments d'un congrès particulier de nomographie.

2° Si une tentative devait avoir lieu en ce sens, je tiens à y rester absolument étranger.

Je crois que la seule possibilité à envisager serait qu'une petite place fût réservée à la nomographie dans un congrès général de mathématiques, du côté des mathématiques appliquées.

Le seul moyen d'amorcer la question serait, à mon avis que, sans me faire intervenir, la seule organisation permanente s'occupant de nomographie, c'est-à-dire le Bureau d'études nomographiques de Moscou, fit une démarche en ce sens auprès de M. Jean Perrin, membre de l'Académie des sciences, présentement sous-secrétaire d'Etat de la recherche scientifique au Ministère de l'éducation nationale, chargé de tout ce qui concerne la participation de la science à la future Exposition.

Vous pourriez, si vous le jugiez à propos, suggérer cette démarche au professeur Glagoleff, président du Bureau d'études nomographiques, mais, encore une fois, en s'abstenant de m'y associer d'une façon quelconque.

Veuillez agréer, cher Monsieur, l'assurance de mes meilleurs sentiments.

M. d'Ocagne

Párizs, 1937. febr. 13.

Kedves Uram!

Ha elkésve válaszolok jan. 26-án kelt levelére (különböző dolgozatok mellékletével) annak oka abban található, hogy súlyt helyeztem olyan egyénekkel való eszmecserére, akiket mértékadónak lehet tekinteni a szóban forgó ügy megítélésénél. E gondolataim megerősítettek abban az állásfoglalásban, amit már én önnel személyesen is közöltem:

1. Véleményem szerint a nomográfiai kongresszusnak nem volna elegendő résztvevője, ami annak megtartásához szükséges volna.

2. Ha ez a kongresszus mégis létrejönne, attól távol szeretnék maradni. Az egyetlen lehetőséget ebben abban látom, hogy egy általános matematikai kongresszus keretében kis területet biztosítanának a nomográfia számára.

Véleményem szerint a szóban forgó ügy megoldása az lenne — anélkül, hogy ebben szerepet vállalnék —, ha az állandó nomográfiával kapcsolatos szervezet, éspedig a moszkvai Nomográfiai Tanulmányi Iroda lépést tenne Jean Serrin úrnál, aki a nemzetnevelésügyi minisztérium tudományos kutató csoportjának helyettes államtitkára és aki meg van bízva mindazon teendőkkel, amelyek összefüggésben vannak a jövendő tudományos kiállításokkal.

Ha helyesnek találja ezt, akkor közölném Glagoleff professzorral, aki elnöke a Nomográfiai Tanulmányi Irodának, ill. Testületnek és újból hangsúlyozom, anélkül azonban, hogy engemet bármely módon is igénybe vennének.

Fogadja uram és egyúttal biztosítom a legmélyebb megbecsülésemről

*M. D'Ocagne*

## HIVATKOZÁSOK

MAURICE D'OCAGNE *munkáinak jegyzéke*

[1] *Procédé nouveau de calcul graphique.* A. P. C. novembre, 1884. 73. oldal.
[2] *Nomographie.* Les calculs usuels effectués au moyen des abaque. Essai d'une theorie general. Paris, Gauthier-Villars et Co, 1891.
[3] *Traité de nomographie.* Paris, Gauthier-Villars et Co. 1. kiadás 1899, 484. oldal, 2. kiadás 1921.
[4] *Exposé synthetique des principes fondamentaux de la nomographie.* J. E. P. 2 Serie VIII 1903. 97 oldal.
[5] *Calcul graphique et nomographie.* Paris, Octave Doin. 1 kiadás 1907, 392 oldal, 2. kiadás 1921, 3. kiadás 1924.
[6] *Calculs numerique* (Tome 1, fasc. 3 de l'encycl. des science mathematique. Teubner et Gauthier) 1909.
[7] *Cours de géometrie pure et appliquée de l'école polytechnique* 2. volume, Gauthier, 1917—18.
[8] *Principes usuels de nomographie avec application à divers problèmes concernant l'aviation et l'artillerie.* Paris, Gauthier, 1920. 70 oldal.
[9] *Vue d'ensemble sur les machines à calculer.* Paris, Gauthier, 1922.
[10] *Esquisse d'ensemble de la nomographie.* Fasc. IV du memorial des science mathematique. Paris, Gauthier 1925. 68 oldal.
[11] *Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques.* Esquisse general. Paris, Gauthier. 1928. 190 oldal.
[12] *Leçons sur la Topometrie.* Paris, Gauthier 1910. 260 oldal.

BALOGH ARTHÚR *nomográfiai munkáinak jegyzéke*

[1] *Beitrag zur Nomographie.* Salmayersche Buchhandlung, Wien, 1938.
[2] Fluchtlinientafel mit rechteckigen Verbindungsgeraden. Wurzel Verlag; Zürich, 1939.

[3] *Die Dreieck und Hexagonaltafeln samt Ergänzungsheft.* Wurzel Verlag, Zürich, 1940.
[4] *Fluchtlinientafeln mit einer Kurve.* Wurzel Verlag, Zürich 1941.
[5] *Aufgaben und Lösungen aus dem Gebiete der Nomographie.* Wurzel Verlag, Zürich, 1946.
[6] *Nomográfia. Hálósábrák,* Saját kiadás, 1949. Népszava könyvkereskedés bizománya.
[7] A grafikus ábrázolás egynéhány módszere, 1938. Saját kiadás.
[8] A nomografia elemei, 1938. Saját kiadás.
[9] A nomográfia alkalmazása, 1938. Saját kiadás,
[10] A nomográfia vezérfonala (Barna Gábor álnéven), 1938. Saját kiadás.
[11] Logaritmikus ábrák szerkesztése. 1938. Saját kiadás.

(Beérkezett: 1970. V. 15.)

# POLINOMOK GYÖKEINEK REDUKCIÓS HIBÁIRÓL

Írta: SZIDAROVSZKY FERENC

1. Polinomok gyökeinek az együtthatóktól való folytonos függését mondja ki az alábbi két tétel:

1. LEMMA (OSTROWSKI [1]). *Legyen*

$$p(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 = 1)$$

*és*

$$q(x) = b_0x^n + \dots + b_{n-1}x + b_n \quad (b_0 = 1)$$

*két komplex polinom. Legyenek $p$ gyökei $x_1, x_2, \dots, x_n$, $q$ gyökei $y_1, y_2, \dots, y_n$.* Legyen

$$\gamma_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\},$$

$$\mu_1 = \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu - b_\nu| \gamma_1^{n-\nu}\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

*Ekkor $p$ tetszőleges $x_0$ gyökéhez található $q$-nak legalább egy $y_i$ gyöke, melyre*

$$|x_0 - y_i| \leqq \mu_1.$$

Tegyük fel, hogy ismeretes egy $k(|c_1|, \dots, |c_n|)$ valamennyi változójában monoton növekedő függvény, mely tetszőleges

$$h(x) = x^n + c_1, x^{n-1} + \dots + c_n$$

polinom gyökei abszolút értékét felülről becsli.

2. LEMMA (OSTROWSKI [2]). *Legyen $i=1, 2, \dots, n$ esetén*

$$c_i = \max\{|a_i|, |b_i|\}$$

$$\gamma_2 = k(|c_1|, |c_2|, \dots, |c_n|)$$

*és*

$$\mu_2 = \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu - b_\nu| \gamma_2^{n-\nu}\right\}^{1/n}$$

*Ekkor $p$ és $q$ gyökeit lehet úgy számozni, hogy $i=1, 2, \dots, n$ esetén*

$$|x_i - y_i| \leqq 2n\mu_2.$$

*fennálljon.*

Számos egyenletmegoldó módszer úgy működik, hogy valamilyen módon meghatározza az $f(x)$ polinom bizonyos $x_1, x_2, \dots, x_k$ $(k<n)$ gyökeit, és az ezeket tartalmazó $g(x)$ polinommal $f(x)$-et leosztja. $f(x)$ további gyökeit ezen $h(x)$ hányados polinom gyökei szolgáltatják. Azonban az $x_1, x_2, \dots, x_k$ gyököket általában csak közelítőleg tudjuk meghatározni. Így az ezeket tartalmazó $g^*(x)$ polinom is közelítése csupán az elméleti $g(x)$ polinomnak. $f(x)$-et ily módon egy közelítő $g^*(x)$ polinommal osztjuk le, ezért a $h^*(x)$ hányados polinom (a maradék-polinomot elhanyagoljuk) is csak közelítése $h(x)$-nek, $h^*(x)$ gyökei is közelítései $h(x)$ gyökeinek, így $h^*(x)$ gyökei csak közelítései $f(x)$ további gyökeinek. Jelen dolgozat célja ennek a közelítésnek a becslése.

A vizsgálat több lépésben történik.

1. TÉTEL: *Legyenek*

$$g(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^{k-i}$$

*és*

$$g^*(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i^* x^{k-i}$$

*egység főegyütthatós polinomok. Legyenek* $g(x)$ *és* $g^*(x)$ *gyökei* $x_1, \dots, x_k$, *ill.* $x_1^*, \dots, x_k^*$. *Legyen*

$$|x_i^*| \leqq a^*, \quad \varepsilon_i = x_i^* - x_i, \quad |\varepsilon_i| \leqq \varepsilon \leqq 1.$$

*Ekkor*

$$|b_i - b_i^*| \leqq \varepsilon \binom{k}{i} [(a^*+1)^i - a^{*i}].$$

*Bizonyítás:* Legyenek az $|x_1^*|, \dots, |x_m^*|$ elemi szimmetrikus polinomjai

$$|\Sigma_1| = |x_1^*| + \dots + |x_m^*|$$

$$|\Sigma_2| = |x_1^* x_2^*| + \dots + |x_{m-1}^* x_m^*|$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|\Sigma_m| = |x_1^* x_2^* \cdots x_m^*|$$

ekkor

$$\delta_m = |(x_1 x_2 \dots x_m - x_1^* x_2^* \dots x_m^*)| = |(x_1^* - \varepsilon_1) \dots (x_m^* - \varepsilon_m) - x_1^* \cdot \dots \cdot x_m^*| \leqq$$

$$\leqq \varepsilon |\Sigma_{m-1}| + \varepsilon^2 |\Sigma_{m-2}| + \dots + \varepsilon^{m-1} |\Sigma_1| + \varepsilon^m \leqq$$

$$\leqq \binom{m}{m-1} a^{*m-1} \varepsilon + \binom{m}{m-2} a^{*m-2} \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{m-1} \binom{m}{1} a^* + \varepsilon^m.$$

$\varepsilon \leqq 1$ felhasználásával nyerjük, hogy

$$\delta_m \leqq \varepsilon \left[ \binom{m}{m-1} a^{*m-1} + \binom{m}{m-2} a^{*m-2} + \dots + \binom{m}{1} a^* + 1 \right] = \varepsilon [(a^*+1)^m - a^{*m}].$$

Így $g(x)$ és $g^*(x)$ együtthatóinak eltérését könnyen megbecsülhetjük, mert

$$|b_i - b_i^*| \leqq \binom{k}{i} [(a^*+1)^i - a^{*i}] \varepsilon,$$

s ezzel tételünket beláttuk.

2. TÉTEL: *Legyen*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$g(x) = x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_k,$$
$$K = \max_{0 \leqq i \leqq n} |a_i|,$$

*valamint*

$$L = \max_{1 \leqq i \leqq k} |b_i|.$$

*Az $f(x)$ polinomot $g(x)$-szel elosztva (a maradék polinomot elhanyagoljuk), egy*

$$h(x) = c_0x^{n-k} + \cdots + c_{n-k-1}x + c_{n-k}$$

*polinomot nyerünk. Ekkor fennáll, hogy*

$$|c_i| \leqq K(1+L)^i \quad (0 \leqq i \leqq n-k).$$

*Bizonyítás:* Az $f(x)/g(x)$ polinomosztásban egy

$$f_0(x) \equiv f(x);\ f_1(x);\ \dots;\ f_{n-k}(x)$$

polinomsorozat szerepel. Ezek főegyütthatói adják rendre $h(x)$ együtthatóit. Az $f_i(x)$ polinomból az $f_{i+1}(x)$ polinom úgy keletkezik, hogy $f_i(x)$-et $g(x)$-szel elosztjuk, és a hányados első tagjával ($f_i(x)$ főegyütthatójával) visszaszorzunk. Az így nyert polinomot $f_i(x)$-ből kivonjuk. Például az

$$\begin{array}{l}
(x^3-3x^2+6x-1):(x+1) = x^2-4x+10 \\
\underline{-x^3 \pm x^2} \\
\quad -4x^2+6x-1 \\
\quad \underline{\mp 4x^2 \mp 4x} \\
\qquad\quad 10x-1 \\
\qquad \underline{-10x \pm 10} \\
\qquad\qquad -11
\end{array}$$

polinomosztásban

$$f_0(x) = x^3-3x^2+6x-1$$
$$f_1(x) = -4x^2+6x-1$$
$$f_2(x) = 10x-1.$$

Jelölje $f_i(x)$ együtthatóit $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{i,n-i}$ és ezen együtthatók abszolút értékeinek maximumát $M_i$.

Az $f_{i+1}(x)$ polinom konstrukciójából $f_{i+1}(x)$ együtthatója vagy $f_i(x)$ megfelelő együtthatójával egyezik meg (ha a visszaszorzásban $x$ ilyen hatványa nem szerepel), vagy (ha a visszaszorzásban $x$ ilyen hatványa szerepel) az együttható az $a_{i+1,l} = a_{i,l+1} - a_{i,0}b_{l+1}$ képlettel nyerhető. Nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$|a_{i+1,l}| \leqq |a_{i,l+1}| + |a_{i,0}| \cdot |b_{l+1}| \leqq M_i + M_iL = M_i(1+L).$$

Ez a becslés természetesen igaz $f_{i+1}(x)$ előbbi típusú együtthatóira is, amikor $a_{i+1,l} = a_{i,l+1}$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$M_{i+1} \leqq M_i(1+L).$$

Mivel $M_0 = K$, így $M_i \leqq K(1+L)^i$, ami tételünk állítása volt.

3. TÉTEL: *Osszuk el az $f(x)$ n-edfokú polinomot a $g(x)$ és $g^*(x)$ egyaránt k-adfokú, egység főegyütthatós polinomokkal. Legyen*

$$g(x) = x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k$$

$$g^*(x) = x^k + b_1^* x^{k-1} + \cdots + b_k^*$$

*és*

$$L^* = \max_{1 \leq i \leq k} |b_i^*|, \quad K = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$$

*Tegyük fel, hogy*

$$|b_i - b_i^*| \leq \delta \leq 1.$$

*Ekkor a*

$$h(x) = \sum_{i=0}^{n-k} c_i x^{n-k-i}$$

*és a*

$$h^*(x) = \sum_{i=0}^{n-k} c_i^* x^{n-k-i}$$

*hányados polinomok együtthatóinak eltérésére fennáll, hogy*

$$|c_i - c_i^*| \leq K\{(2+L^*)^i - (1+L^*)^i\}\delta \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-k).$$

*Bizonyítás:* Legyen az $f(x)$ polinom $g(x)$, ill. $g^*(x)$-szel való osztásakor szereplő polinomsorozat

$$f_0(x), \ldots, f_{n-k}(x),$$

ill.

$$f_0^*(x), \ldots, f_{n-k}^*(x).$$

Jelölje $\varepsilon_i$ az $f_i(x)$ és $f_i^*(x)$ együtthatói eltérésének maximumát.

Mivel $f_0(x) \equiv f_0^*(x) \equiv f(x)$, így $\varepsilon_0 = 0$. Tekintsük $f_{i+1}(x)$ és $f_{i+1}^*(x)$ $l$-edik együtthatójának eltérését. A 2. tétel bizonyításában látott esetekben ez

$$|a_{i,l+1} - a_{i,l+1}^*|,$$

ill.

$$|(a_{i,l+1} - a_{i,0} b_{l+1}) - (a_{i,l+1}^* - a_{i,0}^* b_{l+1}^*)|$$

Ez utóbbi esetben az együtthatók eltérése

$$|(a_{i,l+1} - a_{i,0} b_{l+1}) - (a_{i,l+1}^* - a_{i,0}^* b_{l+1}^*)| \leq$$

$$\leq |a_{i,l+1} - a_{i,l+1}^*| + |a_{i,0}^* b_{l+1}^* - a_{i,0}^* b_{l+1}| + |a_{i,0}^* b_{l+1} - a_{i,0} b_{l+1}| \leq$$

$$\leq \varepsilon_i + M_i^* \delta + \varepsilon_i L = \varepsilon_i (1+L) + M_i^* \delta,$$

ahol

$$L = \max_{1 \leq i \leq K} |b_i|.$$

A becslés nyilvánvalóan igaz $f_{i+1}(x)$ és $f_{i+1}^*(x)$ azon együtthatóinak eltérésére is, melyek $f_i(x)$, ill. $f_i^*(x)$ megfelelő együtthatóival egyenlőek. Így nyertük az

$$\varepsilon_0 = 0,$$

$$\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon_i (1+L) + \delta M^*$$

összefüggéseket. Teljes indukcióval belátjuk, hogy

$$\varepsilon_i \leqq K\{(2+L^*)^i-(1+L^*)^i\}\delta.$$

$i=0$ esetén az állítás triviálisan igaz, mert $\varepsilon_0=0$.

Mivel $|b_i-b_i^*|\leqq\delta\leqq 1$, így $L\leqq L^*+\delta\leqq L^*+1$. $\varepsilon_{i+1}$ és $M_i^*$ előző becsléséből nyerjük, hogy

$$\varepsilon_{i+1} \leqq \varepsilon_i(2+L^*)+\delta K(1+L^*)^i \leqq K\delta\{(2+L^*)^i-(1+L^*)^i\}(2+L^*)+K\delta(1+L^*)^i =$$
$$= K\delta\{(2+L^*)^{i+1}-(1+L^*)^i(2+L^*)+(1+L^*)^i\} = K\delta\{(2+L^*)^{i+1}-(1+L^*)^{i+1}\}.$$

Mivel a $c_i$ és $c_i^*$ együtthatók az $f_i(x)$, ill. $f_i^*(x)$ főegyütthatójával egyeznek meg, ezért

$$|c_i-c_i^*| \leqq K\delta\{(2+L^*)^i-(1+L^*)^i\},$$

ami a 3 tétel bizonyítását jelenti.

4. TÉTEL: *Legyen $\varepsilon>0$ elég kicsi. Az $f(x)$ n-edfokú polinom $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(k<n)$ gyökeit $\varepsilon$-nál kisebb hibával határoztuk meg. Legyenek a közelítések $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*$. Az ezen közelítéseket tartalmazó $g^*(x)$ polinommal $f(x)$-et leosztjuk (a maradék polinomot elhanyagoljuk), nyerünk egy $(n-k)$-adfokú $h^*(x)$ polinomot. Jelölje $x_{k+1}, \ldots, x_n$ $f(x)$ további gyökeit, és $x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*$ $h^*(x)$ gyökeit. Ekkor $k+1\leqq i\leqq n$ esetén fennáll, hogy*

$$|x_i-x_i^*| \leqq K^*\varepsilon^{\frac{1}{n-k}},$$

*ahol $K^*$ alkalmas állandó. A $K^*$ konstans csak $f(x)$-től, k-tól és az $x_1^*, \ldots, x_k^*$ gyök közelítésektől függ.*

*Bizonyítás:* Legyen a pontos $x_1, \ldots, x_k$ gyököket tartalmazó polinom $g(x)$ és legyen $h(x)=f(x)/g(x)$. Ekkor $h(x)$ gyökei $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Az 1. tétel alapján $g(x)$ és $g^*(x)$ együtthatóinak eltérésére fennáll, hogy

$$|b_i-b_i^*| \leqq \varepsilon \max_{1\leqq i\leqq k}\left\{\binom{k}{i}[(a^*+1)^i-a^{*i}]\right\} = \delta.$$

Legyen $\varepsilon>0$ olyan kicsi, hogy még $\delta\leqq 1$ is fennálljon. Ekkor a 3. és 2. Tételből adódik, hogy $h(x)$ és $h^*(x)$ együtthatóinak eltérése, ill. az együtthatók maximumára fennáll, hogy

$$|c_i-c_i^*| \leqq K\delta\{(2+L^*)^i-(1+L^*)^i\}$$

és

$$M_i^* \leqq K(1+L^*)^i.$$

Mivel $M_i\leqq K(1+L)^i \leqq K(1+\delta+L^*)^i \leqq K(2+L^*)^i$, így a 2. lemmában szereplő mennyiségeket a következőképpen választhatjuk meg:

$$\gamma_2 = 1+\frac{K(2+L^*)^{n-k}}{|a_0|},$$

és

$$\mu \leqq \sqrt[n-k]{\sum_{\nu=1}^{n-k}\frac{|c_\nu-c_\nu^*|}{|a_0|}\gamma_2^{n-k-\nu}},$$

így $|c_\nu - c_\nu^*|$ fenti becslését használva $h(x)$ és $h^*(x)$ gyökeinek eltérésére $i = k+1, \ldots, n$ esetére

$$|x_i - x_i^*| \leqq 2(n-k)\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{\nu=1}^{n-k} \frac{1}{|a_0|} K[(2+L^*)^\nu - (1+L^*)^\nu]\left[1+\frac{K(2+L^*)^{n-k}}{|a_0|}\right]^{n-k-\nu}\delta\right\}^{\frac{1}{n-k}} =$$

$$= 2(n-k)\left\{\frac{K}{|a_0|}\max_{1\leqq i\leqq k}\left[\binom{k}{i}((a^*+1)^i - a^{*i})\right]\sum_{\nu=1}^{n-k}[(2+L^*)^\nu - (1+L^*)^\nu]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[1+\frac{K(2+L^*)^{n-k}}{|a_0|}\right]^{n-k-\nu}\right\}^{\frac{1}{n-k}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{n-k}}$$

adódik. Az itt szereplő konstansban $a^*$, $L^*$ csak az $x_1^*, \ldots, x_k^*$ gyök közelítésektől, $K$, $a_0$ pedig az eredeti $f(x)$ polinomtól függ. Ezzel tételünket beláttuk.

1. Megjegyzés: A fenti becslés $\varepsilon$ nagyságrendje nem javítható. Ennek belátásához tekintsük a következő példát:

$$f(x) = x^2 - x, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Legyen $x_1^* = \varepsilon$, ekkor $g^*(x) = x - \varepsilon$. Ekkor pedig $h^*(x) = (x^2-x)/(x-\varepsilon) = x + (\varepsilon - 1)$, tehát $x_2^* = 1-\varepsilon$ és így $|x_2 - x_2^*| = \varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{2-1}}$.

2. Megjegyzés: Mivel az 1. és 3. tételben $g(x)$, $g^*(x)$, illetve a $h(x)$, $h^*(x)$ polinomok szerepe szimmetrikus, fennáll az

$$|x_i - x_i^*| \leqq Q\cdot\varepsilon^{\frac{1}{n-k}}$$

egyenlőtlenség is, ahol $Q$ az $f(x)$ polinomtól, $k$-tól, és az $x_1, \ldots, x_k$ pontos gyököktől függő konstans.

**2.** A gyakorlatban olyan becslésekre is szükség van, melyek a már kiszámított gyökök pontosságára vonatkoznak. A továbbiakban eljárást adunk a $g^*(x)$, $h^*(x)$ polinomok és az $x_1^*, \ldots, x_k^*, x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*$ közelítő gyökök ismeretében az

$$|x_{k+1} - x_{k+1}^*|, \ldots, |x_n - x_n^*|$$

mennyiségek becslésére.

Az előző gondolatmenetet követjük, egyes lépéseiben a becslések élesítésével. Legyen

$$g^*(x) = x^k + b_1^* x^{k-1} + \cdots + b_k^*$$
$$g(x) = x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k.$$

Mivel $r \leqq k$ esetén

$$|x_{i_1}x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_r} - x_{i_1}^* x_{i_2}^*\cdot\ldots\cdot x_{i_r}^*| = |(x_{i_1}^* - \varepsilon_{i_1})\cdot\ldots\cdot(x_{i_r}^* - \varepsilon_{i_r}) - x_{i_1}^*\cdot\ldots\cdot x_{i_r}^*| \leqq$$
$$\leqq (|x_{i_1}^*| + \varepsilon)\cdot\ldots\cdot(|x_{i_r}^*| + \varepsilon) - |x_{i_1}^*\cdot\ldots\cdot x_{i_r}^*|,$$

így

$$|b_r - b_r^*| \leqq \sum_{1\leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq k}\{(|x_{i_1}^*| + \varepsilon)\cdot\ldots\cdot(|x_{i_r}^*| + \varepsilon) - |x_{i_1}^*\cdot\ldots\cdot x_{i_r}^*|\} = \delta_r,$$

vagy $a^* = \max\limits_{1\leqq i\leqq k}\{|x_i^*|\}$ választással $\delta_r$ durván felülről becsülve:

$$\delta_r \leqq \binom{k}{r}[(a^*+\varepsilon)^r - a^{*r}].$$

Jelölje az $f(x)/g(x)$, ill. $f(x)/g^*(x)$ polinomosztásban szereplő $f_j(x)$, ill. $f_j^*(x)$ együtthatóit $a_0^j, a_1^j, \dots, a_{n-1}^j$, ill. $a_0^{j*}, a_1^{j*}, \dots, a_{n-j}^{j*}$. A polinomosztásból adódóan

$$\begin{aligned}
a_0^{j+1} &= a_1^j - b_1 a_0^j \\
a_1^{j+1} &= a_2^j - b_2 a_0^j \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{k-1}^{j+1} &= a_k^j - b_k a_0^j \\
a_k^{j+1} &= a_{k+1}^j \\
&\dots\dots\dots\dots \\
a_{n-j-1}^{j+1} &= a_{n-j}^j,
\end{aligned}$$

és hasonló igaz a *-gal jelölt együtthatókra is.

Legyen $0 \leqq i \leqq k-j-1$, ekkor

$$\begin{aligned}
|a_i^{j+1} - a_i^{j+1*}| &= |a_{i+1}^j - b_{i+1}a_0^j - a_{i+1}^{j*} + b_{i+1}^* a_0^{j*}| \leqq \\
&\leqq |a_{i+1}^j - a_{i+1}^{j*}| + |b_{i+1}^* a_0^{j*} - b_{i+1} a_0^{j*}| + |b_{i+1}a_0^{j*} - b_{i+1}a_0^j|.
\end{aligned}$$

Bevezetve az $\varepsilon_i^j = |a_i^j - a_i^{j*}|$ jelölést

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i^{j+1} &\leqq \varepsilon_{i+1}^j + |a_0^{j*}|\,|b_{i+1}^* - b_{i+1}| + |b_{i+1}| \cdot |a_0^{j*} - a_0^j| \leqq \\
&\leqq \varepsilon_{i+1}^j + \delta_{i+1}|c_j^*| + (|b_{i+1}^*| + \delta_{i+1})\varepsilon_0^j = \varepsilon_{i+1}^j + \delta_{i+1}(|c_j^*| + \varepsilon_0^j) + \varepsilon_0^j |b_{i+1}^*|,
\end{aligned}$$

$k \leqq i \leqq n-1$ esetén pedig

$$\varepsilon_i^{j+1} = |a_i^{j+1} - a_i^{j+1*}| = |a_{i+1}^j - a_{i+1}^{j*}| = \varepsilon_{i+1}^j.$$

Tudjuk, hogy $\varepsilon_i^0 = 0$ $(0 \leqq i \leqq n)$, hiszen

$$f_0(x) \equiv f_0^*(x) \equiv f(x).$$

Vezessük be az alábbi $E = (e_i^j)$ mátrixot, amelynek első sora

$$e_0^0 = e_1^0 = \dots = e_n^0 = 0,$$

a további sorokat pedig a következő rekurzív képletek adják: $0 \leqq i \leqq k-1$ esetén

$$e_i^{j+1} = e_{i+1}^j + \delta_{i+1}(|c_j^*| + e_0^j) + e_0^j |b_{i+1}^*|$$

$k \leqq i \leqq n-j-1$ esetén pedig

$$e_i^{j+1} = e_{i+1}^j.$$

Ekkor az $E$ mátrix trapéz alakú lesz, és elemeire nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$\varepsilon_i^j \leqq e_i^j.$$

Az $E$ mátrix $j+1$-edik sorának számításához csak a $j$-edik sor szükséges, ezért számítógépen számolva csak egy vektorral kell dolgoznunk, mely az $E$ mátrix éppen aktuális sorát tartalmazza. Mivel $c_j = a_0^j$ és $c_j^* = a_0^{j*}$, így $h^*(x)$, $h(x)$ együtthatóinak eltérése $|c_j - c_j^*| \leqq e_0^j$. Az $E$ mátrix minden sorának első eleme tehát becslést ad $h^*(x)$ megfelelő együtthatójának hibájára, így $E$ sorainak első elemét gépi számolás esetén külön vektorba kell gyűjtenünk.

Legyen
$$\gamma_1 = \max_{k+1 \leq i \leq n} \{|x_i^*|\}$$
és
$$\mu_1 = \left\{\sum_{j=1}^{n-k} \frac{e_0^j}{|a_0|} \gamma_1^{n-k-j}\right\}^{\frac{1}{n-k}}.$$

Az 1. lemma egyszerű következménye az alábbi tétel:

5. TÉTEL: *Amennyiben* $k+1 \leq i \neq j \leq n$ *esetén* $|x_i^* - x_j^*| > 2\mu_1$, *akkor* $h(x)$ *és* $h^*(x)$ *gyökeit lehet úgy számozni, hogy* $i = k+1, \ldots, n$ *esetén:*
$$|x_i - x_i^*| \leq \mu_1.$$

Ha az 5. tétel feltétele nem teljesül, a 2. lemmát használjuk. Legyen most
$$j_2 = k\left(\frac{|c_1^*| + e_0^1}{|c_0^*|}, \ldots, \frac{|c_{n-k}^*| + e_0^{n-k}}{|c_0^*|}\right),$$
$$\mu_2 = \left\{\sum_{j=1}^{n-k} \frac{e_0^j}{|a_0|} \gamma_2^{n-k-j}\right\}^{\frac{1}{n-k}}.$$

6. TÉTEL: $h(x)$ *és* $h^*(x)$ *gyökei számozhatók úgy, hogy* $i = k+1, \ldots, n$ *esetén*
$$|x_i - x_i^*| \leq 2(n-k)\mu_2.$$
*fennáljon.*

A $k(|c_1|, \ldots, |c_n|)$ függvényként választható pl. LAGRANGE nyomán a
$$2 \max\{1, |c_1|, |c_2|^{\frac{1}{2}}, \ldots, |c_n|^{\frac{1}{n}}\}$$
kifejezés vagy bármely, a feltételnek eleget tevő polinomgyökbecslő formula.

1. MEGJEGYZÉS: Az előbbiekben ismertetett eljárás pontosságát vizsgáljuk meg egy példán.

Legyen $f(x) = x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2$, ekkor $x_1 = x_2 = \varepsilon$. Legyen $x_1^* = 0$, ekkor $a^* = 0$, $n = 2$, $k = 1$,
$$g^*(x) = x$$
és
$$h^*(x) = x - 2\varepsilon.$$
Az eljárás szerint $\delta_1 = \binom{k}{1}[(a^* + \varepsilon)^1 - a^{*1}] = \varepsilon$ adódik. Az $E$ mátrix első sora
$$e_0^0 = e_1^0 = e_2^0 = 0,$$
és a rekurziós formula alapján
$$e_0^1 = e_1^0 + \delta_1(|c_0^*| + e_0^0) + e_0^0|b_1^*| = 0 + \varepsilon(1+0) + 0 \cdot 0 = \varepsilon.$$

Tehát a $h(x)$ és $h^*(x)$ elsőfokú polinomok konstans tagjainak eltérésére $\varepsilon$ felső becslés adódott.

Mivel
$$h(x) = x - \varepsilon,$$
$$h^*(x) = x - 2\varepsilon,$$
az eljárás együtthatók hibájára vonatkozó $e_0^j$ becslése nem javítható.

2. MEGJEGYZÉS. Az 5. tétel $|x_i^*-x_j^*|>2\mu_1$ $(i\neq j,\ k+1\leq i, j\leq n)$ feltétele teljesül abban az esetben, ha az $f(x)$ polinom $x_{k+1}, \dots, x_n$ gyökei különbözőek, és az $x_1, x_2, \dots, x_k$ gyökök hibáját mutató $\varepsilon>0$ elég kicsi.

3. MEGJEGYZÉS. Az 5. tételben nyert hibabecslés pontos. Tekintsük ismét az $f(x) = x^2-2\varepsilon x+\varepsilon^2$ polinomot. Az $|x_i^*-x_j^*|>2\mu_1$ feltétel nyilvánvalóan teljesül $h^*(x)$ elsőfokú polinom lévén.

$$\mu_1 = \left\{\sum_{j=1}^{n-k} \frac{e_0^j}{|a_0|} \gamma_1^{n-k-j}\right\}^{\frac{1}{n-k}} = \varepsilon_0^1 \gamma_1^0 = \varepsilon,$$

$$h(x) = x-\varepsilon,$$

$$h^*(x) = x-2\varepsilon,$$

így $x_2=\varepsilon$, $x_2^*=2\varepsilon$, azaz $|x_2-x_2^*| = \mu_1$.

A 6. tétel hibaformulája pontosságának igazolása nem is remélhető, hiszen a felhasznált tétel sem pontos.

A továbbiakban az eljárás ALGOL programját közöljük. Feltételezzük, hogy $f(x)$, $g^*(x)$, $h^*(x)$ együtthatóit az $a[0:n]$, $b[1:k]$, $c[0:(n-k)]$ vektorok tartalmazzák. Az $x_1^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*$ gyökközelítéseket az $x[1:n]$ vektor, az $\varepsilon$ számot pedig az eps változó jelenti.

```
PROCEDURE gyök (n, k, eps, x, a, c, ro);
VALUE       n, k, eps, ro;
REAL        eps, ro;
INTEGER     n, k;
BEGIN INTEGER i, j;
        REAL aa, u, v, w, gam, max, mue, hatv;
        ARRAY e[1:n], det[1:k], hiba [1:(n-k)];
aa:=x[1];
FOR i:=2 STEP 1 UNTIL k DO
IF x[i]>aa THEN aa:=x[i];
u:=v:=w:=1;
FOR i:=1 STEP 1 UNTIL k DO
BEGIN u:=u * (k-i+1)/i;
        v:=v * (aa+eps);
        w:=w * aa;
        delt [i]:=u * (v-w)
END;
FOR i:=0 STEP 1 UNTIL n DO
     e[i]:=0; hiba[0]:=0;
FOR j:=1 STEP 1 UNTIL n-k DO
BEGIN FOR i:=0 STEP 1 UNTIL k-1 DO
     e[i]:=e[i+1]+delt[i+1] * (abs (c[j-1])+hiba[j-1])+
          hiba[j-1] * abs(b[i+1]);
```

```
FOR i:=k STEP 1 UNTIL n-j-1 DO
      e[i]:=[i+1];
      hiba [j]:=e[0]
END;
      max:=aa;
FOR i:=k+1 STEP 1 UNTIL n DO
IF x[i]>max THEN max:=x[i];
      gam:=max+eps;
      mue:=0; hatv:=1;
FOR i:=n-k STEP -1 UNTIL 1 DO
BEGIN mue:=mue+hiba[i] * hatv;
        hatv:=hatv * gam
END;
      mue:=mue/abs(a[0]);
      mue:=mue ↑ (1/(n-k));
      ro:=2 * (n-k) * mue
END END gyök;
```

## IRODALOM


[1] A. M. Ostrowski: *Solution of equations and systems of equations*, Academic Press, 1960.
[2] A. M. Ostrowski: Recherches sur la méthode de Gräffe et les zéros des polinômes et des séries de Laurent, *Acta Math.* 72 (1940) 99—257.


(Beérkezett: 1970. V. 29.)

## ON REDUCTIONAL ERRORS OF ROOTS OF POLYNOMIALS

by
F. Szidarovszky

Summary

$x_1^*, \ldots, x_k^*$ $(k<n)$ are the approximations (with error $\varepsilon$) of $k$ roots of a polinomail $f(x)$ of $n-th$ degree. Deviding $f(x)$ with the polinomial $g^*(x)=(x-x_1^*)\ldots(x-x_k^*)$ we get a polinomial of $(n-k)-th$ degree. It is proved in the paper, when $\varepsilon$ is little enaugh, then we can indice the roots $x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*$ of this polinomial and the other roots $x_{k+1}, \ldots, x_n$ of $f(x)$ so, that for $i=k+1, \ldots, n$ $|x_i-x_i^*|\leq K\cdot\varepsilon^{\frac{1}{n-k}}$ is true, when $K$ is a constant. In the paper there is an estimation of $K$. Knowing the approximations of all roots of $f(x)$ we could make a better estimation of the error of the roots $x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*$.

In the case, when the roots are different numbers and the distances among them are sufficient large, this estimation could be corrected, and in this paper there is an example, where instead of unequality there is equation. At the end of the paper there is the program of the procedure of estimation written is ALGOL 60.

# VALÓS GYÖKÖKKEL RENDELKEZŐ POLINOMOK GYÖKEINEK MEGHATÁROZÁSA NEWTON MÓDSZERÉVEL

Írta: SZIDAROVSZKY FERENC

I

**1.** Legyen $f(x)$ $n$-edfokú polinom. Tegyük fel, hogy $f(x)$ minden gyöke valós. Legyenek ezen gyökök $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Számozzuk úgy a gyököket, hogy fennálljon

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n .$$

Legyen $x_0$ olyan valós szám, mely $f(x)$ legnagyobb gyökénél is nagyobb, vagyis $x_0 > \alpha_n$.

Az $x_0$ kezdeti közelítésből készítjük el az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{1}$$

*Newton*-sorozatot.

Jelöljük $i=1, 2, \ldots, n$; $k=0, 1, 2, \ldots$ esetén

$$\alpha_i^{(k)} = x_k - \alpha_i .$$

Bebizonyítjuk a következő segédtételt:

LEMMA: $i=1, 2, \ldots, n$; $k=0, 1, 2, \ldots$ *esetén valamennyi* $\alpha_i^{(k)}$ *szám pozitív.*

*Bizonyítás:* $k$-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

$k=0$ esetén az állítás

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n < x_0$$

következtében nyilvánvalóan igaz.

Tegyük fel, hogy $k$-ra igaz az állítás és tekintsük $\alpha_n^{(k+1)}$-et. (1) mindkét oldalából $\alpha_n$-et kivonva nyerjük, hogy

$$\alpha_n^{(k+1)} = \alpha_n^{(k)} - \frac{(x_k-\alpha_1)\cdot \ldots \cdot (x_k-\alpha_n)}{\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x_k-\alpha_j)} = \alpha_n^{(k)} - \frac{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j^{(k)}} \tag{2}$$

(2) jobb oldalának második tagját egyszerűsítsük le a

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_1^{(k)} > 0$$

mennyiséggel, nyerjük az

$$\alpha_n^{(k+1)} = \alpha_n^{(k)} - \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1^{(k)}} + \frac{1}{\alpha_2^{(k)}} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n^{(k)}}} = \alpha_n^{(k)} \frac{\frac{1}{\alpha_1^{(k)}} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{n-1}^{(k)}}}{\frac{1}{\alpha_1^{(k)}} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n^{(k)}}} > 0$$

összefüggést. Mivel így $x_{k+1} > \alpha_n$, ezért

$$x_{k+1} > \alpha_n \geqq \alpha_{n-1} \geqq \cdots \geqq \alpha_1$$

következtében

$$\alpha_i^{(k+1)} > 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ esetén is.}$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

1. TÉTEL: *Fennáll a következő egyenlőtlenség*

$$\alpha_n^{(k)} \leqq \left(\frac{n-1}{n}\right)^k \alpha_n^{(0)} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k (x_0 - \alpha_n),$$

*vagyis*

$$x_k \to \alpha_n.$$

*Bizonyítás:* Az állítás igazolásához tekintsük az $\alpha_n^{(k)}$ számot:

$$\alpha_n^{(k)} = \alpha_n^{(k-1)} - \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_n^{(k-1)}} + \cdots + \dfrac{1}{\alpha_1^{(k-1)}}} \leqq \alpha_n^{(k-1)} - \frac{1}{\dfrac{n}{\alpha_n^{(k-1)}}},$$

hiszen

$$\alpha_n^{(k-1)} \leqq \alpha_{n-1}^{(k-1)} \leqq \cdots \leqq \alpha_1^{(k-1)}.$$

Így

$$\alpha_n^{(k)} \leqq \frac{n-1}{n} \alpha_n^{(k-1)} \leqq \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \alpha_n^{(k-2)} \leqq \cdots \leqq \left(\frac{n-1}{n}\right)^k \alpha_n^{(0)}.$$

1. MEGJEGYZÉS: A becslés nem élesíthető. Ennek belátásához tekintsük az

$$f(x) = x^n$$

polinomot. Legyen $x_0 > 0$ tetszőleges szám.

A *Newton*-iteráció formulájából

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^n}{n \cdot x_{k-1}^{n-1}} = \frac{n-1}{n} x_{k-1} = \cdots = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k x_0.$$

2. MEGJEGYZÉS: A fenti hibabecslés közvetlenül nem használható, hiszen az $\alpha_n^{(0)} = x_0 - \alpha_n$ kifejezésben $\alpha_n$ szerepel, melyet nem ismerünk. Olyan hibabecslésre van tehát szükségünk, melyben ismeretlen gyök nem szerepel. Ilyen formulát ad meg a következő tétel.

2. TÉTEL:

$$\alpha_n^{(k)} \leqq n[x_k - x_{k+1}]$$

*Bizonyítás:* A *Newton*-iteráció formulájából nyerjük, hogy

$$x_k - x_{k+1} = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_n^{(k)}} + \cdots + \dfrac{1}{\alpha_1^{(k)}}} \geqq \frac{1}{\dfrac{n}{\alpha_n^{(k)}}} = \frac{\alpha_n^{(k)}}{n},$$

amelyből a tétel állítása átrendezéssel adódik.

KÖVETKEZMÉNY: $\alpha_n^{(k)} \leqq (n-1)[x_{k-1}-x_k]$, hiszen

$$\alpha_n^{(k)} \leqq \frac{n-1}{n}\alpha_n^{(k-1)} \leqq \frac{n-1}{n} n[x_{k-1}-x_k] = (n-1)[x_{k-1}-x_k].$$

MEGJEGYZÉS: A fenti becslés sem élesíthető. Tekintsük ismét az $f(x)=x^n$ polinomot és $x_0>0$ kezdeti közelítést. Ekkor

$$(n-1)[x_{k-1}-x_k] = (n-1)\left[\frac{n}{n-1}x_k-x_k\right] = x_k = \alpha_n^{(k)}$$

**2.** Feltéve, hogy az $f(x)$ polinom minden gyöke valós, eljárást adunk $f(x)$ valamennyi gyökének közelítő meghatározására.

Tegyük fel, hogy adott olyan $A$ valós szám, mely $f(x)$ valamennyi gyökénél nagyobb.

Ilyen számot könnyen találhatunk. Legyen

$$f(x) = a_0x^n+\dots+a_{n-1}x+a_n.$$

Ekkor a gyökök abszolút értékének ismert becsléséből adódik, hogy

$$\alpha_i = 1+\frac{\max\limits_{1\leq i\leq n}|a_i|}{|a_0|}.$$

A polinomok pozitív gyökeinek ismert becsléséből nyerjük, hogy

$$\alpha_i \leqq 1+\sqrt[m]{\frac{\max\limits_{a_k<0}|a_k|}{a_0}},$$

amennyiben $a_0>0$ és $a_m$ az első negatív együttható.

$x_0=A$ kiinduló közelítésből a *Newton*-módszer konvergál $\alpha_n$-hez. $f(x)$-et a már meghatározott $(x-\alpha_n)$ gyöktényezővel leosztjuk. A hányados polinom legnagyobb gyökét $x_0=\alpha_n$ kezdeti közelítéstől határozzuk meg. $(x-\alpha_{n-1})$-nel ismét leosztunk, és í. t.

Az eljárás során $n-1$ leosztás után $\alpha_1$-re elsőfokú polinomot kapunk, melyet könnyen megoldhatunk.

**3.** Az első lépés során $\alpha_n$-et csak közelítőleg határozzuk meg, így közelítő $(x-\alpha_n)$ polinommal osztunk le. Így a hányados polinom (a maradék polinomot elhanyagoltuk) gyökei nem egyeznek meg pontosan

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\text{-gyel.}$$

A közelítő gyöktényezővel való leosztás után a gyökök eltolódhatnak. A gyökök eltolódásának mértékéről szól a következő tétel [1]:

TÉTEL: *Legyen $f(x)$ n-edfokú polinom. Legyenek*

$$x_1^*, \dots, x_k^* \quad az \quad f(x) \quad x_1, \dots, x_k \quad (k<n)$$

*gyökének közelítései. Tegyük fel, hogy $i=1, 2, \dots, k$ esetén*

$$|x_i-x_i^*| \leqq \varepsilon,$$

*ahol ε elég kicsi pozitív szám. Legyen*

$$g^*(x) = (x-x_1^* \cdot \dots \cdot (x-x_k^*),$$

*és*

$$h^*(x) = f(x)/g^*(x)$$

*(a maradék polinomot elhanyagoltuk). Jelölje*

$$x_{k+1}^*, \dots, x_n^* \quad h^*(x)$$

*gyökeit, és*

$$x_{k+1}, \dots, x_n \quad f(x)$$

*további gyökeit. Ekkor $h^*(x)$ és $f(x)$ gyökeit lehet úgy számozni, hogy $i = k+1, \dots, n$ esetén fennálljon*

$$|x_i - x_i^*| \leqq K \cdot \varepsilon^{\frac{1}{n-k}},$$

*ahol K alkalmas állandó.*

A tétel ε nagyságrendjét pontosan adja meg. Ugyancsak az [1] dolgozat a közelítő gyökök ismeretében eljárást is ad az $|x_i - x_i^*|$ $(i = k+1, \dots, n)$ mennyiségek pontosabb megbecslésére.

**4.** Legyen $\alpha_n^*$ az első lépés során nyert közelítése $\alpha_n$-nek. Tegyük fel, hogy

$$|\alpha_n^* - \alpha_n| \leqq \varepsilon$$

mely a 2. tétel következtében nyilvánvalóan teljesül, ha $\alpha_n$ két egymásutáni közelítése $\varepsilon/(n-1)$-nél nem nagyobb.

Osszuk el az $f(x)$ polinomot az $(x-\alpha_n^*)$ gyöktényezővel. Nyerünk egy $f_1^*(x)$ $n-1$-edfokú polinomot, mely gyökeinek $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$-től való eltérése kisebb, mint $K_1 \cdot \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} = \varrho_1$.

Tegyük fel, hogy $f_1^*(x)$ gyökei is valósak, ekkor $f_1^*(x)$ legnagyobb gyökére nyilvánvalóan fennáll, hogy nem nagyobb, mint

$$\alpha_n + \varrho_1 \leqq \alpha_n^* + \varrho_1,$$

vagyis $\alpha_n^* + \varrho_1$ kezdeti közelítésből kiindulva az $f_1^*(x)$ polinom *Newton*-sorozata $f_1^*(x)$ legnagyobb gyökéhez konvergál. Tegyük fel, hogy az iterációt addig végeztük, míg $f_1^*(x)$ legnagyobb gyökét ε-nál kisebb hibával határoztuk meg. Legyen ez a közelítés $\alpha_{n-1}^*$. Az elmondottak szerint

$$|\alpha_{n-1}^* - \alpha_{n-1}| \leqq \varepsilon + \varrho_1 = \varepsilon_1.$$

Az $(x-\alpha_{n-1}^*)$ gyöktényezővel leosztjuk $f_1^*(x)$-et, nyerünk egy $f_2^*(x)$, $n-2$-edfokú polinomot. $f_2^*(x)$ gyökeinek $f_1^*(x)$ többi gyökétől való eltérése kisebb, mint

$$K_2 \cdot \varepsilon^{\frac{1}{n-2}} = \varrho_2.$$

Az eljárást addig folytatjuk, míg egy $f_{n-1}^*(x)$ elsőfokú polinomot nem nyerünk, melyet könnyen megoldhatunk.

Jelölje az egyes polinomok legnagyobb gyökének *Newton*-iterációval nyert közelítését

$$\alpha_n^*, \alpha_{n-1}^*, \dots, \alpha_2^*, \alpha_1^*.$$

Ekkor az előzőek szerint

$$|\alpha_n^* - \alpha_n| \leqq \varepsilon$$
$$|\alpha_{n-1}^* - \alpha_{n-1}| \leqq \varepsilon + \varrho_1 = \varepsilon_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$|\alpha_1^* - \alpha_1| \leqq \varepsilon + \varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_{n-1} = \varepsilon_{n-1}.$$

Ezen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$ mennyiségeket az [1] dolgozat eljárásával könnyen megbecsülhetjük, így a már kiszámított közelítő gyökök hibáját meghatározhatjuk.

Ha $\varepsilon$ elég kicsi, akkor

$$\varrho_1 = K_1 \varepsilon^{\frac{1}{n-1}}$$
$$\varrho_2 = K_2 \varepsilon^{\frac{1}{n-2}}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\varrho_{n-1} = K_{n-1} \varepsilon^1,$$

így az $\alpha_{n-1}^*, \dots, \alpha_1^*$ gyökközelítések hibája $\varepsilon^{\frac{1}{n-1}}$ nagyságrendű.

**5.** A módszer alkalmazhatóságának feltétele az, hogy a közelítő gyöktényezőkkel rendre leosztott $f_1^*(x), \dots, f_{n-1}^*(x)$ polinomoknak is minden gyöke valós legyen.

Ez a feltétel nem igaz minden további nélkül akkor sem, ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi. Így $f(x)$ gyökeire is kell kikötést tennünk.

Ennek belátására tekintsük a következő példát: $f(x) = x^3$, ekkor $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Közelítse $\varepsilon$ $f(x)$ gyökét. Osszunk le az $(x-\varepsilon)$ gyöktényezővel, egy $x^2 + \varepsilon x + \varepsilon^2 = f_1^*(x)$ polinomot nyerünk, mely diszkriminánsa

$$D = -3\varepsilon^2 < 0.$$

Tehát bármely $\varepsilon > 0$ számot is választunk, $(x-\varepsilon)$-nal való leosztás után $f(x)$ gyökei komplexekké válnak.

3. TÉTEL: *Ha $f(x)$ gyökei különböző valós számok, és $\varepsilon > 0$ elég kicsi, akkor a közelítő gyökök gyöktényezőivel sorra leosztott polinomoknak is minden gyökük valós, és különböző lesz.*

*Bizonyítás:* Elég csak azt megjegyeznünk, hogy $\varepsilon \to 0$ esetén

$$\varrho_1 \to 0, \ \varrho_2 \to 0_1, \dots, \varrho_{n-1} \to 0.$$

Tehát ha $\varepsilon$ elég kicsi, $f_1^*(x), \dots, f_{n-1}^*(x)$ gyökei különbözőek maradnak, hiszen gyökeinek $f(x)$ különböző $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gyökeitől való eltérésük 0-hoz tart. Így $f_1^*(x), \dots, f_{n-1}^*(x)$ gyökei valósak is, hiszen a konjugált komplex gyökök abszolút értéke megegyezik.

**6.** A módszer minden további nélkül használható szimmetrikus mátrixok legnagyobb, vagy legkisebb sajátértékének kiszámítására.

Legyen $A$ szimmetrikus mátrix, $f(x)$ karakterisztikus polinommal. $A$ legnagyobb sajátértéke $f(x)$ legnagyobb gyöke. $f(-x)$ legnagyobb gyöke ellentettje $A$ legkisebb sajátértéke. Így elegendő csak a legnagyobb sajátérték esetével foglalkoznunk.

Ismeretes, hogy $A$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sajátértékei valósak és $i=1, 2, \ldots, n$ esetén

$$|\lambda_i| \leqq \|A\|,$$

ahol vehető

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

és

$$\|A\| = \{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2\}^{1/2}.$$

Vegyük az $x_0=\|A\|$ kezdeti közelítést. A Newton-módszer hibaformulájából (1. tétel)

$$0 < x_k - \lambda_n \leqq \left(\frac{n-1}{n}\right)^k (x_0 - \lambda_n)$$

adódik, ahol $\lambda_n$ az $A$ mátrix legnagyobb sajátértéke.

Nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$0 < x_k - \lambda_n \leqq \left(\frac{n-1}{n}\right)^k 2\|A\|,$$

így

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^k 2\|A\| < \varepsilon$$

esetén már $x_k$ $\varepsilon$-nál kisebb hibával fogja $\lambda_n$-et közelíteni. Ez akkor teljesül, ha

$$k > \frac{\log(2\|A\|) - \log \varepsilon}{\log n - \log(n-1)}.$$

Így a számítás megkezdése előtt megbecsülhető a szükséges iterációs lépések száma.

Az $A$ mátrix többi sajátértékének számításakor már a polinom összes gyökei számításakor tett feltételnek teljesülnie kell.

**7.** Amennyiben az $x_0$ kezdeti közelítés $f(x)$ legkisebb $\alpha_1$ gyökénél is kisebb, akkor az 1. és 2. tételhez hasonlóan látható be, hogy a *Newton*-iteráció konvergens, és $\alpha_1$-hez tart. Így az $f(x)$ polinom gyökeinek közelítéseit a legkisebb gyökön át $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ sorrendben is képezhetjük.

Az így nyert közelítések hibájának $\varepsilon$ nagyságrendje

$$\varepsilon^{\frac{1}{n-1}}$$

**8.** Legyen $x_0 > \alpha_n$, ekkor az $x_0$ kezdeti közelítésből kiinduló *Newton*-iteráció $\alpha_n$-hez tart. Legyen $\alpha_n^*$ $\alpha_n$ olyan közelítése, melyre $|\alpha_n^* - \alpha_n| \leqq \varepsilon$. Ezek után vegyünk $\alpha_1$-nél kisebb kezdeti közelítést. Az ebből képezett Newton-sorozat $\alpha_1$-hez tart, így $\alpha_1$ tetszőleges pontossággal meghatározható. Legyen $\alpha_1^*$ $\alpha_1$ olyan közelítése, melyre

$$|\alpha_1^* - \alpha_1| \leqq \varepsilon.$$

Osszuk el az $f(x)$ polinomot az

$$(x-\alpha_1^*)(x-\alpha_n^*)$$

másodfokú polinommal. Ekkor az

$$f(x)/((x-\alpha_1^*)(x-\alpha_n^*))$$

hányados polinom gyökeinek $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$-től való eltérése kisebb, mint $K^* \varepsilon^{\frac{1}{n-2}}$.

Ugyanezt alkalmazva a hányados polinomra ismét egyszerre 2-vel csökkentjük a polinom fokszámát.

Az eljárást addig folytatjuk, míg első- vagy nulladfokú polinomot kapunk. A 3. és 4. pont alapján könnyen belátható, hogy az ezen a módon meghatározott $\alpha_2^*, \ldots, \alpha_{n-1}^*$ gyökközelítések hibájának $\varepsilon$ nagyságrendje $\varepsilon^{\frac{1}{n-2}}$.

## IRODALOM

[1] SZIDAROVSZKY F.: Polinomok gyökeinek redukciós hibáiról (sajtó alatt)
[2] A. M. OSTROWSKI: Solution of equations and systems of equations, Academic Press 1960
[3] A. OSTROWSKI: Recherches sur la méthode de Gräffe et les zéros des polinomes et des séries de Laurent, *Acta Math.*, 72 (1940) 99—257.

(Beérkezett: 1970. V. 30.)

## DETERMINATION OF POLYNOMIALS, POSSESSING REAL ROOTS BY MEANS OF NEWTON'S METHOD

by
F. SZIDAROVSZKY

### Summary

Let be every root of a polinomial $f(x)$ of $n$-th degree with real coefficients real numbers, and the first member of the $x_0, x_1, \ldots$ *Newton*-serious greater than every root of $f(x)$. In this case the *Newton*-serious converges to the greatest root of $f(x)$, and the speed of this convergention equals with that of a geometrical serious. The Theorem 2 proposes an estimation for the error of $x_k$ applying the value of $(x_k - x_{k-1})$. After deviding $f(x)$ with the polinomial $(x-x^*)$ (where $x^*$ is the approximation of the largett root of $f(x)$) we get a polinomial of $(n-1)$-th degree. The roots of this polinomial are not equal to the other roots of $f(x)$. In the paper there is an estimation for their error based on [1]. The same procedure can be applied for this polinomial and so on resulting a polinomial of first degree. The above procedure can be applied for the calculation of the largest or the least eigenvalues of symmetric matrices.

# EGY TÉRKITÖLTÉSI FELADAT

Írta: FRELLER MIKLÓS

Ha egy négyzetet minden oldalára tükrözünk, akkor a kapott négyzetek az eredetivel együtt ún. síkbeli keresztet alkotnak. Könnyű belátni, hogy a sík lefedhető ilyen síkbeli keresztekkel egyrétűen és hézagtalanul. A lefedő keresztek centrumai olyan paralelogramma-rácsot alkotnak, mely 5 egység területű elemi paralelogrammákból (mégpedig négyzetekből) áll, feltéve, hogy egységnégyzetből indultunk ki.

Ha egy kockát a lapjaira tükrözünk, akkor az így nyert 6 kocka az eredetivel együtt ún. *térbeli keresztet* alkot. KÁRTESZI FERENC *Szemléletes geometria* c. könyvében szerepel a következő feladat: kitölthető-e a tér ilyen típusú keresztekkel egyrétűen és hézagtalanul? Az alábbiakban megmutatjuk, hogy *ilyen kitöltés lehetséges*, egyúttal felvetjük a probléma egy lehetséges általánosítását.

Vegyünk fel a célból egy derékszögű koordináta-rendszert, és tekintsük a térbeli alaprácsnak azt a részpontrácsát, melynél egy elemi paralelepipedont a $\mathbf{v}_1(1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2(0, 1, -2)$ és $\mathbf{v}_3(-1, 2, 0)$ helyvektorok feszítenek ki. Rendeljünk az így nyert paralelepipedon-rács minden rácspontjához egy olyan egységkockákból álló keresztet, melynek ez a rácspont a centruma, tengelyei pedig a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. Mind az elemi paralelepipedonok, mind a keresztek térfogata 7 egység. *Állítjuk, hogy az így elhelyezett keresztek egyrétűen és hézagtalanul kitöltik a teret.* Ehhez elég azt megmutatni, hogy egy tetszőleges paralelepipedon csúcsaiban elhelyezett keresztek egyrétűen és hézagtalanul kitöltik a szóban forgó paralelepipedont. Ez viszont azzal ekvivalens, hogy egyfelől a paralelepipedon 8 csúcsában elhelyezett keresztek paralelepipedonba nyúló részeinek térfogatösszege szintén 7 egység, másrészt, hogy a paralelepipedon egyetlen az alaprácshoz tartozó rácspontját sem tartalmazhatja egynél több kereszt.

Az általánosság megszorítása nélkül vizsgálhatjuk a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedont. Tekintsük tehát a paralelepipedon 8 csúcsába elhelyezett keresztek paralelepipedonba nyúló részeit, majd azt a 8 térfogatelemet, melyre a paralelepipedon valamely csúcsában találkozó 8 paralelepipedon az e csúcsban elhelyezett keresztet feldarabolja. Nyilvánvaló, hogy a két rendszer között létesíthető olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés, melynél az egymásnak megfelelő keresztdarabok kongruensek, hiszen az egy csúcsban találkozó 8 paralelepipedon-szöglet az eredeti paralelepipedon minden szögletét reprezentálja, mégpedig pontosan egyszer. Ezzel beláttuk, hogy a keresztek paralelepipedonba nyúló részeinek térfogatösszege valóban egy kereszt térfogatával egyenlő.

Állítjuk továbbá, hogy a szóban forgó paralelepipedon egyetlen rácspontját sem tartalmazhatja egynél több kereszt. Egy kereszt által tartalmazott rácspont koordinátái ugyanis vagy azonosak a kereszt centrumának koordinátáival, vagy azokból úgy származtathatók, hogy az egyik koordinátát $\pm 1$-gyel megváltoztatjuk, a többit pedig változatlanul hagyjuk. Ha tehát két különböző kereszt ugyanazt a rácspontot tartalmazná, akkor az egyik kereszt centrumának koordinátáiból úgy kaphatnánk meg a másik centrumának koordinátáit, hogy vagy legfeljebb két koordinátát változtatnánk meg $\pm 1$-gyel, vagy csak egy koordinátát $\pm 2$-vel. Ekkor azonban a két kereszt centrumának távolsága $\sqrt{2}$ vagy 2 volna, ami esetünkben nem teljesül.

A probléma kézenfekvő általánosítása: igaz marad-e a tétel megfelelője tetszőleges $n>3$ dimenziójú térben is? Sejtjük, hogy igen, és hogy az egységkockákból álló keresztek centrumai ekkor olyan paralelotóp-rácsot alkotnak, mely $(2n+1)$ egység térfogatú elemi paralelotópokból áll.

(Beérkezett: 1970. VI. 20.)

## EIN AUSFÜLLUNGSPROBLEM DES RAUMES

von

M. FRELLER

Zusammenfassung

Wir spiegeln einen Würfel auf seine Seitenflächen. Die so erhalteten 6 Würfel bilden mit dem ursprünglichen Würfel ein sogenanntes „Raumkreuz". In diesem Artikel zeigen wir, dass der Raum mit solchen „Kreuzen" einschichtig und lückenlos ausfüllbar ist. Wir ahnen, dass ein analoger Satz für einen beliebigen $n(>3)$-dimensionalen Raum gültig ist.

# VÉGES MÖBIUS-SÍKOK MINT EGY KOMBINATORIKAI SZÉLSŐÉRTÉK-FELADAT MEGOLDÁSAI

*Rédei László hetvenedik születésnapjára*

Írta: KÁRTESZI FERENC

Alig múlt még negyedszázada, hogy KERÉKJÁRTÓ *Projektív geometria* c. könyvének bevezetésében, a klasszikus körgeometria, vagyis a *Möbius*-síkgeometria érdekes voltára irányította a magyar olvasók figyelmét. A könyv 393—394. oldalán is a körgeometria egyik alapvető tételével, a *Miquel*-tétellel foglalkozik. Azóta a véges geometriák hatalmas iramú fejlődése során már a véges körgeometriákról szóló dolgozatoknak is gazdag sokasága jelent meg.

A *Möbius*-síkok megalapozására többféle axiómarendszer is szerepel az irodalomban. Ebben a dolgozatban azt az axiómarendszert választjuk alapul, amelyben a *Möbius*-síkot véges ponthalmaznak tekintjük, és e halmaz bizonyos részhalmazai a körök. Két kör akkor *érinti* egymást, ha egyetlenegy közös pontjuk van. Axiómarendszerünk mármost a következő:

$K_1$: Minden körnek van pontja.

$K_2$: Bármely 3 pont egyetlenegy kört határoz meg, mint annak a körnek pontjai.

$K_3$: Ha $c$ kör egy pontja $P$, és a $Q$ pont $c$-nek nem pontja, akkor egyetlenegy $c^*$ kör van, mely $c$-t $P$-ben érinti és áthalad a $Q$ ponton $(:Q \in c^*)$.

$K_4$: Van 4 pont, hogy hármanként négy különböző kört határoznak meg.

Erre az axiómarendszerre röviden a **K** jelöléssel utalunk. Az ez ideig megkonstruált *Möbius*-síkok olyanok, hogy szerkezetüket a következő paraméterek jellemzik:

$M1$: A sík $q^2+1 = n$ számú pontból áll.

$M2$: Köreinek száma $q(q^2+1) = m$.

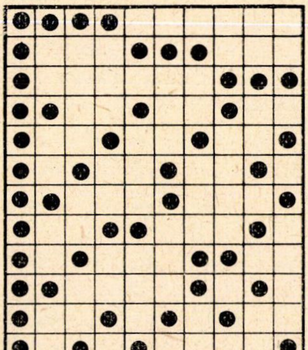
$M3$: Minden kör $q+1$ számú pontból áll.

$M4$: Az egy ponton áthaladó körök száma $q(q+1)$.

$M5$: A két ponton áthaladó körök száma $q+1$.

A $q=p^r$ itt törzsszámhatványt jelent, és *q-adrendű* a sík.

A **K** által definiált legkisebb nem triviális *Möbius*-síkot ábrapéldánk — illeszkedési táblaként — szemlélteti. A tábla oszlopait rendre $P_0$-, $P_1$-, ..., $P_9$-cel jelöljük, és *pontoknak* tekintjük. A tábla sorait rendre $c_1$-, $c_2$-, ..., $c_{30}$-cal jelöljük, és *köröknek* tekintjük. Egy $P_j$ oszlop és egy $c_k$ sor kereszteződési mezejében álló ● jel értelme: $P_j \in c_k$; más szóval a $P_j$ pont a $c_k$ körnek pontja. Az üres kereszteződési mező pedig azt jelenti, hogy $P_j \notin c_k$. Könnyen ellenőrizhető akár az, hogy ábrapéldánk megfelel a $K_1$—$K_4$ axiómáknak, akár az, hogy rendelkezik az $M1$—$M5$ tulajdonságokkal, ha $q=3$.



$$\cong \begin{pmatrix}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
1&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
1&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\
1&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\
1&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
1&0&0&1&1&0&0&0&1&0\\
1&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\
1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&1&0&1&0&1&0&0\\
1&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&1&1&0&1&1&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&1&0&0&1\\
0&1&1&0&0&0&0&1&1&0\\
0&1&0&1&1&0&1&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\
0&1&0&0&1&0&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&1&0&0\\
0&0&1&1&0&1&1&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&1&1\\
0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&1&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&1&1&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&1&1&0&1&1
\end{pmatrix}$$

Tekintsük az illeszkedési táblával ekvivalens *incidencia-mátrixot*, vagyis azt a mátrixot, amely úgy származik a táblából, hogy minden üres mezőbe 0-t, minden ● jel helyett pedig 1-est írunk. Egy $\Theta(\omega; m, n)$ illeszkedési táblán olyan $m\times n$ típusú táblát értünk, melyben a $P_j$, $P_k$ oszlopot pontosan $\omega_{jk}$ számú sor egyaránt ● jellel ellátott mezőben keresztez, és $\max(\omega_{jk})=\omega$. Jelölje a táblában szereplő ● jelek számát $\eta$; a $c_j$ sorban szereplő jelek számát jelölje $\lambda_j$, a $P_k$ oszlopban szereplő jelek számát jelölje $\lambda_j$, a $P_k$ oszlopban szereplő jelekét pedig $\pi_k$, és legyen $\max(\lambda_j)=\nu$, $\max(\pi_k)=\mu$.

Ilyen jelölésmód esetében a $\Theta(\omega; m, n)$ incidencia-mátrixot aritmetikai fogalmakkal definiálhatjuk: olyan $m$-sorú, $n$-oszlopú incidencia-mátrix, melynek van $\omega$-sorú 2 oszlopú olyan részmátrixa, melyben minden elem 1-es, de $(\omega+1)$-sorú ilyen részmátrixa nincs.

Ismeretes az $\eta$, $\omega$, $m$, $n$ számok közti — elemi módon könnyen bizonyítható — következő egyenlőtlenség — [1] — :

$$\eta \leqq \frac{1}{2}\left(m+\sqrt{4\omega m n(n-1)+m^2}\right),$$

ahol az egyenlőség akkor és csak akkor következik be, ha

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=v \quad \text{és} \quad \omega_{12}=\omega_{13}=\cdots=\omega_{n-1,n}=\omega,$$

sőt ebből a kettős feltételből már az is következik, hogy

$$\pi_1=\pi_2=\cdots=\pi_n=\mu.$$

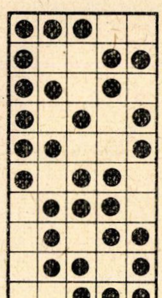
Az idézett tétel birtokában nyilvánvaló, hogy a véges *Möbius*-síkok a következő szélsőérték-feladat megoldását szolgáltatják:[1] *ha* $n = q^2+1$, $m = q(q^2+1)$, $\omega = q+1$, *akkor* $\eta$ *maximális, mégpedig*

$$\eta = q(q+1)(q^2+1).$$

A megfelelő $\Theta(\omega; m, n)$ extremális táblák előállítására egyszerű utasítás adható: a $GF(q)$-en — vagyis a $q$ számú elemből álló testen — mint koordinátatesten meghatározott háromdimenziós térben, ha $q$ páratlan, az

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = x_4^2$$

kvádrikát tekintjük. Ez $q^2+1$ pontból áll; az így értelmezett pontalakzat egy *ovoid*. Síkmetszetei, vagyis legalább két pontban metsző síkra eső pontjai *oválisok*, minden ilyen ovális $q+1$ számú pontból áll. Kiragadjuk az ovoid $q^2-q$ számú, az $x_4=0$ síkra nem illeszkedő pontjainak bármelyikét, s abból mint vetítőpontból az ovoidot az $x_4=0$ síkra sztereografikusan leképezzük. A síkot *Möbius*-síkká alakítjuk oly módon, hogy a vetítőpontbeli érintősík és a képsík metszésvonalának $q+1$ számú pontját egynek tekintjük, a sík egyetlen ideális pontjának.



Ha $q$ páros, vagyis $q=2^r$, akkor az előbbi kvadrika degenerált; hogy ovoidot definiáljunk, az

$$x_1x_2+x_3x_4+\varrho x_3^2+\varrho x_4^2 = 0$$

kanonikus egyenlettel kell dolgoznunk, ahol a $\varrho\in GF(2^r)$ és olyan, hogy azzal a $\varrho x^2+x+x\varrho = 0$ polinom irreducibilis legyen a $GF(2^r)$-ben. Egyébként az előbbi eljárás érvényes.

[1] REIMAN I. vette észre, hogy a véges projektív síkok a következő szélsőérték-feladat megoldásait szolgálják: ha $n = q^2+q+1$, $m = q^2+q+1$ és $\omega = 1$, akkor $\eta$ maximális, mégpedig

$$\eta = (q+1)(q^2+q+1).$$

## IRODALOM

[1] C. HYLTÉN—CAVALLIUS: On a combinatorical problem, *Coll. Math.* 6 (1958), 59—65.

(Beérkezett: 1970. VII. 16.)

# SU UNA PROPRIETÀ ESTREMALE DEI PIANI FINITI DI MÖBIUS

F. KÁRTESZI

*(Dedicato al Prof. L. RÉDEI in occasione del suo 70° compleanno.)*

# EGY TELJESEN VÉLETLEN MEGBÍZHATÓSÁGI JELLEGŰ KÉSZLETMODELL*

Írta: LÁSZLÓ ZOLTÁN

## BEVEZETÉS

Az 1962—63. években az Országos Tervhivatal számára a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének „A matematika közgazdasági alkalmazásai" csoportja vizsgálatokat folytatott. Ezek célja az volt, hogy az országos méretekben felhalmozódott fölösleges készletek redukálásához megfelelő matematikai modelleket alkosson. Az üzemeknél tett látogatások során leszűrt tapasztalatok azt mutatták, hogy a hagyományos készletmodellek nem alkalmazhatók, mégpedig két ok miatt. Egyrészt az irodalmi készletmodellek mind költségminimumos modellek, amelyekhez tehát a költségtényezők pontos megadása szükséges. Ezeket még egy-egy üzem viszonylatában sem sikerült beszerezni, még kevésbé lehetett olyan költségeket meghatározni, melyek országos viszonylatban alkalmasak az új készletnormák kialakítására. Másrészt az irodalmi készletmodellek körében előfordul ugyan olyan modell, melyben a megrendelt tételt véletlen időpontban szállítják le, olyan modell azonban nem volt, melyben a szállítás több részletben, véletlenül elhelyezkedő időpontokban és esetleg véletlen részletekben történik. Így a munka során elsőként megfogalmazott *Prékopa—Ziermann*-modell [2] és [1], amely egyenlő szállítási mennyiségek mellett véletlennek tekinti a szállítási időpontokat, az idevágó irodalomban teljesen újszerű. A modell további érdekessége még, hogy a szállítási időpontok eloszlására és a fogyasztás intenzitására vonatkozó elég általános feltevések mellett közvetlenül alkalmazhatók az empirikus eloszlásfüggvényre vonatkozó *Szmirnov*-statisztika eredményei.

Később PRÉKOPA általánosította a modellt [1] arra az esetre, amikor az egyes véletlen időpontokban leszállított mennyiségek is részben vagy teljesen véletlenek. A modellben definiált $F_n(t, \lambda)$ sztohasztikus folyamatra vonatkozóan PRÉKOPA bebizonyított egy tételt, amely a $\lambda = 1$ speciális esetben magába foglalja az empirikus eloszlásfüggvényre vonatkozó nevezetes *Szmirnov*-tételt [3], és amelynek a segítségével megadható elég nagyszámú szállítás esetén a modellel kapcsolatos megbízhatósági egyenlet aszimptotikus megoldása.

A jelen értekezés a *Prékopa*-modell $\lambda = 0$ speciális esetéből indul ki. Az első fejezetben részletesen ismertetjük az előzményeket, majd a második fejezetben bebizonyítunk egy tételt, amelynek segítségével tetszőleges számú szállítás esetén is meghatározható a modellhez tartozó megbízhatósági egyenlet megoldása. A harmadik fejezetben a közvetlen alkalmazásokkal foglalkozunk, majd a negyedik és ötödik fejezetben a modell egy-egy gyakorlatilag is érdekes általánosítását tárgyaljuk.

* Kandidátusi értekezés, 1970.

# I. A PROBLÉMA MEGFOGALMAZÁSA

## 1. A Prékopa-féle megbízhatósági jellegű készletmodell

A vizsgálataink kiindulási pontját képező *Prékopa*-modell az alábbi gyakorlati problémából született. Egy A vállalat $T$ hosszúságú ideig, mondjuk a $(0, T)$ termelési periódusban állandó $c>0$ intenzitással használ fel valamely homogénnek tekinthető anyagot. A teljes $cT$ szükségletet egy B vállalat a $(0, T)$ termelési periódus alatt $n$ alkalommal ($n \geqq 1$, rögzített) leszállítja az alábbiak szerint:

*a)* Az egyes szállítások $n$ számú független és a $(0, T)$ intervallumban egyenletes eloszlású véletlen időpontban történnek.

*b)* Az egyes időpontokban leszállított mennyiségek is véletlenek, mégpedig oly módon, hogy minden egyes alkalommal leszállítanak egy fix $\lambda \frac{cT}{n}$ mennyiséget ($0 \leqq \lambda \leqq 1$); a megmaradó $(1-\lambda)cT$ mennyiséget pedig az egyes szállítási időpontok között véletlenszerűen elosztják. Az elosztás modellje a következő: a $(0; (1-\lambda)cT)$ intervallumot $(n-1)$ számú független és egyenletes eloszlású véletlen ponttal $n$ részre osztjuk, és ezeket a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ rész-intervallum hosszakat a $\lambda \frac{cT}{n}$-hez rendre hozzáadjuk. Az egyes időpontokban leszállított mennyiségek tehát: $\lambda \frac{cT}{n} + \beta_1$; $\lambda \frac{cT}{n} + \beta_2; \ldots; \lambda \frac{cT}{n} + \beta_n$.

Az A vállalat a folyamatos termelés érdekében a $t=0$ időpillanatban bizonyos $M$ mennyiségű biztonsági tartalékkal rendelkezik. A kérdés: határozzuk meg azt a minimális $M_\lambda = M(\lambda, \varepsilon, n, c, T)$ indulókészletet, amely adott $(1-\varepsilon)$ megbízhatósági szinten biztosítja a megszakítás nélküli termelést!

Legyen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $n$ számú független és a $(0, T)$ intervallumban egyenletes eloszlású véletlen pont. Jelölje közülük $t_k^*$ a nagyság szerint $k$-adikat ($k=1, 2, \ldots, n$), azaz

$$0 < t_1^* < t_2^* < \cdots < t_n^* < T.$$ [1]

Legyen továbbá $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$ $(n-1)$ számú független és a $(0, cT)$ intervallumban egyenletes eloszlású véletlen pont. Jelölje közülük $\tau_j^*$ a nagyság szerint $j$-ediket ($j=1, 2, \ldots, n-1$), azaz

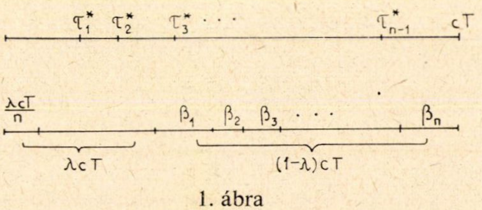
$$0 < \tau_1^* < \tau_2^* < \cdots < \tau_{n-1}^* < cT.$$ [1]

Jelölje továbbá $F_n(t, \lambda, c, T)$ a $t=0$ időponttól egy tetszőleges $0 \leqq t \leqq T$ időpillanatig a raktárakba beérkezett anyagmennyiséget, akkor a fentiek alapján

$$(1.1) \quad F_n(t,\lambda,c,T) = \begin{cases} 0 & ; \text{ ha } \quad 0 \leqq t \leqq t_1^* \\ \dfrac{k}{n} \lambda cT + (1-\lambda)\tau_k^* ; & \text{ ha } \quad t_k^* < t \leqq t_{k+1}^* \quad (k = 1,2, \ldots, n-1) \\ cT & ; \text{ ha } \quad t_n^* < t \leqq T. \end{cases}$$

[1] Egy gyakorlatilag érdektelen, nulla valószínűségű eseményt figyelmen kívül hagytunk.

Az (1.1) felírásánál felhasználtuk, hogy a $\beta_1, \ldots, \beta_n$ definíciója alapján $\beta_i = (1-\lambda)(\tau_i^* - \tau_{i-1}^*)$, $(i=1, 2, \ldots, n;\ \tau_0^*=0;\ \tau_n^*=cT)$, és így az első $k$ szállítás összege: $\frac{k}{n}\lambda cT + (1-\lambda)\tau_k^*;\ (k=1, 2, \ldots, n)$.




1. ábra

Tegyük fel, hogy a $t=0$ időpillanatban $M$ mennyiségű induló készlet áll rendelkezésünkre. Ekkor egy tetszőleges $0 \leqq t \leqq T$ időpillanatban a raktárkészlet

$$M + F_n(t, \lambda, c, T) - ct.$$

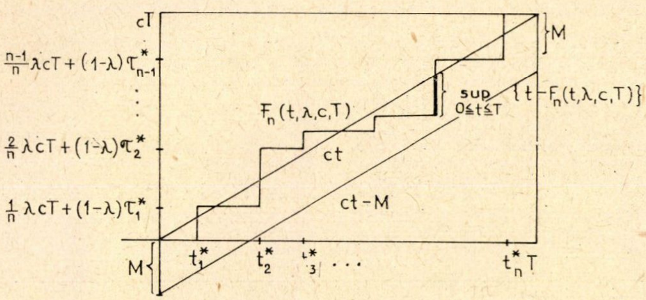
Innen a folyamatos anyagellátás feltétele

$$\inf_{0 \leqq t \leqq T} \{M + F_n(t, \lambda, c, T) - ct\} > 0,$$

vagy másként:

$$\sup_{0 \leqq t \leqq T} \{ct - F_n(t, \lambda, c, T)\} < M. \tag{1.2}$$

Ez utóbbi követelmény szemléletesen azt jelenti, hogy az $F_n(t, \lambda, c, T)$ sztohasztikus folyamat sehol sem éri el a $ct - M$ egyenest.




2. ábra

A felvetett probléma megoldásához a

$$\sup_{0 \leqq t \leqq T} \{ct - F_n(t, \lambda c, T)\}$$

valószínűségi változó eloszlását, a

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqq t \leqq T} \{ct - F_n(t, \lambda c, T)\} < M\right) \tag{1.3}$$

valószínűséget kell ismernünk. (1.3) segítségével ugyanis már meghatározható a

$$\mathbf{P}\big(\sup_{0\leq t\leq T}\{ct-F_n(t,\lambda,c,T)\}<M\big)\geqq 1-\varepsilon \tag{1.4}$$

megbízhatósági egyenletet kielégítő minimális $M_\lambda$ induló készlet.

Az itt megfogalmazott modell egyszerűbb alakban is tárgyalható. (1.3) ugyanis nyilván megegyezik a

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left\{\frac{t}{T}-\frac{1}{cT}F_n(t,\lambda,c,T)\right\}<\frac{M}{cT}\right)$$

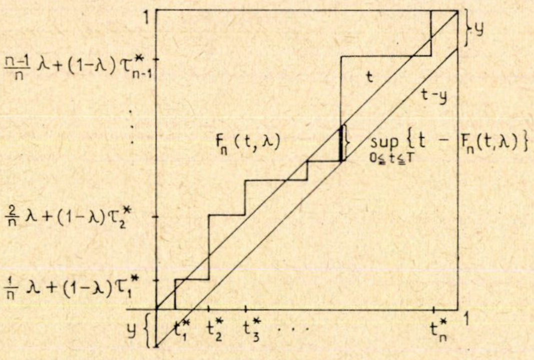
valószínűséggel, ez viszont az $F_n(t,\lambda)=F_n(t,\lambda,1,1)$ és $y=\dfrac{M}{cT}$ jelölések alapján

$$\mathbf{P}\big(\sup_{0\leq t\leq 1}\{t-F_n(t,\lambda)\}<y\big)$$

alakban írható. Ebben

$$F_n(t,\lambda)=\begin{cases}0 & \text{ha}\quad 0\leqq t\leqq t_1^* \\ \lambda\dfrac{k}{n}+(1-\lambda)\tau_k^*; & \text{ha}\quad t_k^*<t\leqq t_{k+1}^* \qquad (k=1,2,\ldots,n-1) \\ 1 \;; & \text{ha}\quad t_n^*<t\leqq 1\end{cases} \tag{1.5}$$

és mind $(t_1^*, \ldots, t_n^*)$, mind $(\tau_1^*, \ldots, \tau_{n-1}^*)$ eloszlása a $(0, 1)$ intervallumra vonatkozik.




3. ábra

A fentiek alapján tehát elegendő a modell $c=T=1$ speciális esetével foglalkoznunk.

A

$$\sup_{0\leq t\leq 1}\{t-F_n(t,\lambda)\}$$

valószínűségi változó rögzített $n$-re vonatkozó pontos eloszlása nem ismeretes, PRÉKOPA azonban az [1] dolgozatában bebizonyította az alábbi tételt:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\sqrt{\frac{n}{1+(1-\lambda)^2}}\sup_{0\leq t\leq 1}\{t-F_n(t,\lambda)\}<z\right)=\begin{cases}1-e^{-2z^2}; & \text{ha}\quad z>0\\ 0 \;; & \text{egyébként.}\end{cases} \tag{1.6}$$

Ez a tétel a

$$z = y\sqrt{\frac{1}{1+(1-\lambda)^2}}$$

helyettesítéssel megadja a modell aszimptotikus megoldását. Elég nagy $n$ esetén ugyanis

$$\mathbf{P}(\sup_{0\leq t\leq 1}\{t-F_n(t,\lambda)\} < y) \approx 1-e^{-2y^2\frac{n}{1+(1-\lambda)^2}},$$

és így az $1-\varepsilon$ megbízhatósági szinthez tartozó minimális $y_\lambda = y(\lambda, n, \varepsilon)$-ra a monotonitás következtében az

$$1-e^{-2y_\lambda^2\frac{n}{1+(1-\lambda)^2}} = 1-\varepsilon$$

megbízhatósági egyenlet megoldása után az

$$y_\lambda \approx \sqrt{\frac{1+(1-\lambda)^2}{2n}\ln\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{1.7}$$

illetve az $y_\lambda = \dfrac{M_\lambda}{cT}$ alapján $M_\lambda$-ra az

$$M_\lambda \approx cT\sqrt{\frac{1+(1-\lambda)^2}{2n}\ln\frac{1}{\varepsilon}} \tag{1.8}$$

aszimptotikus formulát kapjuk.

A fenti aszimptotikus formulákból látható, hogy $y_\lambda$, illetve $M_\lambda$ elég nagy $n$ esetén $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ nagyságrendű, valamint az is leolvasható, hogy míg $\lambda$ nullától egyig növekszik, addig $y_\lambda$, illetve $M_\lambda$ monoton csökken

$$\begin{matrix} y_0 \geqq y_\lambda \geqq y_1 \\ M_0 \geqq M_\lambda \geqq M_1 \end{matrix} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1); \tag{1.9}$$

mégpedig oly mértékben, hogy a két extremális esetben viszonyukra az

$$\frac{y_0}{y_1} = \frac{M_0}{M_1} = \sqrt{2} \tag{1.10}$$

értéket kapjuk. Ez az eredmény egyúttal azt is mutatja, hogy $\lambda$ értékeinek lehetséges változtatásakor a minimális indulókészletek — legalábbis az aszimptotikus esetben — a $\lambda=1$ legkedvezőbb esethez viszonyítva mintegy 41,4%-kal megnövekedhetnek. Ez a gazdaságilag nem lebecsülendő mennyiség indokolttá teszi, hogy próbáljuk legalább megbecsülni a véges $n$-ekre vonatkozó megoldást.

A legkézenfekvőbb ötletet az aszimptotikus megoldásra vonatkozó (1.9) összefüggés adja. Várható ugyanis, hogy ez véges $n$-ekre is érvényben marad, és így a $\lambda=0$, valamint a $\lambda=1$ határeseteknek megfelelő, $y_0$ és $y_1$ megoldások segítségével, amennyiben ezeket ismerjük, behatárolhatjuk $y_\lambda$ értékét.

Vizsgáljuk meg tehát a *Prékopa*-modell előbb említett speciális eseteit.

## 2. A $\lambda = 1$ eset, a Ziermann-modell

Ha a

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \{t - F_n(t,\lambda)\}$$

valószínűségi változó határeloszlására vonatkozó (1.6) tételt összehasonlítjuk az $F(t)$ folytonos eloszlásfüggvénnyel rendelkező $\xi$ valószínűségi változó $F_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvényére vonatkozó alábbi *Szmirnov*-tétellel [3]:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\sqrt{n}\sup_t \{F(t)-F_n(t)\} < z) = \begin{cases} 1-e^{-2z^2}; & \text{ha} \quad z > 0 \\ 0 \quad ; & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{1.11}$$

akkor a két tétel között szembetűnő hasonlóságot találunk. Ez természetesen nem véletlen. Az $F_n(t,\lambda)$ függvény (1.5) definíciójából ugyanis leolvasható, hogy az a $\lambda=1$ esetben átmegy a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó $F_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvényébe

$$F_n(t,1) = F_n(t) = \begin{cases} 0 \;; & \text{ha} \quad 0 < t \leq t_1^* \\ \dfrac{k}{n}; & \text{ha} \quad t_k^* < t \leq t_{k+1}^* \qquad (k = 1,2,\dots,n-1) \\ 1 \;; & \text{ha} \quad t_n^* < t \leq 1; \end{cases} \tag{1.12}$$

amely valószínűségi változónak éppen $F(t)=t$, $(0 \leq t \leq 1)$ a pontos eloszlásfüggvénye. Másrészt viszont tudjuk, hogy SZMIRNOV idézett tétele ekvivalens a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóra vonatkozó (1.11)-típusú tétellel, így mondhatjuk, hogy a PRÉKOPA által bevezetett $F_n(t,\lambda)$ függvény az empirikus eloszlásfüggvény általánosítása, a rá vonatkozó (1.6) határeloszlás pedig SZMIRNOV idézett tételének általánosítása. Ez a valószínűségelméletileg önmagában is érdekes tény nagyban gazdagítja a modell értékét, és egyben rámutat a *Szmirnov*-típusú próbák és általánosításuk alkalmazhatóságára a sztohasztikus készletgazdálkodás területén.

A mondottakból az is következik, hogy a $\lambda=1$ határesetnek megfelelő $y_1$ mennyiségeket véges $n$-ekre is ismerjük, hiszen ez a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó empirikus eloszlásfüggvényére vonatkozó ismert *Kaplan*-formula segítségével [9]

$$\mathbf{P}(\sup_{0\leq t\leq 1} \{t-F_n(t)\} < y) = \mathbf{P}(\sup_{0\leq t\leq 1} \{F_n(t)-t\} < y) =$$

$$= \begin{cases} 1-y\displaystyle\sum_{j=0}^{n[1-y]} \binom{n}{j}\left(1-y-\frac{j}{n}\right)^{n-j}\left(y+\frac{j}{n}\right)^{j-1} & ; \quad \text{ha} \quad 0 < y \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{ha} \quad y \leq 0 \end{cases}$$

kiszámítható, és a megfelelő értékek különböző táblázatokban megtalálhatók [18].

Megjegyezzük, hogy ezt a modellt eredetileg a $\lambda$ problémától függetlenül fogalmazta meg Prékopa és Ziermann, és részletes tárgyalása megtalálható Ziermann [2] dolgozatában.

### 3. A $\lambda=0$ eset, a teljesen véletlen megbízhatósági jellegű készletmodell

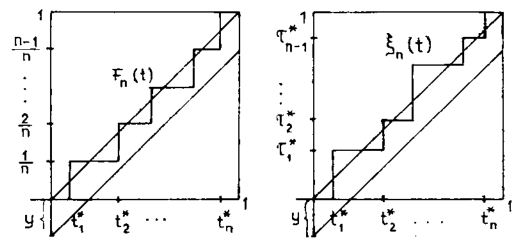
Az előző pontban láttuk, hogy a *Prékopa*-modell $\lambda=1$ speciális esete egy klasszikus valószínűségelméleti problémával kapcsolatos. A $\lambda=0$ határesetnek megfelelő probléma azonban eddig még nem szerepelt az irodalomban. Természetesen várható, hogy szerkezetileg hasonlóságot találunk a két eset között. Valóban, ha az $F_n(t,\lambda)$ sztohasztikus folyamat (1.5) definícióját alkalmazzuk a $\lambda=0$ esetre, és bevezetjük a $\xi_n(t)=F_n(t,0)$ jelölést, akkor

$$\xi_n(t)=\begin{cases}0\,; & \text{ha} \quad 0\leqq t\leqq t_1^*\\ \tau_k^*; & \text{ha} \quad t_k^*<t\leqq t_{k+1}^* \qquad (k=1,2,\dots,n-1)\\ 1\,; & \text{ha} \quad t_n^*<t\leqq 1.\end{cases} \tag{1.13}$$

Látható tehát, hogy míg a $\lambda=1$ esetben megszűnt az ugrások véletlen jellege, addig a $\lambda=0$ határeset az ugrások tiszta véletlen jellegét tartja meg. Mivel a $\xi_n(t)$ függvény $(\tau_k^*-\tau_{k-1}^*)$ véletlen ugrásainak várható értéke

$$\mathbf{M}(\tau_k^*-\tau_{k-1}^*)=\frac{1}{n}; \qquad (k=1,2,\dots,n),$$

indokolt $\xi_n(t)$-re a „véletlen ugrású empirikus eloszlásfüggvény” elnevezés.




4. ábra

Érdekes, hogy a *Prékopa*-modell ezen speciális esetében, amelyet a továbbiakban alapmodellnek nevezünk, a

$$\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{t-\xi_n(t)\}$$

valószínűségi változó rögzített $n$-re vonatkozó pontos eloszlására az analóg *Kaplan*-formulánál lényegesen egyszerűbb eredményt kapunk. Igaz ugyanis az alábbi tétel:

1. TÉTEL (alaptétel):

$$\mathbf{P}(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{t-\xi_n(t)\}<y)=\mathbf{P}(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{\xi_n(t)-t\}<y)= \tag{1.14}$$

$$=\begin{cases}1-(1-y)^n(1+y)^{n-1}; & \text{ha} \quad 0<y\leqq 1\\ 0\,; & \text{ha} \quad y\leqq 0.\end{cases}$$

Innen az

$$1-(1-y)^n(1+y)^{n-1}=1-\varepsilon$$

megbízhatósági egyenlet megoldásával a $\lambda=0$ esetben is meghatározhatjuk a minimális induló készletnek megfelelő $y_0$ értékeket.

Ezzel megteremtettük az $y_\lambda$ becsléséhez szükséges előfeltételeket. Erre a témára később még visszatérünk. Itt lényegében csak azt a gondolatmenetet kívántuk illusztrálni, hogyan merült fel egy általánosabb problémával kapcsolatban a $\xi_n(t)$ véletlen ugrású empirikus eloszlásfüggvénnyel kapcsolatos részletesebb vizsgálatok gondolata. A későbbi kutatások azonban azt mutatták, hogy igen sok gyakorlati problémánál közvetlenül is alkalmazható az alapmodell. Így a továbbiakban a *Prékopa*-modellel kapcsolatos problémákon túlmenően, illetve ezektől függetlenül folytatjuk vizsgálatainkat. Ennek során a következő fejezetben bebizonyítjuk az alaptételt.

## II. AZ ALAPTÉTEL BIZONYÍTÁSA

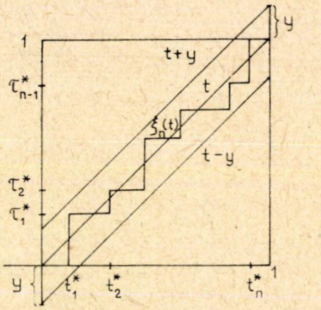
### 1. Az alaptétel két állításának ekvivalenciája

Tartsuk meg az előző fejezet jelöléseit és lássuk be először, hogy a

$$\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{t-\xi_n(t)\} \quad \text{és a} \quad \sup_{0\leqq t\leqq 1}\{\xi_n(t)-t\}$$

valószínűségi változók egyforma eloszlásúak, azaz elegendő az alaptételnek csak az egyik állítását bizonyítanunk.

Valóban a $\xi_n(t)$ véletlen ugrású empirikus eloszlásfüggvény (1.13) definíciója és az 5. ábra alapján könnyen követhető az alábbi gondolatsor:




5. ábra

$$\text{(2.1)}\quad \mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{t-\xi_n(t)\}<y\Big)=\mathbf{P}\big(\max\{t_1^*;(t_2^*-\tau_1^*);\ldots;(t_n^*-\tau_{n-1}^*)\}<y\big)=$$
$$=\mathbf{P}\big(\max\{1-t_n^*);(1-t_{n-1}^*)-(1-\tau_{n-1}^*);\ldots;(1-t_1^*)-(1-\tau_1^*)\}<y\big)=$$
$$=\mathbf{P}\big(\max\{(\tau_1^*-t_1^*);(\tau_2^*-t_2^*);\ldots;(\tau_{n-1}^*-t_{n-1}^*);(1-t_n^*)\}<y\big)=$$
$$\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{\xi_n(t)-t\}<y\Big);$$

felhasználva azt, hogy a

$$t_k^* \quad \text{és} \quad 1-t_{n+1-k}^*; \qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

valamint

$$\tau_j^* \quad \text{és} \quad 1-\tau_{n-j}^*; \qquad (j=1,2,\ldots,n-1)$$

valószínűségi változók páronként egyforma eloszlásúak. A (2.1) egyenlőség-sorozat első és utolsó tagját összevetve a bizonyítandó állításunkat nyerjük.

## 2. Az alaptétel integrál alakja

Az előző pont eredménye alapján foglalkozzunk a továbbiakban a

$$\mathbf{P}_n(y) = \mathbf{P}\left( \sup_{0 \leqq t \leqq 1} \{t - \xi_n(t)\} < y\right)$$

valószínűséggel. A tétel állítása az $y \leqq 0$ és $y=1$ esetekben triviális, ezért a továbbiakban csak a $0<y<1$ esettel foglalkozunk. A (2.1) során beláttuk, hogy a

$$\sup_{0 \leqq t \leqq 1} \{t - \xi_n(t)\} < y$$

esemény akkor valósul meg, ha

$$\max \{t_1^*; (t_2^* - \tau_1^*); \dots; (t_n^* - \tau_{n-1}^*)\} < y,$$

ez pedig ekvivalens a

$$(t_1^* < y; t_2^* - \tau_1^* < y; \dots; t_n^* - \tau_{n-1}^* < y)$$

eseménnyel. Így írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \text{(2.2)} \qquad \mathbf{P}_n(y) &= \mathbf{P}(t_1^* < y; t_2^* - \tau_1^* < y; \dots; t_n^* - \tau_{n-1}^* < y) = \\ &= \mathbf{P}(0 > t_1^* - y; \tau_1^* > t_2^* - y; \dots; \tau_{n-1}^* > t_n^* - y). \end{aligned}$$

Ha figyelembe vesszük, hogy a $(t_1^*, \dots, t_n^*)$ és a $(\tau_1^*, \dots, \tau_{n-1}^*)$ valószínűségi vektorváltozók egymástól függetlenek, és együttes sűrűségfüggvényeik rendre

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = n!; \qquad (0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_n \leqq 1)$$

és

$$g(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = (n-1)!; \qquad (0 \leqq z_1 \leqq z_2 \leqq \dots \leqq z_{n-1} \leqq 1),$$

akkor a (2.2) valószínűséget az alábbi integrál állítja elő:

$$\text{(2.3)} \qquad \mathbf{P}_n(y) = \int_{T^n} \cdots \int n!(n-1)! \, dx_1 \dots dx_n \, dz_1 \dots dz_{n-1},$$

ahol $T^n$ a

$$T^n = \begin{cases} 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1 \\ 0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < 1 \\ \quad 0 > x_1 - y \\ \quad z_1 > x_2 - y \\ \quad \vdots \\ z_{n-1} > x_n - y \end{cases}$$

feltételek által meghatározott tartomány.

A (2.3) meghatározása során célszerűnek látszott felbontani a $T^n$ tartományt $n$ számú páronként diszjunkt tartomány összegére

$$T^n = T_1^n + T_2^n + \cdots + T_n^n,$$

annak megfelelően, hogy a

$$\text{(2.4)} \qquad \max \{i | x_i < y\} = s; \qquad (s = 1, 2, \dots, n)$$

természetes szám mekkora. Ennek értelmében a $T_s^n$ tartományok szerkezete:

$$T_s^n = \begin{cases} 0 < x_1 < \cdots < x_s < y \leqq x_{s+1} < \cdots < x_n < 1 \\ 0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < 1 \\ \qquad z_s > x_{s+1} - y \\ \qquad \vdots \\ \qquad z_{n-1} > x_n - y, \end{cases}$$

ha $s = 1, 2, \ldots, n-1$; illetve

$$T_n^n = \begin{cases} 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < y \\ 0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

A $T^n$ tartomány felbontása következtében maga a (2.3) integrál is felbomlik $n$ számú integrál összegére:

$$\mathbf{P}_n(y) = I^n = I_1^n + I_2^n + \cdots + I_n^n.$$

Ezek közül az általános típusú $I_s^n$ integrál szerkezete

$$I_s^n = \int_{T_s^n} \cdots \int n!(n-1)!\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{n-1} = \tag{2.6}$$

$$= \int_{\substack{0<x_1<\cdots<x_s<y\leqq \\ \leqq x_{s+1}<\cdots<x_n<1}} \cdots \int n! \Big\{ \int_{\substack{0<z_1<\cdots<z_{n-1}<1 \\ z_s > x_{s+1}-y \\ \vdots \\ z_{n-1}>x_n-y}} \cdots \int (n-1)!\, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{n-1} \Big\} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_{x_1=0}^{y} \cdots \int_{x_s=x_{s-1}}^{y} n! \Big\{ \int_{x_{s+1}=y}^{1} \cdots \int_{x_n=x_{n-1}}^{1} \cdot$$

$$\cdot \mathbf{P}(\tau_s^* > x_{s+1} - y; \ldots; \tau_{n-1}^* > x_n - y)\, \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_{s+1} \Big\} \mathrm{d}x_s \ldots \mathrm{d}x_1 =$$

$$= \frac{n!}{s!} y^s \int_{x_{s+1}=y}^{1} \cdots \int_{x_n=x_{n-1}}^{1} \mathbf{P}(\tau_s^* > x_{s+1} - y; \ldots; \tau_{n-1}^* > x_n - y)\, \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_{s+1},$$

ha $s = 1, 2, \ldots, n-1$, illetve

$$I_n^n = \int_{T^n} \cdots \int n!(n-1)!\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{n-1} = y^n. \tag{2.7}$$

A (2.6) felírásán láthatjuk, hogy a rögzített $(x_1, \ldots, x_n)$ értékekre vonatkozó $z_i$ változók szerinti integrálást egy megfelelő valószínűséggel helyettesítettük. Ennek oka, hogy a

$$\mathbf{P}(\tau_s^* > x_{s+1} - y; \ldots; \tau_{n-1}^* > x_n - y) \tag{2.8}$$

valószínűség kombinatorikus úton való kiszámítása előnyösebbnek bizonyult.

**3. A $\mathbf{P}(\tau_s^* > x_{s+1}-y; \dots; \tau_{n-1}^* > x_n - y)$ valószínűség meghatározása ($s=1, 2, \dots, n-1$)**

Vegyük fel a $(0, 1)$ intervallumban az

$$(x_{s+1}-y); \ (x_{s+2}-y); \dots; (x_n-y)$$

osztópontokat,

$$\begin{array}{cccccccccc} & k_s & & k_{s+1} & & \dots & & k_n & \\ | & \text{———} & | & \text{———} & | & \text{———} & | & \text{———} & | \\ 0 & & x_{s+1}-y & & x_{s+2}-y & \dots & x_n-y & & 1 \end{array}$$

akkor annak a valószínűsége, hogy az így nyert intervallumokba $(n-1)$ számú független és a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású véletlen pont közül rendre $k_s, k_{s+1}, \dots, k_{n-1}, k_n$ számú esik, a polinomiális eloszlás értelmében

$$(2.9) \qquad \frac{(n-1)!}{k_s! \dots k_n!} (x_{s+1}-y)^{k_s} (x_{s+2}-x_{s+1})^{k_{s+1}} \dots (x_n - x_{n-1})^{k_{n-1}} (1+y-x_n)^{k_n}.$$

Nem nehéz belátni, hogy az összes lehetséges

$$(k_s, \dots, k_n)$$

szétosztások közül a

$$(\tau_s^* > x_{s+1}-y; \dots; \tau_{n-1}^* > x_n - y)$$

esemény szempontjából azon szétosztások $\{K_s\}$ összessége lesz a kedvező, amelyekre teljesülnek az alábbiak:

$$(2.10) \quad (k_s, \dots, k_n) \in \{K_s\} \left| \begin{array}{ll} k_s + k_{s+1} + \dots + k_{s+j} \leqq s+j-1 & (j = 0, 1, \dots, n-s-1) \\ k_s + k_{s+1} + \dots + k_n = n-1. & \end{array} \right.$$

Valóban, például a $\tau_{s+j}^* > x_{s+j+1}-y$ csak akkor teljesül, ha az $x_{s+j+1}-y$ osztópontig legfeljebb $s+j-1$ számú véletlen $\tau_i$ pont kerül, azaz

$$k_s + k_{s+1} + \dots + k_{s+j} \leqq s+j-1.$$

A fentiek értelmében tehát

$$(2.11) \qquad \mathbf{P}(\tau_s^* > x_{s+1}-y; \dots; \tau_{n-1}^* > x_n - y) =$$

$$= \sum_{\{K_s\}} \frac{(n-1)!}{k_s! \dots k_n!} (x_{s+1}-y)^{k_s} (x_{s+2}-x_{s+1})^{k_{s+1}} \dots (x_n - x_{n-1})^{k_{n-1}} (1+y-x_n)^{k_n}.$$

**4. Az $I_s^n$ integrál további felbontása**

Írjuk be az előző pont eredményeit az $I_s^n$ (2.6) szerinti előállításába, akkor

$$(2.12) \quad I_s^n = \frac{n!}{s!} y^s \int\limits_{x_{s+1}=y}^{1} \dots \int\limits_{x_n = x_{n-1}}^{1} \sum_{\{K_s\}} \frac{(n-1)!}{k_s! \dots k_n!} (x_{s+1}-y)^{k_s} (x_{s+2}-x_{s+1})^{k_{s+1}} \dots$$

$$\dots (x_n - x_{n-1})^{k_{n-1}} (1+y-x_n)^{k_n} \, dx_n \dots dx_{s+1}, \qquad (s = 1, 2, \dots, n-1).$$

Rögzítsünk az integrandusban egy megengedett

$$(k_s, \dots, k_n) \in \{K_s\}$$

szétosztás-sorozatot és számítsuk ki először a hozzá tartozó

$$I_s^n(k_s, \ldots, k_n)$$

integrált.

Megfigyelve (2.12) integrandusát láthatjuk, hogy az $x_n$ változó szerinti integrálás szempontjából csak az utolsó két tényező a lényeges. Hagyjuk el tehát a felesleges részt és első lépésként számoljuk ki az

$$\int_{x_n=x_{n-1}}^{1} (x_n - x_{n-1})^{k_{n-1}} (1+y-x_n)^{k_n} \, dx_n$$

integrált. A parciális integrálás módszere látszik előnyösnek, amelyet a megjelölt szereposztás szerint ismételten elvégezve kapjuk, hogy

$$(2.13)\qquad \int_{x_n=x_{n-1}}^{1} \underbrace{(x_n - x_{n-1})^{k_{n-1}}}_{u'} \underbrace{(1+y-x_n)^{k_n}}_{v} \, dx_n =$$

$$= \frac{1}{k_{n-1}+1}(1-x_{n-1})^{k_{n-1}+1} y^{k_n} + \frac{k_n}{(k_{n-1}+1)(k_{n-1}+2)}(1-x_n)^{k_{n-1}+2} y^{k_n-1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{k_n(k_n-1)\ldots(r+1)}{(k_{n-1}+1)\ldots(k_{n-1}+k_n+1-r)}(1-x_{n-1})^{k_{n-1}+k_n+1-r} y^r + \ldots$$

$$\ldots + \frac{k_n!}{(k_{n-1}+1)\ldots(k_{n-1}+k_n+1)}(1-x_{n-1})^{k_{n-1}+k_n+1}.$$

Ragadjuk ki (2.13)-ból az $r$-hez tartozó általános tagot ($r=0, 1, \ldots, k_n$), alakítsuk át azonosan, szorozzuk be az

$$(x_{n-1} - x_{n-2})^{k_{n-2}}$$

tényezővel, majd folytassuk az integrálást ugyancsak parciálisan az $x_{n-1}$ változó szerint:

$$\int_{x_{n-1}=x_{n-2}}^{1} \frac{k_{n-1}!\,k_n!}{(k_{n-1}+k_n+1-r)!\,r!} y^r \underbrace{(x_{n-1}-x_{n-2})^{k_{n-2}}}_{u} \underbrace{(1-x_{n-1})^{k_{n-1}+k_n+1-r}}_{v'} \, dx_{n-1} =$$

$$= \frac{k_{n-2}!\,k_{n-1}!\,k_n!}{(k_{n-2}+k_{n-1}+k_n+2-r)!\,r!} y^r (1-x_{n-2})^{k_{n-2}+k_{n-1}+k_n+2-r}.$$

A kiválasztott tagra vonatkozó integrálást analóg módon folytatva az utolsó lépésként kapjuk:

$$(2.14)\qquad \int_{x_{s+1}=y}^{1} \frac{k_{s+1}!\ldots k_n!}{(k_{s+1}+\cdots+k_n+n-s-r-1)!\,r!}\cdot$$

$$\cdot y^r \underbrace{(x_{s+1}-y)^{k_s}}_{u} \underbrace{(1-x_{s+1})^{k_{s+1}+\cdots+k_n+n-s-r-1}}_{v'} \, dx_{s+1} =$$

$$= \frac{k_s!\ldots k_n!}{(k_s+\cdots+k_n+n-s-r)!\,r!} y^r (1-y)^{k_s+\cdots+k_n+n-s-r} =$$

$$= \frac{k_s!\ldots k_n!}{(2n-1-s-r)!\,r!} y^r (1-y)^{2n-1-s-r}.$$

Eredményünket írjuk be az $I_s^n(k_s, ..., k_n)$-et is definiáló (2.12)-be, akkor (2.13) közvetítésével

$$(2.15)\quad I_s^n(k_s,\dots,k_n)=\frac{n!}{s!}y^s\frac{(n-1)!}{k_s!\dots k_n!}\sum_{r=0}^{k_n}\frac{k_s!\dots k_n!}{(2n-1-s-r)!\,r!}y^r(1-y)^{2n-1-s-r}=$$

$$=\frac{n!}{s!}\sum_{r=0}^{k_n}\frac{(n-1)!}{(2n-1-s-r)!\,r!}y^{r+s}(1-y)^{2n-1-s-r}.$$

Vegyük észre eredményünkben azt a meglepő tényt, hogy rögzített $(k_s, ..., k_n)$ esetén az $I_s^n(k_s, ..., k_n)$ integrál értéke csupán $k_n$-től függ. Ez a tény lehetővé teszi magának az $I_s^n$ integrálnak a meghatározását. Hiszen (2.12) alapján

$$I_s^n=\sum_{\{K_s\}}I_s^n(k_s,\dots,k_n),$$

és így minden olyan megengedett $(k_s, ..., k_n)$ szétosztássorozathoz tartozik $I_s^n$-ben egy-egy

$$y^{r+s}(1-y)^{2n-1-s-r}$$

típusú tag, amelyben $k_n \geqq r$. Tehát ha ismernénk azon különböző megengedett szétosztás-sorozatok

$$c_{s,r}$$

számát, amelyekben $k_n \geqq r$, akkor írhatnánk:

$$(2.16)\qquad I_s^n=\frac{n!(n-1)!}{s!}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{c_{s,r}}{(2n-1-s-r)!\,r!}y^{r+s}(1-y)^{2n-1-s-r}$$

## 5. A $c_{s,r}$ együtthatók kiszámítása

Használjuk fel a bolyongási feladatoknál szokásos geometriai szemléletmódot, és ennek megfelelően minden egyes

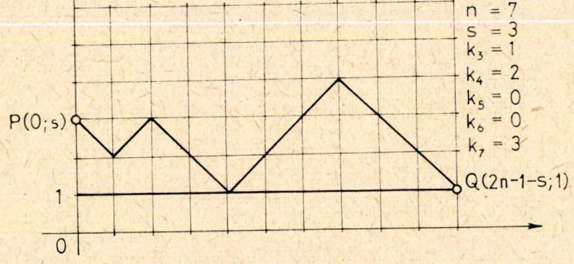
$$(k_s, \dots, k_n)$$

szétosztás-sorozathoz rendeljük hozzá $(n-1)$ számú „$-$" és $(n-s)$ számú „$+$" jel egy-egy $(2n-1-s)$-ed osztályú permutációját az alábbi módon:

$$\overbrace{+,\dots,+}^{k_s},-,\overbrace{+,\dots,+}^{k_{s+1}},-,\dots,-,\overbrace{+,\dots,+}^{k_n}$$

Ezen jelsorozathoz viszont rendeljünk hozzá a derékszögű koordináta-rendszerben egy, a $P(0, s)$ pontból kiinduló törtvonalat úgy, hogy a „$+$" vagy a „$-$" jelnek megfelelően rendre mozogjunk el átlósan 45°-os, illetve $-45°$-os szögben a szomszédos rácspontba. Így végül $(2n-1-s)$ lépés után eljutunk a $Q(2n-1-s;\ 1)$ pontba.

Vegyük észre, hogy a kapcsolat fordítva is érvényes. Minden egyes $\widehat{PQ}$ törtvonalhoz egyértelműen hozzárendelhető egy $(k_s, ..., k_n)$ sorozat. Sőt azt is könnyű belátni a (2.11) alapján, hogy egy $(k_s, ..., k_n)$ szétosztás sorozat akkor és csak akkor




6. ábra

megengedett, ha a hozzá tartozó $\widehat{PQ}$ törtvonal nem lépi át az $y=1$ egyenest. Ez utóbbi feltétel ugyanis azt jelenti, hogy az egyes $k_{s+j}$-knek megfelelő mozgás után nyert pontok ordinátájára teljesedik

$$\overbrace{s+j}^{\text{„}+\text{"}} - \overbrace{k_s+\cdots+k_{s+j}}^{\text{„}-\text{"}} \geqq 1,$$

azaz

$$k_s+\cdots+k_{s+j} \leqq s+j-1 \qquad (j=0,1,\ldots,n-s-1),$$

ami megfelel (2.11)-nek.

Most menjünk tovább egy lépéssel és állapítsuk meg, hogy a $c_{s,r}$ definíciójának megfelelően melyek azok a törtvonalak, amelyek egy olyan $(k_s, \ldots, k_n)$ szétosztás-sorozatnak felelnek meg, amelyben $k_n \geqq r$.

Az előző megjegyzések és a 7. ábra alapján jól követhető, hogy ezekhez viszont kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhetők a

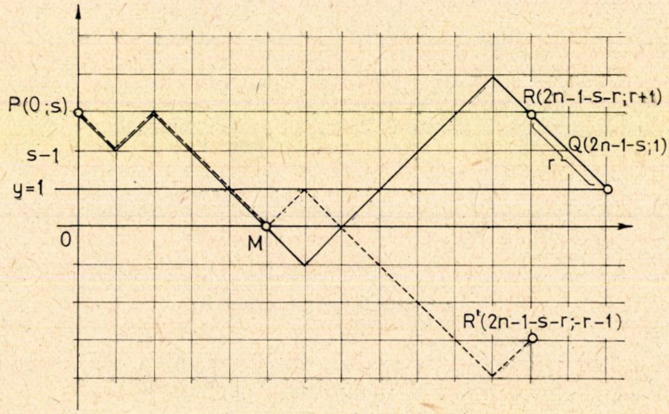
$$P(0, s) \quad \text{és a} \quad R(2n-1-s-r,\ r+1)$$

pontokat összekötő törtvonalak közül azok, amelyek nem lépik át az $y=1$ egyenest. Feladatunk tehát ezeknek az összeszámlálása.

$\widehat{PR}$ definíciója alapján világos, hogy az összes lehetséges különböző $\widehat{PR}$ törtvonalak száma nem más, mint $(n-s)$ számú „$-$" és $(n-1-r)$ számú „$+$" jelből álló $(2n-1-s-r)$ elemű halmaz összes különböző permutációja:

$$\frac{(2n-1-s-r)!}{(n-1)!(n-1-r)!} = \binom{2n-1-s-r}{n-s} \tag{2.17}$$

Ebből kell levonni az $y=1$ egyenest metsző „rossz" törtvonalak számát, ha ilyen egyáltalán létezik. Ezek összeszámolása érdekében tekintsünk egy „rossz" törtvonalat, és jelöljük ennek az $x$-tengellyel alkotott első közös pontját $M$-mel. Tükrözzük most az $\widehat{MR}$ törtvonalat az $x$-tengelyre és helyettesítsük a $\widehat{PMR}$ törtvonalat $\widehat{PMR'}$-vel. Belátható, hogy így minden egyes „rossz" törtvonalhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendeltünk egy $\widehat{PR'}$ törtvonalat, ahol $R'$ koordinátái




7. ábra

$(2n-1-s-r,\ -r-1)$. Ebből az is leolvasható, hogy ezekben a $\widehat{PR}$ törtvonalakhoz képest $r+1$-gyel több a „$-$" irányú mozgások száma, aminek következtében most

$$(2.18)\qquad \frac{(2n-1-s-r)!}{(n-1-s-r)!\,n!}=\binom{2n-1-s-r}{n}$$

a keresett permutáció-szám, feltéve, hogy

$$n-1-s-r\geqq 0,$$

azaz

$$(2.19)\qquad s+r\leqq n-1,$$

mert különben (2.18)-nak nincs értelme. Ez utóbbi feltétel természetesen egyúttal azt is jelenti, hogy az

$$s+r>n-1$$

esetben nem keletkezhet „rossz" törtvonal, ami egyébként közvetlenül is belátható.

A (2.17)—(2.19) alatti eredményeinket összefoglalva $c_{s,r}$ értékeire a következőket kaptuk:

$$(2.20)\qquad c_{s,r}=\begin{cases}\dbinom{2n-1-s-r}{n-s}; & \text{ha}\quad s+r>n-1\\[2ex] \dbinom{2n-1-s-r}{n-s}-\dbinom{2n-1-s-r}{n}; & \text{ha}\quad s+r\leqq n-1\end{cases}$$

$$(s=1,2,\dots,n-1),\qquad (r=0,1,\dots,n-1).$$

A további egységes számolás érdekében mutassuk még meg, hogy eredményeinket formálisan alkalmazva az eddig kizárt $s=n$ esetre, megkapjuk $I_n^n$-re a (2.7)-ben már kiszámolt $y^n$ értéket. Írjunk ugyanis (2.16)-ban $s$ helyébe $n$-et, használjuk fel (2.20)-at, ekkor

$$(2.21)\qquad I_n^n = \frac{n!(n-1)!}{n!}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{c_{n,r}}{(n-1-r)!r!}y^{n+r}(1-y)^{n-1-r} = \\ = y^n\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}y^r(1-y)^{n-1-r} = y^n,$$

amit be akartunk látni.

## 6. Az alaptétel bizonyítása

Az eddigi előkészítés alapján a tétel bizonyítása már csak formális számolásra redukálódik. A (2.15) és (2.20)—(2.21) alapján ugyanis

$$(2.22)\qquad I^n = \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{n!(n-1)!}{n!}\frac{c_{s,r}}{(2n-1-s-r)!r!}y^{s+r}(1-y)^{2n-1-s-r} = \\ = \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{n!(n-1)!(2n-1-s-r)!}{s!(2n-1-s-r)!r!(n-s)!(n-1-r)!}y^{s+r}(1-y)^{2n-1-s-r} - \\ -\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1-s}\frac{n!(n-1)!(2n-1-s-r)!}{s!(2n-1-s-r)!r!n!(n-1-s-r)!}y^{s+r}(1-y)^{2n-1-s-r} = \\ = \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}y^s(1-y)^{n-s}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}y^r(1-y)^{n-1-r} - \\ -\sum_{s=1}^{n-1}\binom{n-1}{s}y^s(1-y)^n\sum_{r=0}^{n-1-s}\binom{n-1-s}{r}y^r(1-y)^{n-1-s-r} = \\ = \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}y^s(1-y)^{n-s} - \sum_{s=1}^{n-1}\binom{n-1}{s}y^s(1-y)^n = \\ = 1-(1-y)^n-(1-y)^n[(1+y)^{n-1}-1] = 1-(1-y)^n(1+y)^{n-1},$$

amit bizonyítani akartunk.

# III. AZ ALAPMODELL ALKALMAZÁSAI

## 1. Az alapmodell közvetlen alkalmazása

Az I. fejezet végén láttuk, hogy a $\zeta_n(t)$ véletlen ugrású empirikus eloszlásfüggvény a *Prékopa*-féle modell $\lambda=0$ speciális esetére vonatkozó készletezési probléma megoldásával kapcsolatos. Emlékeztetőül idézzük fel, hogy ez a modell, amelyet alapmodellnek neveztünk, azon készletezési problémáknál alkalmazható, amelyeknél feltételezhetjük az alábbiakat:

(a) A $0\leqq t\leqq T$ termelési periódusban egy bizonyos homogénnek tekinthető alapanyag felhasználása (a raktárból való kiáramlása) állandó $c>0$ intenzitású.

(b) A teljes termelési periódusban felhasznált $cT$ anyagmennyiség a raktárba $n$ számú független és a $(0, T)$-ben egyenletes eloszlású véletlen időpontban érkezik be, amely időpontok nagyság szerint rendezett sorozata legyen

$$0 < t_1^* < t_2^* < \cdots < t_n^* < T.$$

(c) Az egyes időpontokban beérkezett anyagmennyiségek is véletlenek, mégpedig ha $\tau_1^*, \tau_*^2, \ldots, \tau_{n-1}^*$ egy a $(0, cT)$ intervallumban egyenletes eloszlású $(n-1)$ elemű minta nagyság szerint rendezett sorozata

$$0 < \tau_1^* < \tau_2^* < \cdots < \tau_{n-1}^* < cT,$$

akkor a $(t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*)$ időpontokban leszállított anyagmennyiségek rendre

$$\tau_1^*; (\tau_2^* - \tau_1^*); \ldots; (\tau_{n-1}^* - \tau_{n-2}^*); (cT - \tau_{n-1}^*).$$

Ebben az esetben tehát a raktárba egy tetszőleges $0 \leqq t \leqq T$ időpontig beérkezett anyagmennyiséget az alábbi $\xi_n(t, c, T)$ sztohasztikus folyamat írja le

$$\xi_n(t,c,T) = \begin{cases} 0; & \text{ha} \quad 0 \leqq t < t_1^* \\ \tau_k^*; & \text{ha} \quad t_k^* \leqq t < t_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ cT; & \text{ha} \quad t_n^* \leqq t \leqq T. \end{cases}$$

Álljon rendelkezésünkre a $t = 0$ időpontban $M$ mennyiségű induló készlet, akkor az alaptétel segítségével közvetlenül a folyamatos termelést feltételező

$$\sup_{0 \leqq t \leqq T} \{ct - \xi_n(t,c,T)\} < M$$

esemény valószínűségét tudjuk meghatározni, amennyiben beláttuk, hogy

$$\mathbf{P}(\sup_{0 \leqq t \leqq T} \{ct - \xi_n(t,c,T)\} < M) = \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqq t \leqq 1} \{t - \xi_n(t)\} < \frac{M}{cT}\right) = \tag{3.1}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{M}{cT}\right)^n \left(1 + \frac{M}{cT}\right)^{n-1}; \quad 0 < \frac{M}{cT} \leqq 1.$$

Megjegyezzük, hogy az alaptétel szimmetrikus tulajdonsága miatt hasonló eredményt kapunk, ha a véletlen beáramlás és állandó intenzitású kiáramlás szerepét a modellnél felcseréljük. Ilyen típusú modellt alkalmazhatunk például akkor, ha egy üzem a termelésen kívül az értékesítéssel is foglalkozik. Ebben az esetben elképzelhető ugyanis, hogy a készáruk állandó intenzitással áramlanak a raktárba, a megrendelések viszont véletlenszerűen érkeznek be. Ez a modell azonban elvileg semmi újat nem jelent, így részletesebben nem foglalkozunk vele.

Mivel az indulókészlet nagysága általában növeli az önköltséget, így a (3.1) valószínűség mellett a gazdasági szakembert elsősorban az $(1-\varepsilon)$ megbízhatósági szinthez tartozó minimális $M_0$ indulókészlet érdekli. Ennek a meghatározása az

$y = \dfrac{M}{cT}$ helyettesítés után az

$$1 - (1-y)^n (1+y)^{n-1} = 1 - \varepsilon \tag{3.2}$$

egyenlet megoldására redukálódik, hiszen könnyen leolvasható, hogy az

$$1-(1-y)^n(1+y)^{n-1} = 1-\frac{1}{1+y}(1-y^2)^{n-1}$$

valószínűség $y$-ban szigorúan monoton növekvő ($0 \leqq y \leqq 1$). Az 1. táblázat $10^{-4}$ pontossággal tartalmazza a (3.2) egyenlet megoldásait a megadott $n$ és $\varepsilon$ paraméter-kombinációk esetén. Bizonyára feltűnik, hogy a táblázat viszonylag nagy $n$ paraméter-értékeket is tartalmaz. Ennek oka az, hogy a *Prékopa*-modell $\lambda=0$ speciális esetére vonatkozó

$$y_0 \approx \sqrt{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\varepsilon}} \tag{3.3}$$

aszimptotikus formula még $n \geqq 100$ és $\varepsilon \geqq 0{,}01$ esetén is csak mintegy 5%-os hibával alkalmazható.

Hogy mi a mélyebb oka ennek a rossz közelítésnek, azt azonnal meglátjuk, ha az 1. Tétel alkalmazásával közvetlenül is bebizonyítjuk a (3.3) formulát.

Igaz ugyanis a $\xi_n(t)$-re vonatkozóan, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\sqrt{n} \sup_{0\leqq t\leqq 1} \{t-\xi_n(t)\} < z\big) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\sqrt{n} \sup_{0\leqq t\leqq 1} \{\xi_n(t)-t\} < z\big) = \tag{3.4}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^{n-1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{1+\frac{z}{\sqrt{n}}}\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^n\right] =$$

$$= 1-e^{-z^2},$$

ha $z>0$ az (1.16) $\lambda=0$ esetének megfelelően. A (3.4)-ből viszont a $z=y\sqrt{n}$ helyettesítéssel elég nagy $n$ esetén következik, hogy

$$1-(1-y)^n(1+y)^{n-1} \approx 1-e^{-ny^2}$$

és innen az

$$1-e^{-ny^2} = 1-\varepsilon \tag{3.5}$$

megbízhatósági egyenlet megoldásával már kapjuk (3.3)-at. A (3.4) határeloszlásnak megfelelő aszimptotikus formula azonban valóban csak igen nagy $n$-re elég pontos, mert egyrészt ismert, hogy a felhasznált

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

határátmenet „konvergencia sebessége" elég lassú, másrészt az

$$\frac{1}{1+\frac{z}{\sqrt{n}}}$$

zavaró tényező hatása sem lényegtelen.

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy az aszimptotikus formula felhasználásával már $n=5$-től is elég jó közelítést kapunk, ha az

$$1-(1-y)^n(1+y)^{n-1} = 1-\varepsilon$$

**1. táblázat**

| $n \backslash p$ | 0,900 | 0,950 | 0,975 | 0,990 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9000 | 0,9500 | 0,9750 | 0,9900 |
| 2 | 0,7618 | 0,8349 | 0,8848 | 0,9280 |
| 3 | 0,6703 | 0,7459 | 0,8026 | 0,8574 |
| 4 | 0,6058 | 0,6795 | 0,7372 | 0,7962 |
| 5 | 0,5573 | 0,6281 | 0,6850 | 0,7450 |
| 6 | 0,5192 | 0,5869 | 0,6424 | 0,7020 |
| 7 | 0,4881 | 0,5530 | 0,6068 | 0,6655 |
| 8 | 0,4622 | 0,5245 | 0,5766 | 0,6341 |
| 9 | 0,4401 | 0,5001 | 0,5506 | 0,6067 |
| 10 | 0,4210 | 0,4788 | 0,5278 | 0,5826 |
| 11 | 0,4043 | 0,4602 | 0,5077 | 0,5611 |
| 12 | 0,3894 | 0,4435 | 0,4897 | 0,5419 |
| 13 | 0,3762 | 0,4286 | 0,4736 | 0,5246 |
| 14 | 0,3642 | 0,4152 | 0,4589 | 0,5088 |
| 15 | 0,3533 | 0,4029 | 0,4456 | 0,4944 |
| 16 | 0,3434 | 0,3917 | 0,4334 | 0,4811 |
| 17 | 0,3343 | 0,3814 | 0,4222 | 0,4689 |
| 18 | 0,3259 | 0,3719 | 0,4118 | 0,4576 |
| 19 | 0,3181 | 0,3631 | 0,4021 | 0,4470 |
| 20 | 0,3108 | 0,3549 | 0,3931 | 0,4372 |
| 21 | 0,3041 | 0,3472 | 0,3847 | 0,4280 |
| 22 | 0,2977 | 0,3400 | 0,3768 | 0,4193 |
| 23 | 0,2918 | 0,3333 | 0,3694 | 0,4112 |
| 24 | 0,2862 | 0,3269 | 0,3624 | 0,4036 |
| 25 | 0,2809 | 0,3209 | 0,3558 | 0,3963 |
| 26 | 0,2759 | 0,3153 | 0,3496 | 0,3894 |
| 27 | 0,2712 | 0,3099 | 0,3437 | 0,3829 |
| 28 | 0,2667 | 0,3048 | 0,3380 | 0,3767 |
| 29 | 0,2624 | 0,2999 | 0,3327 | 0,3708 |
| 30 | 0,2584 | 0,2953 | 0,3276 | 0,3652 |

megbízhatósági egyenlet megoldásához felhasznált

$$y = \sqrt{1-\sqrt[n]{\varepsilon(1+y)}} \tag{3.6}$$

iterációban kiinduló értékként az

$$Y = \sqrt{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\varepsilon}}$$

kifejezést vesszük, és $y_0$ közelítésére elfogadjuk az

$$\tilde{y}_0 = \sqrt{1-\sqrt[n]{\varepsilon(1+Y)}} \tag{3.7}$$

formulát.

Összehasonlításul a túloldali táblázatban feltüntetjük a pontos értéket, az aszimptotikus formulából, és a (3.7) közelítésből származó értékeket, valamint ezek százalékos hibáját az $n=5$, 10, 30, 50, 100 esetekben, 90%-os megbízhatósági szint mellett.

2. táblázat

| $n$ | $y_0$ | $Y$ | $\tilde{y}_0$ | $\triangle Y\%$ | $\triangle\tilde{y}_0\%$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,5573 | 0,6787 | 0,5482 | 22 | 1,8 |
| 10 | 0,4210 | 0,4799 | 0,4170 | 14 | 1 |
| 30 | 0,2584 | 0,2771 | 0,2575 | 7,2 | 0,4 |
| 50 | 0,2036 | 0,2146 | 0,2032 | 5,5 | 0,2 |
| 100 | 0,1464 | 0,1518 | 0,1462 | 3,7 | 0,14 |

A folyamatos termelés szempontjából a minimális raktárkészlet az érdekes, de a szakember számára a maximális raktárkészlet eloszlása is, méginkább a maximális raktárkészlet várható értéke értékes információt nyújthat.

Az előbbi például akkor jöhet számításba, ha a raktár K kapacitása korlátozott, és kíváncsiak vagyunk, mi annak a valószínűsége, hogy a maximális raktárkészlet ezt nem lépi túl. Mivel a mindenkori raktárkészlet

$$M+\xi_n(t, c, T)-ct, \tag{3.8}$$

így az első kérdésünkre a

$$\mathbf{P}(\sup_{0\leq t\leq T}\{M+\xi_n(t,c,T)-ct\} < K) = \tag{3.9}$$

$$= \mathbf{P}(\sup_{0\leq t\leq T}\{\xi_n(t,c,T)-ct\} < K-M) = 1-\left(1-\frac{K-M}{cT}\right)^n\left(1+\frac{K-M}{cT}\right)^{n-1}$$

valószínűség ad választ, amennyiben

$$0 \leqq K-M \leqq cT.$$

Az egyéb esetek nem érdekesek.

A maximális raktárkészlet várható értéke viszont például az eszközlekötési járulék szempontjából lehet érdekes. Ennek kiszámításához használjuk fel, hogy

$$\mathbf{M}(\sup_{0\leq t\leq T}\{M+\xi_n(t, c, T)-ct\}) = M+cT\mathbf{M}(\sup_{0\leq t\leq 1}\{\xi_n(t)-t\}),$$

ahonnan a várható érték definíciója alapján

$$\mathbf{M}(\sup_{0\leq t\leq 1}\{\xi_n(t)-t\}) = \int_0^1 z\frac{d}{dz}[1-(1-z)^n(1+z)^{n-1}]\,dz =$$

$$= \left[z(1-(1-z)^n(1+z)^{n-1})\right]_0^1 - \int_0^1 [1-(1-z^2)^{n-1}(1-z)]\,dz =$$

$$= \int_0^1 (1-z^2)^{n-1}(1-z)\,dz = -\frac{1}{2n}+\int_0^1 (1-z^2)^{n-1}\,dz.$$

Ez utóbbi integrálból $z=\sin u$ helyettesítéssel

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1}u\,du = \frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$$

adódik. Így a keresett várható érték:

$$\text{(3.10)}\quad \mathbf{M}\big(\sup_{0\leq t\leq T}\{M+\xi_n(t)-ct\}\big)=M+ct\left[\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{1}{2n}\right].$$

A (3.10) formula elég nehezen kezelhető, számítsuk ki tehát az aszimptotikus esetre vonatkozó várható értéket is. Ez a (3.10)-ből közvetlenül is kihozható, de egyszerűbb, ha a (3.4) határeloszlás ismeretében felhasználjuk, hogy elég nagy $n$-ek esetén

$$\text{(3.11)}\quad \mathbf{M}\big(\sup_{0\leq t\leq T}\{M+\xi_n(t,c,T)-ct\}\big)=M+cT\mathbf{M}\big(\sup_{0\leq t\leq 1}\{\xi_n(t)-t\}\big)\approx$$

$$\approx M+cT\int_0^1 z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[1-e^{-nz^2}]\,\mathrm{d}z=M+\frac{cT}{n}\int_0^n e^{-u^2}\mathrm{d}u\approx M+cT\sqrt{\frac{1}{n}\frac{\pi}{4}}.$$

Érdekes, de tulajdonképpen nem váratlan, hogy a (3.11) már $n\geqq 5$ esetén is 2,5%-os hibán belül alkalmazható (3.10) közelítésére.

## 2. Az alapmodell keverése

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a szállítások száma adott természetes szám. Sok esetben közelebb áll azonban a gyakorlathoz, ha ezt egy nem negatív egész értékeket felvevő alkalmas eloszlású $\nu$ valószínűségi változónak tekintjük és a $\xi_n(t)$ helyett a $\xi_\nu(t)$ sztohasztikus folyamatot vizsgáljuk.

Legyen a $\nu$ eloszlása

$$\mathbf{P}(\nu=k)=p_k;\quad \sum_{k=0}^{\infty}p_k=1\qquad(k=0,1,2,\ldots).$$

A teljes valószínűség tétele értelmében a számunkra érdekes eloszlások

$$\text{(3.12)}\qquad \mathbf{P}\big(\sup_{0\leq t\leq 1}\{t-\xi_\nu(t)\}<y\big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\big(\sup_{0\leq t\leq 1}\{t-\xi_\nu(t)\}<y\,|\,\nu=k\big)\mathbf{P}(\nu=k)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k[1-(1-y)^k(1+y)^{k-1}]=$$

$$=\begin{cases}1-p_0-\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k(1-y)^k(1+y)^{k-1}; & \text{ha}\quad 0\leqq y<1\\ 1; & \text{ha}\quad y=1,\end{cases}$$

illetve hasonló okoskodással

$$\text{(3.13)}\quad \mathbf{P}\big(\sup_{0\leq t\leq 1}\{\xi_\nu(t)-t\}<y\big)=1-\sum_{k=1}^{\infty}p_k(1-y)^k(1+y)^{k-1}\quad(0\leqq y\leqq 1).$$

A két eredmény közötti különbség abból adódik, hogy a $k=0$ esetben $\xi_0(t)\equiv 0$ feltevéssel éltünk.

Adjunk meg a fentiek illusztrálására $\nu$-re néhány gyakrabban előforduló eloszlást és vizsgáljuk meg a hozzájuk tartozó kevert modelleket.

a) *Az alapmodell keverése a Poisson-eloszlás szerint*

Legyen tehát

$$\mathbf{P}(\nu = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots); \lambda > 0,$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k (1-y)^k (1+y)^{k-1} = \frac{e^{-\lambda}}{1+y} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\lambda(1-y^2)]^k}{k!} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{1+y} (e^{(1-y^2)} - 1) = \frac{1}{1+y} e^{-\lambda y^2} - \frac{e^{-\lambda}}{1+y}$$

és így

$$(3.14) \qquad \mathbf{P}(\sup_{0 \le t \le 1} \{t - \xi_n(t)\} < y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+y} e^{-\lambda y^2} - \dfrac{y e^{-\lambda}}{1+y}, & \text{ha} \quad 0 \leqq y < 1 \\ 1, & \text{ha} \quad y = 1. \end{cases}$$

illetve

$$(3.15) \qquad \mathbf{P}(\sup_{0 \le t \le 1} \{\xi_\nu(t) - t\} < y) = 1 - \frac{1}{1+y} e^{-\lambda y^2} + \frac{e^{-\lambda}}{1+y}, \quad (0 \leqq y \leqq 1).$$

Érdekes, hogy ha a *Poisson*-eloszlás $\lambda$ várható értéke tart a végtelenhez, akkor $\xi_\nu(t)$ határeloszlása megegyezik $\xi_a(t)$ határeloszlásával, ugyanis

$$(3.16) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \mathbf{P}(\sqrt{\lambda} \sup_{0 \le t \le 1} \{t - \xi_\nu(t)\} < z) =$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \mathbf{P}(\sqrt{\lambda} \sup_{0 \le t \le 1} \{\xi_\nu(t) - t\} < z) = 1 - e^{-z^2}.$$

Így elég nagy $\lambda$ esetén most is

$$(3.17) \qquad y \approx \sqrt{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

adja a (3.14) és (3.15) $1-\varepsilon$ megbízhatósági szinthez tartozó megoldását.

b) *Az alapmodell keverése binomiális eloszlás szerint*

Legyen a $\nu$ eloszlása

$$\mathbf{P}(\nu = k) = p_k = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m; \quad m \geqq 1; \quad 0 < p < 1,$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{m} p_k (1-y)^k (1+y)^{k-1} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} (1-y)^k (1+y)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{1+y} \sum_{k=1}^{m} [p(1-y^2)]^k (1-p)^{m-k} = \frac{1}{1+y} [(1-py^2)^m - (1-p)^m]$$

és így

(3.18)

$$\mathbf{P}(\sup_{0 \le t \le 1} \{t - \xi_\nu(t)\} < y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+y} (1-py^2)^m - \dfrac{y(1-p)^m}{1+y}, & \text{ha} \quad (0 \leqq y < 1) \\ 1, & \text{ha} \quad y = 1 \end{cases}$$

illetve

$$\text{(3.19)}\quad \mathbf{P}\big(\sup_{0\le t\le 1}\{\xi_\nu(t)-t\}<y\big)=1-\frac{1}{1+y}(1-py^2)^m+\frac{(1-p)^m}{1+y};\qquad 0\leqq y\leqq 1.$$

Ha a binomiális eloszlás $mp$ várható értéke rögzített $0<p<1$ esetén tart a végtelenhez, most is ugyanazt a határeloszlást kapjuk, hiszen például (3.19) alapján

$$\lim_{m\to\infty}\mathbf{P}\big(\sqrt{mp}\sup_{0\le t\le 1}\{\xi_\nu(t)-t\}<z\big)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+\frac{z}{\sqrt{mp}}}\left(1-\frac{z^2}{m}\right)^m+\frac{(1-p)^m}{1+\frac{z}{\sqrt{mp}}}\right)=1-e^{-z^2},\quad (z>0)$$

és így elég nagy $mp$ esetén

$$y=\sqrt{\frac{1}{mp}\ln\frac{1}{\varepsilon}}$$

jó közelítéssel adja a (3.18) és (3.19)-re vonatkozó megbízhatósági egyenletek megoldását.

c) *Az alapmodell keverése negatív binomiális eloszlás szerint*

Legyen a $\nu$ eloszlása

$$\mathbf{P}(\nu=r+k)=\binom{k+r-1}{r-1}p^r(1-p)^k\qquad (r=1,2,3,\ldots;\ k=0,1,2,\ldots;\ 0<p<1),$$

akkor az ennek megfelelő

$$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+r-1}{r-1}p^r(1-p)^k(1-y)^{r+k}(1+y)^{r+k-1}=$$

$$=\frac{[p(1-y^2)]^r}{1+y}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-r}{k}[-(1-p)(1-y^2)]^k=\frac{1}{1+y}\left[\frac{p(1-y^2)}{1-(1-p)(1-y^2)}\right]^r$$

összeg alapján

$$\text{(3.20)}\qquad \mathbf{P}\big(\sup_{0\le t\le 1}\{t-\xi_\nu(t)<y\big)=\mathbf{P}\big(\sup_{0\le t\le 1}\{\xi_\nu(t)-t\}<y\big)=$$

$$=1-\frac{1}{1+y}\left[\frac{p(1-y^2)}{1-(1-p)(1-y^2)}\right]^r,\quad (0\leqq y\leqq 1).$$

Mivel a negatív binomiális $\frac{r}{p}$ várható értéke két különböző módon tarthat a végtelenhez, nézzük meg először rögzített $0<p<1$ esetben a számunkra érdekes határeloszlást:

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{P}\left(\sqrt{\frac{r}{p}} \sup_{0\leq t\leq 1} \{t-\xi_\nu(t)\} < z\right) = \tag{3.21}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left[1-\frac{1}{1+z\sqrt{\frac{p}{r}}}\left[1+\frac{\frac{z^2}{1-\frac{pz^2}{r}}}{r}\right]^{-r}\right] = 1-e^{-z^2} \quad (z>0),$$

amely eredmény az eddigieknek megfelelő következményekkel jár.

Ha viszont az $r$ paramétert rögzítjük és $p\to 0$ alapján biztosítjuk a megfelelő határátmenetet, akkor az eddigiektől eltérő határeloszlást kapunk:

$$\lim_{p\to 0} \mathbf{P}\left(\sqrt{\frac{r}{p}} \sup_{0\leq t\leq 1} \{t-\xi_\nu(t)\} < z\right) = \tag{3.22}$$

$$= \lim_{p\to 0}\left[1-\frac{1}{1+z\sqrt{\frac{p}{r}}}\left(1+\frac{\frac{z^2}{1-\frac{pz^2}{r}}}{r}\right)^{-r}\right] = 1-\left(1+\frac{z^2}{r}\right)^{-r}.$$

Innen a $z=y\sqrt{\frac{r}{p}}$ helyettesítéssel megkapjuk a (3.20)-hoz tartozó megbízhatósági egyenlet aszimptotikus megoldását, amely

$$y \approx \sqrt{p\left(\sqrt[r]{\frac{1}{\varepsilon}}-1\right)}. \tag{3.23}$$

Tekintettel arra, hogy a negatív binomiális eloszlás $r=1$ speciális esete a geometriai eloszlás, így eredményeink, természetesen (3.21) kivételével, egyúttal az alapmodell geometriai eloszlás szerinti keverésére is vonatkoznak.

d) *Az alapmodell keverése egyenletes eloszlás szerint*

Legyen a $\nu$ eloszlása

$$\mathbf{P}(\nu=k) = \frac{1}{b-a+1}$$

az $a\leq k\leq b$ rácspontokban, akkor az egyszerűség kedvéért $a\geq 1$-et feltételezve

$$\mathbf{P}(\sup_{0\leq t\leq 1}\{t-\xi_\nu(t)\}<y) = \mathbf{P}(\sup_{0\leq t\leq 1}\{\xi_\nu(t)-t\}<y) = \tag{3.24}$$

$$= \sum_{k=a}^{b}\frac{1}{b-a+1}[1-(1-y)^k(1+y)^{k-1}] =$$

$$= 1-\frac{1}{(1+y)(b-a+1)}\sum_{k=a}^{b}(1-y^2)^k = 1-\frac{(1-y^2)^a[1-(1-y^2)^{b-a+1}]}{(1+y)(b-a+1)y^2}.$$

Érezzük most is, ha a $\nu$ várható értéke $\frac{a+b}{2}=n$ elég nagy és az eloszlás fél terjedelme: $k$ rögzített, akkor az alapmodellre vonatkozó határeloszláshoz jutunk. Ennél azonban többet is mondhatunk: ha $n$-nel együtt $k$ is tart a végtelenhez, de $\lim \frac{k}{n}=0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sqrt{n} \sup_{0\le t\le 1} \{t-\xi_\nu(t)\} < z\right) = \tag{3.25}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^{n-k}\left[1-\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^{2k+1}\right]}{\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)(2k+1)\frac{z^2}{n}}\right) =$$

$$= 1-\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^{n\left(1-\frac{k}{n}\right)}\left[1-\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^{n\frac{2k+1}{n}}\right]}{\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)\frac{2k+1}{n}z^2} = 1-e^{-z^2},$$

az eredménynek megfelelő következményekkel.

Talán nem érdektelen még megjegyeznünk, hogy az előző határeloszlás

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = \alpha, \quad 0<\alpha\leqq 1$$

esetben

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sqrt{n} \sup_{0\le t\le 1} \{t-\xi_\nu(t)\} < z\right) = 1-\frac{e^{-z^2}(1-\alpha)(1-e^{-2\alpha z^2})}{2\alpha z^2}, \tag{3.26}$$

amelyből $\alpha\to 0$ határátmenettel szintén megkaphatjuk (3.25)-t.

### 3. A Prékopa-modellel kapcsolatos megjegyzések

Az első fejezetben említettük, hogy a PRÉKOPA által bevezetett $F_n(t, \lambda)$ általánosított empirikus eloszlásfüggvénnyel kapcsolatos modellnek csak az aszimptotikus megoldását ismerjük, amely $1-\varepsilon$ megbízhatósági szint esetén

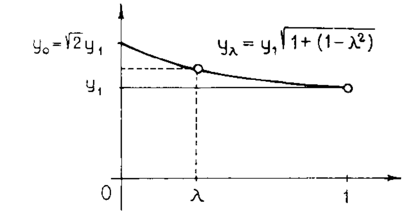
$$y_\lambda \approx \sqrt{\frac{1+(1-\lambda)^2}{2n}\ln\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{3.27}$$

Innen leolvasható, hogy elég nagy $n$ esetén $y$ szigorúan monoton csökken:

$$y_0 \geqq y_\lambda \geqq y_1,$$

valamint a $\lambda=0$ és $\lambda=1$ speciális esetekre vonatkozóan

$$y_0 = y_1\sqrt{2}.$$




8. ábra

Ha elfogadjuk, hogy a $\lambda$-szerinti monotonitás véges $n$-ekre vonatkozóan is érvényben marad, akkor az $y_0$ és $y_1$ ismeretében $y_\lambda$-ra legegyszerűbben úgy adhatunk becslést, ha a (3.27)-be becsempésszük ezeket az értékeket. Ez azonban nem okoz nehézséget, mert (3.27)-ből

$$y_\lambda^2 \approx \frac{1}{2n}\ln\frac{1}{\varepsilon}+(1-\lambda)^2\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2n}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

azaz

$$y_\lambda^2 \approx y_1^2+(1-\lambda)^2(y_0^2-y_1^2)$$

és így legyen a keresett becslés

$$y_\lambda = \sqrt{y_1^2+(1-\lambda)^2(y_0^2-y_1^2)} \tag{3.28}$$

A (3.28) becslés az $y_0$ és $y_1$-re vonatkozó táblázatok segítségével alkalmazható, és megvan az az előnye, hogy a $\lambda=0$, $\lambda=1$ és az aszimptotikus esetben pontos.

A (3.28) becslés egy másik modell esetén is felmerülhet. A *Prékopa*-modell ugyanis még tovább általánosítható. Ennek az általánosításnak az a gyakorlati háttere, hogy az egyes leszállított mennyiségek minimális alsó korlátozása mellett célszerű a szomszédos szállítási időpontok különbségét is alulról korlátozni. Ennek megfelelően a $F_n(t,\lambda)$ helyett az alábbi $F_n(t,\lambda,\mu)$ sztohasztikus folyamat vizsgálata szükséges:

$$F_n(t,\lambda,\mu) = \begin{cases} 0; & \text{ha } \ 0 \leqq t < (1-\mu)t_1^*+\frac{\mu}{n} \\ (1-\lambda)\tau_k^*+\frac{k\lambda}{n}; & \text{ha } \ (1-\mu)t_k^*+\frac{k\mu}{n} \leqq t < (1-\mu)t_{k+1}^*-\frac{(k+1)\mu}{n} \\ & \qquad (k=1,2,\dots,n-1) \\ 1; & \text{ha } \ (1-\mu)t_n^*+\mu \leqq t \leqq 1. \end{cases} \tag{3.29}$$

Könnyű megmutatni azonban, hogy a $(\lambda,\mu)$ probléma nem jelent lényegesen újat a $\lambda$ problémához képest. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\lambda \geqq \mu$, akkor

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{t-F_n(t,\lambda,\mu)\} < y\right) = \tag{3.30}$$

$$= \mathbf{P}\left((1-\mu)t_1^*+\frac{\mu}{n} < y;\ (1-\mu)t_2^*+\frac{2\mu}{n} < (1-\lambda)\tau_1^*+\frac{\lambda}{n};\ \dots;\right.$$

$$(1-\mu)t_n^*+\mu < y+(1-\lambda)\tau_{n-1}^*+\frac{(n-1)\lambda}{n}\Bigg) =$$

$$= \mathbf{P}\left(t_1^* < \frac{y-\frac{\mu}{n}}{1-\mu};\ t_2 < \frac{y-\frac{\mu}{n}}{1-\mu}+\frac{1-\lambda}{1-\mu}\tau_1^*+\frac{\lambda-\mu}{1-\mu};\ \dots;\right.$$

$$\left. t_n < \frac{y-\frac{\mu}{n}}{1-\mu}+\frac{1-\lambda}{1-\mu}\tau_{n-1}^*+\frac{(n-1)}{n}\frac{\lambda-\mu}{1-\mu}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\left\{t-F_n\left(t;\frac{\lambda-\mu}{1-\mu}\right)\right\} < \frac{y-\frac{\mu}{n}}{1-\mu}\right),$$

ha
$$0 \leqq \frac{y-\frac{\mu}{n}}{1-\mu} \leqq 1;$$
amiből következik az állításunk.

A (3.30) segítségével természetesen most is csak az aszimptotikus megoldást tudjuk megadni. Alkalmazzuk ugyanis (1.17)-et (3.30)-ra, akkor a megfelelő megbízhatósági egyenlet megoldását $y_{\lambda,\mu}$-vel jelölve kapjuk, hogy

$$\frac{y_{\lambda,\mu}-\frac{\mu}{n}}{1-\mu} \approx \sqrt{\frac{1+\left(\frac{\lambda-\mu}{1-\mu}\right)^2}{2n}\ln\frac{1}{\varepsilon}}$$

azaz

$$y_{\lambda,\mu} \approx \frac{\mu}{n}+\sqrt{\frac{(1-\mu)^2+(1-\lambda)^2}{2n}\ln\frac{1}{\varepsilon}} \tag{3.31}$$

Bár $\frac{\mu}{n}$ csak $\frac{1}{n}$ nagyságrendű, de a $\lambda=\mu=1$ speciális eset kedvéért kiírtuk.

A $\lambda<\mu$ esetében szintén érvényes a (3.31). Ezt valamivel bonyolultabban, de lényegében az előbbi módszerrel láthatnánk be, ezért mellőzzük.

Alkalmazzuk (3.31)-re is a probléma véges $n$-re vonatkozó (3.28)-becslését, akkor kapjuk, hogy

$$y_{\lambda,\mu} \approx \frac{\mu}{n}+\sqrt{(1-\mu)^2y_1^2+(1-\lambda)^2(y_0^2-y_1^2)}. \tag{3.32}$$

A gyakorlatilag is érdekes speciális $\lambda=\mu$ esetben viszont pontos megoldást tudunk adni. A (3.30)-at megfigyelve látható, hogy ebben az esetben közvetlenül alkalmazható az alaptétel és így

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{t-F_n(t,\lambda,\lambda)\} < y\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{t-\zeta_n(t)\} < \frac{y-\frac{\lambda}{n}}{1-\lambda}\right) = \tag{3.33}$$

$$= 1-\left(1-\frac{y-\frac{\lambda}{n}}{1-\lambda}\right)^n\left(1+\frac{y-\frac{\lambda}{n}}{1-\lambda}\right)^{n-1},\quad \text{ha}\quad 0\leqq \frac{y-\frac{\lambda}{n}}{1-\lambda}\leqq 1,$$

és így $y_{\lambda,\lambda}$-ra az

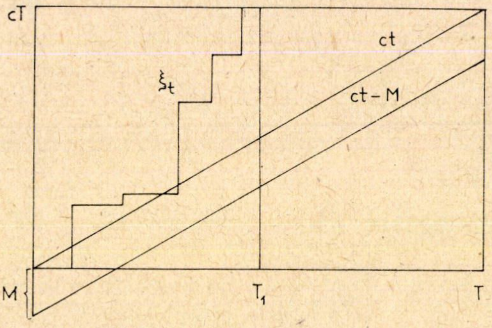
$$y_{\lambda,\lambda} = \frac{\lambda}{n} + (1-\lambda)y_0 \tag{3.34}$$

eredményt kapjuk, amely az 1. táblázat segítségével már könnyen számítható.

## IV. AZ ALAPMODELL ELSŐ ÁLTALÁNOSÍTÁSA

### 1. A probléma felvetése

Egyik kénsavgyárunk az állandó intenzitású termeléshez szükséges több tízezer tonna nagyságrendű piritet importból fedezi. Tekintettel arra, hogy fagyos időben a vagonokat nem lehet kirakni, a szállító partner az egész évi szükségletet mintegy fél év alatt leszállítja. Az üzemi naplók tanúsága szerint mind a szállítási időpontok, mind az egyes időpontokig leszállított mennyiségek jó közelítéssel egyenletes eloszlásúnak tekinthetők. Így ha feltesszük, hogy a termelési periódus $(0, T)$, a szállítási periódus $(0, T_1)$, a termelés intenzitása $c$, a szállítások száma $n$ és az induló készlet $M$, akkor a folyamatos termeléssel kapcsolatos problémáinkat a




9. ábra

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T_1}\{ct-\xi_t\} < M\Big) \tag{4.1}$$

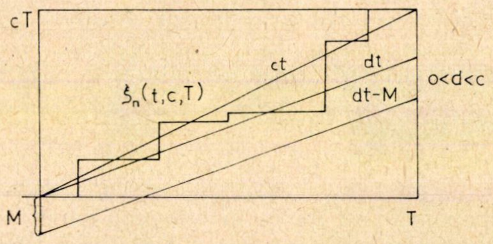
valószínűség ismeretében tudjuk meghatározni, ahol

$$\xi_t = \xi_n\left(t, c\frac{T}{T_1}, T_1\right).$$

Hasonló jellegű problémához jutunk akkor is, ha a szállítási szerződések megkötése után valami okból kifolyólag csökken a termelés tervezett intenzitása. Ebben az esetben számunkra a

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\{dt-\xi_n(t, c, T)\} < M\Big), \quad (0 < d < c) \tag{4.2}$$

valószínűség az érdekes, amelynek meghatározása a (4.1)-gyel ekvivalens feladatot jelent.

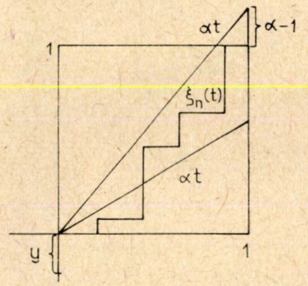



10. ábra

Természetesen (4.2) $d>c$ esetben is gyakorlati tartalommal bír, ezért a továbbiakban vizsgáljuk tetszőleges $d>0$ esetén a modellt, amely így valóban az alapmodell általánosításának tekinthető. Térjünk át ezért itt is a lényegesen kevesebb paramétert tartalmazó normál alakra. Az I. fejezet 2. pontjában alkalmazott gondolatmenet megismétlésével belátható, hogy az

$$y = \frac{M}{cT} \quad \text{és} \quad \alpha = \frac{dT}{cT} = \frac{d}{c}$$

helyettesítés után




11. ábra

(4.2) helyett elegendő a

$$\text{(4.3)} \qquad \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \{\alpha t - \xi_n(t)\} < y\right)$$

valószínűséget vizsgálnunk.

Az alapmodell fenti általánosítására vonatkozóan bebizonyítjuk az alábbi tételt:

2. Tétel: *Tetszőleges $\alpha>0$ esetén*

$$\text{(4.4)} \qquad \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \{\alpha t - \xi_n(t)\} < y\right) =$$

$$= \begin{cases} 0; & ha \quad y \leqq \max\{0; \alpha-1\} \\ 1-\left(1-\dfrac{y}{\alpha}\right)^n (1+y)^{n-1}; & ha \quad \max\{0; \alpha-1\} < y < \alpha \\ 1; & ha \quad \alpha \leqq y. \end{cases}$$

Mivel a 2. Tétel az $\alpha=1$ esetben átmegy az alaptételbe, így ennek a bebizonyításával egyúttal az alaptétel egy új bizonyítását is nyerjük. Mielőtt azonban erre rátérnénk, vizsgáljuk meg a tétel következményeit.

Írjuk fel először a modellhez tartozó megbízhatósági egyenletet:

$$1-\left(1-\frac{y}{\alpha}\right)^n(1+y)^{n-1}=1-\varepsilon. \tag{4.5}$$

Látjuk, hogy ez az alapmodellhez képest eggyel több paramétert tartalmaz. Így az egyenlet közelítő megoldásait magában foglaló táblázat terjedelme megsokszorozódik az $\alpha$ paraméter értékeinek multiplicitása szerint. Ezért fokozottan érdekes a probléma aszimptotikus megoldása. A bonyolult jelölések elkerülése érdekében tárgyaljuk ezt két lépésben az $\alpha<1$ és az $\alpha>1$ eseteknek megfelelően. Az $\alpha=1$ esetben természetesen alkalmazható az alapmodellre vonatkozó

$$y\approx\sqrt{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\varepsilon}}$$

összefüggés.

Legyen tehát először $\alpha<1$, akkor a

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(n\sup_{0\leq t\leq 1}\{t-\xi_n(t)\}<z\right)= \tag{4.6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{\frac{z}{\alpha}}{n}\right)^n\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-1}\right]=1-e^{-z\frac{1-\alpha}{\alpha}};\quad z>0$$

határeloszlásból a $z=ny$ helyettesítéssel az

$$1-e^{-yn\frac{1-\alpha}{\alpha}}=1-\varepsilon$$

megbízhatósági egyenlet megoldása

$$y\approx\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.7}$$

Az $\alpha>1$ esetben először vezessük be az

$$y=\alpha-1+y^+$$

helyettesítést, amely a (4.4) tétel alakját az alábbiakban módosítja:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq t\leq 1}\{\alpha t-\xi_n(t)\}<\alpha-1+y^+\right)= \tag{4.8}$$

$$=1-\left(1-\frac{\alpha-1+y^+}{\alpha}\right)^n(n+\alpha-1+y^+)^{n-1}=1-\frac{1}{\alpha}(1-y)^n\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^{n-1}.$$

(4.8) felhasználásával

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(n\sup_{0\leq t\leq 1}\{t-\xi_n(t)<\alpha-1+z^+\right)=1-\frac{1}{\alpha}e^{-z^+\frac{\alpha-1}{\alpha}},\quad z^+>0. \tag{4.9}$$

Innen a $z^+=ny^+$ helyettesítéssel elég nagy $n$ esetén az

$$y^+ \approx \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\varepsilon} \tag{4.10}$$

$1-\varepsilon$ megbízhatósági szintre vonatkozó aszimptotikus megoldást kapjuk, és így

$$y = \alpha-1+\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.11}$$

Figyeljük meg azt az érdekes tényt, hogy az $\alpha<1$ esetben az $y$, illetve az $\alpha>1$ esetben az $y^+$ csak $\frac{1}{n}$ nagyságrendű, amely lényegesen kedvezőbb az alapmodellnek megfelelő $\lambda=1$ esetben kapott $\frac{1}{\sqrt{n}}$ nagyságrendnél. Ez a tény kvalitatíve elég jól szemléltethető a 10. ábra segítségével. Gondoljuk meg ugyanis, hogy míg az $\alpha=1$ esetben az egész $(y, 1)$ intervallumban nagyjából egyforma valószínűséggel következhet be a

$$t-\xi_n(t) \geqq y$$

esemény, addig például az $\alpha<1$ esetben az $\left(\frac{y}{\alpha}, 1\right)$ intervallumban az igény a $t$ növekedtével egyre nagyobb valószínűséggel elmarad a szállításoktól, és így elsősorban a $t=\frac{y}{\alpha}$ időpont közelében várható a számunkra kedvezőtlen esemény bekövetkezése.

Illusztrálásul alkalmazzuk a kapott eredményeinket a kénsavgyárral kapcsolatban felvetett problémára. Itt a szállítások száma $(n)$, elég nagy ahhoz, hogy alkalmazhassuk a (4.7) aszimptotikus formulát. A 9. ábra segítségével követhető, hogy az

$$y=\frac{M}{cT} \quad \text{és az} \quad \alpha=\frac{cT_1}{cT}=\frac{T_1}{T}$$

helyettesítéssel (4.7)-ből az $1-\varepsilon$ megbízhatósági szinthez tartozó minimális $M$ induló-készletre

$$\frac{M}{cT} \approx \frac{\frac{T_1}{T}}{1-\frac{T_1}{T}}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\varepsilon},$$

azaz

$$M \approx \frac{cT_1T}{T-T_1}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\varepsilon} \tag{4.12}$$

összefüggést kapjuk.

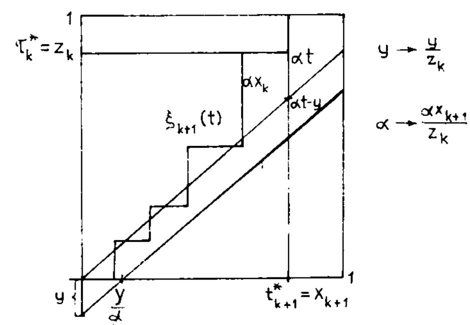
Ha $n$ is valószínűségi változó, akkor célszerű (4.12)-ben az $n$ várható értékével számolni. Természetesen annak sincs akadálya, hogy az alapmodellhez hasonlóan most is előállítsuk a megfelelő kevert modellt a pontosabb eredmény érdekében. Ez azonban semmi új problémát nem jelent, és így itt nem ismételjük meg.

## 2. A 2. Tétel bizonyítása

Az alaptétel bizonyításánál alkalmazott módszer segítségével a 2. tétel is bebizonyítható. Az így nyert eredmény lehetőséget ad azonban a teljes indukció alkalmazásával egy elegánsabb bizonyításra.

A tétel állítása az $y \leqq \max\{0; \alpha-1\}$ és az $y \geqq \alpha$ esetekben triviális. Legyen tehát a továbbiakban $\max\{0; \alpha-1\} < y < \alpha$.

A tétel $n=1$-re igaz. A (4.4)-re kapott $\frac{y}{\alpha}$ valószínűség ugyanis éppen annak az eseménynek a valószínűségét jelenti, hogy az egyetlen $t_1^*$ véletlen pont a $\left(0, \frac{y}{\alpha}\right)$ intervallumba esik, az $\alpha t_1^* < y$ feltételnek megfelelően.




12. ábra

Tegyük fel most, hogy a tétel igaz $n=k$-ra $(k=1, 2, \ldots)$, akkor az alábbi feltételes valószínűségre a 2. Tétel alapján kapjuk

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqq t \leqq x_{k+1}} \{\alpha t - \xi_{k+1}(t)\} < y \mid t_{k+1}^* = x_{k+1};\ \tau_k^* = z_k\right) = \tag{4.13}$$

$$= \begin{cases} 1; & \text{ha} \quad \alpha x_{k+1} < y \\ 1 - \left(1 - \dfrac{y}{\alpha x_{k+1}}\right)^k \left(1 + \dfrac{y}{z_k}\right)^{k-1}; & \text{ha} \quad \begin{cases} \alpha x_{k+1} \geqq y \\ z_k > \alpha x_{k+1} - y \end{cases} \\ 0; & \text{ha} \quad \begin{cases} \alpha x_{k+1} \geqq y \\ z_k \leqq \alpha x_{k+1} - y. \end{cases} \end{cases}$$

A (4.13) felírásánál felhasználtuk, hogy $t_{k+1}^* = x_{k+1}$ feltétel mellett a $(t_1^*, \ldots, t_k^*)$ és a $(\tau_1^*, \ldots, \tau_{k-1}^*)$ valószínűségi változók egyenletes eloszlásúak a $(0, x_{k+1})$, illetve a $(0, z_k)$ intervallumban és így

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqq t \leqq x_{k+1}} \{\alpha t - \xi_{k+1}(t)\} < y \mid t_{k+1}^* = x_{k+1};\ \tau_k^* = z_k\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqq t \leqq x_{k+1}} \left\{\alpha t - \xi_k\left(t, \frac{z_k}{x_{k+1}}, x_{k+1}\right)\right\} < y\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqq t \leqq 1} \left\{\frac{\alpha x_{k+1}}{z_k} t - \xi_k(t)\right\} < \frac{y}{z_k}\right),$$

a megfelelő következményekkel.

Vegyük még figyelembe, hogy $t_{k+1}^*$ és $\tau_k^*$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$h(x_{k+1}, z_k) = (k+1)k x_{k+1}^k z_k^{k-1},$$

akkor a teljes valószínűség tétele általánosításának felhasználásával az $n = k+1$ esetre kapjuk:

$$\mathbf{P}(\sup_{0 \le t \le 1} \{\alpha t - \xi_{k+1}(t)\} < y) =$$

$$= \iint\limits_{z_k > \alpha x_{k+1} - y} \mathbf{P}(\sup_{0 \le t \le x_{k+1}} \{\alpha t - \xi_{k+1}(t)\} < y \,|\, t_{k+1}^* = x_{k+1}, \tau_k^* = z_k) h(x_{k+1}, z_k) \mathrm{d}x_{k+1} \mathrm{d}z_k =$$

$$= \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{k+1} + \int\limits_{x_{k+1} = y/\alpha}^{1} \int\limits_{z_k = \alpha x_{k+1} - y}^{1} (k+1) k x_{k+1}^k z_k^{k-1} \cdot$$

$$\cdot \left[1 - \left(1 - \frac{y}{\alpha x_{k+1}}\right)^k \left(1 + \frac{y}{z_k}\right)^{k-1}\right] \mathrm{d}z_k \mathrm{d}x_{k+1} =$$

$$= \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{k+1} + \int\limits_{y/\alpha}^{1} \int\limits_{\alpha x_{k+1} - y}^{1} \left[(k+1) k x_{k+1}^k z_k^{k-1} - \left(x_{k+1} - \frac{y}{\alpha}\right)^k (z_k + y)^{k-1}\right] \mathrm{d}z_k \mathrm{d}x_{k+1} =$$

$$= \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{k+1} + (k+1) \int\limits_{y/\alpha}^{1} x_{k+1}^k [1 - (\alpha x_{k+1} - y)^k] \, \mathrm{d}x_{k+1} -$$

$$-(k+1) \int\limits_{y/\alpha}^{1} \left(x_{k+1} - \frac{y}{\alpha}\right)^k [(1+y)^k - (\alpha x_{k+1})^k] \, \mathrm{d}x_{k+1} =$$

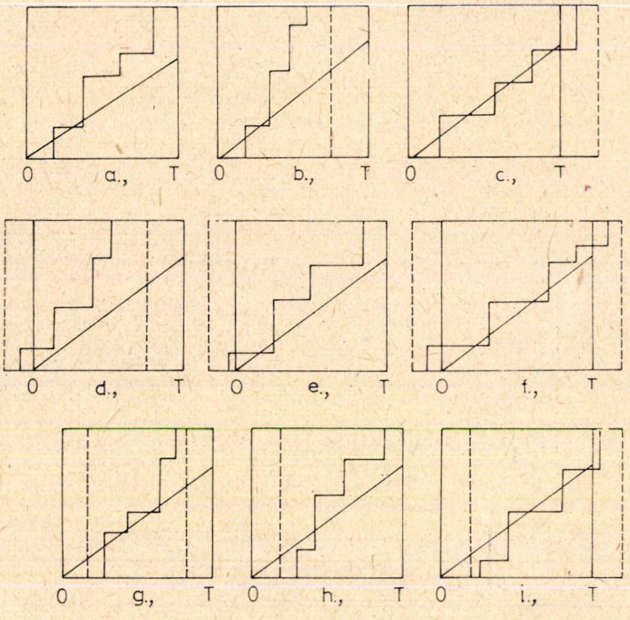
$$= \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{k+1} + (k+1) \int\limits_{y/\alpha}^{1} \left[x_{k+1}^k - (1+y)^k \left(x_{k+1} - \frac{y}{\alpha}\right)^k\right] \mathrm{d}x_{k+1} =$$

$$= \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{k+1} + 1 - \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{k+1} - \left(1 - \frac{y}{\alpha}\right)^{k+1} (1+y)^k = 1 - \left(1 - \frac{y}{\alpha}\right)^{k+1} (1+y)^k;$$

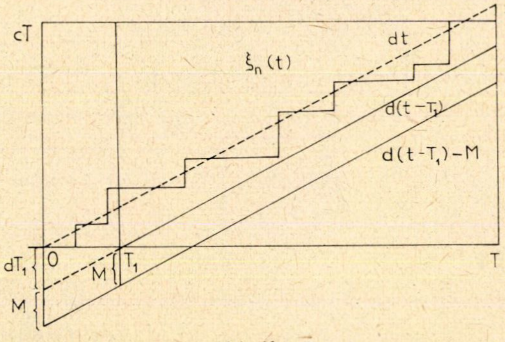
ami azt jelenti, hogy a 2. Tétel az $n = k+1$-re is igaz. Ezzel bebizonyítottuk állításunkat.

## 3. A 2. Tétel további alkalmazása

A kénsavgyárral kapcsolatban felvetett probléma csak egyike azon eseteknek, amelyek abból adódhatnak, hogy a termelési periódus és a szállítási periódus kezdő és végpontjai nem esnek egybe. Ábrázoljuk sematikusan ezen időpontok összes lehetséges egymáshoz való viszonyát, akkor az alábbi kilenc eset lehetséges: Ezek közül az *a)* és a *b)* alatti eseteket már tárgyaltuk, a *d)*, *e)*, *g)* és a *h)* esetek lényegében azonos kategóriába tartoznak, valamennyi hasonló módszerrel vizsgálható. Ezért közülük csak a legjellemzőbb *e)* esetet nézzük meg közelebbről.




13. ábra




14. ábra

Ekkor a 14. ábra jelöléseivel a probléma a

$$\mathbf{P}\big(\sup_{T_1 \leqq t \leqq T} \{d(t-T_1)-\xi_n(t, c, T)\} < M\big) \tag{4.14}$$

valószínűség meghatározása. Ez azonban nyilván megegyezik a

$$\mathbf{P}\big(\sup_{0 \leqq t \leqq T} \{dt-\xi_n(t, c, T)\} < M+dT_1\big)$$

valószínűséggel, amelyre viszont már közvetlenül alkalmazható a 2. Tétel, az

$$y = \frac{M+dT}{cT} \quad \text{és} \quad \alpha = \frac{d}{c}$$

helyettesítések elvégzése után. Ezek szerint (4.14)-re kapjuk:

$$\text{(4.15)} \qquad \mathbf{P}\left(\sup_{T_1 \leqq t \leqq T} \{d(t-T_1)-\xi_n(t, c, T)\} < M\right) =$$

$$= 1-\left(1-\frac{M+dT_1}{cT}\right)^n \left(1+\frac{M+dT_1}{cT}\right)^{n-1},$$

ha $\max\{0; (d-c)T\} < M+dT_1 < dT$, az egyéb esetekben pedig nulla, illetve egy. Figyeljük meg, hogy a most tárgyalt készletezési probléma esetén a $d<c$ esetben elvileg negatív indulókészlet is megengedhető, illetve már $M=0$ indulókészlet esetén is pozitív valószínűséget kapunk.

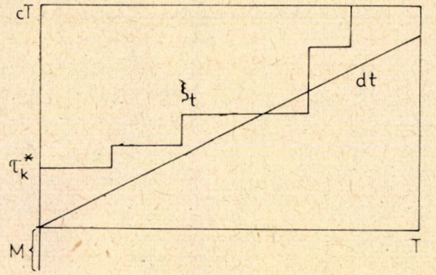
A még megmaradt, és szintén azonos jellegű *c), f)* és *i)* esetek szintén tárgyalhatók a 2. Tétel segítségével, de a kapott eredmények nem elég érdekesek ahhoz, hogy ezeket a gazdaságilag ésszerűtlen eseteket (a termelés hamarabb fejeződik be, mint a szállítások) érdemes lenne részletesebben tárgyalni.

## V. AZ ALAPMODELL MÁSODIK ÁLTALÁNOSÍTÁSA

### 1. Egy újabb előszállítással kapcsolatos modell

A IV. fejezet 3. pontjában foglalkoztunk már egy előszállításos modellel. Az ottani tárgyalásmód azonban csak akkor alkalmazható, ha ismerjük a szállítási periódus kezdetét. Ennek hiányában is lehetőségünk van a probléma megközelítésére az alábbi modell segítségével.

Tegyük fel, hogy a $(0, T)$ termelési periódusban $f(t)=dt$, az anyagigény $d>0$, de az első $k$ szállításnak megfelelő $\tau_k^*$ anyagmennyiség a $t=0$ időpontban már a raktárban van ($k=0, 1, ..., n$), és csak a további $(n-k)$ szállítási időpont realizálódik a $(0, T)$ intervallumban az eddigiekhez hasonlóan. Pontosabban megfogalmazva,




15. ábra

rögzített $k$ és $n$ paraméterek mellett legyen $(t_1^*, ..., t_{n-k}^*)$ és $(\tau_1^*, ..., \tau_{n-1}^*)$ a $(0, T)$, illetve a $(0, cT)$ intervallumban egyenletes eloszlású $(n-k)$, illetve $(n-1)$ elemű minta nagyság szerint rendezett sorozata, és legyen

$$\text{(5.1)} \qquad \xi_t = \begin{cases} \tau_k^*; & \text{ha} \quad 0 \leqq t \leqq t_1^* \\ \tau_{k+j}^*; & \text{ha} \quad t_j^* < t \leqq t_{j+1}^* \qquad (j = 1, 2, ..., n-k-1) \\ cT; & \text{ha} \quad t_{n-k}^* < t \leqq T. \end{cases}$$

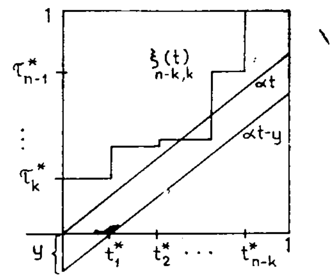
Ekkor a folyamatos anyagellátással kapcsolatos problémák megoldásához $M$ induló-készlet mellett a

$$\mathbf{P}\big(\sup_{0\leqq t\leqq T}\{dt-\xi_t\}<M\big) \tag{5.2}$$

valószínűség ismerete szükséges. Térjünk át most is a szokásos

$$y=\frac{M}{cT} \quad \text{és} \quad \alpha=\frac{d}{c}$$

helyettesítéssel a modell normál alakjára. Ekkor az (5.2) helyett a




16. ábra

$$\mathbf{P}\big(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{\alpha t-\xi_{n-k,k}(t)<y\big) \tag{5.3}$$

valószínűséget kell meghatároznunk, ahol

$$\xi_{n-k,k}(t)=\begin{cases}\tau^*_k; & \text{ha} \quad 0\leqq t\leqq t^*_1\\ \tau^*_{k+j}; & \text{ha} \quad t^*_j<t\leqq t^*_{j+1} \qquad (j=1,2,\dots,n-k-1)\\ 1; & \text{ha} \quad t^*_{n-k}<t\leqq 1\end{cases} \tag{5.4}$$

és ahol $(t^*_1, \dots, t^*_{n-k})$, valamint $(\tau^*_1, \dots, \tau^*_{n-1})$ most a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású $(n-k)$, illetve $(n-1)$ elemű minták nagysága szerint rendezett sorozatai, $\tau^*_0=0$.

Látható, hogy a $k=0$ esetben a $\xi_{n-k,k}(t)$ átmegy a $\xi_n(t)$ véletlen ugrású empirikus eloszlásfüggvénybe, így modellünk valójában az alapmodell egy további általánosítása. Ezt fejezi ki az alábbi tétel is:

3. Tétel: *Tetszőleges* $0\leqq k\leqq n$; $n\geqq 1$ *és* $\alpha>0$ *esetén*

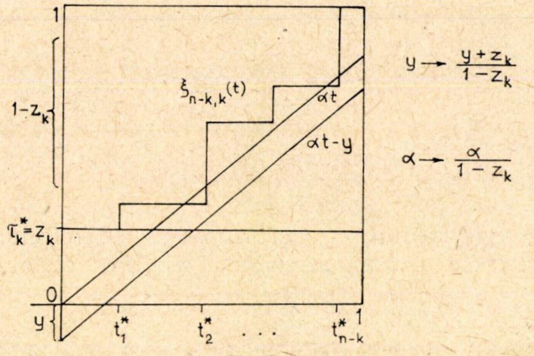
$$\mathbf{P}\big(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{\alpha t-\xi_{n-k,k}(t)\}<y\big)= \tag{5.5}$$

$$=\begin{cases}0; & \textit{ha} \quad y\leqq\max\{0;\alpha-1\}\\ 1-\dfrac{n-k}{n}\alpha^k\left(1-\dfrac{y}{\alpha}\right)^n(1+y)^{n-k-1}; & \textit{ha} \quad \max\{0;\alpha-1\}<y<\alpha\\ 1; & \textit{ha} \quad \geqq y.\end{cases}$$

*Bizonyítás:* A $k=0$ esetben a 2. Tétel értelmében nyilván igaz az állításunk. Legyen tehát $k \geqq 1$. Nyilván elég a

$$\max\{0;\ \alpha-1\} < y < \alpha$$

esettel foglalkoznunk. Legyen $\tau_k^* = z_k$ rögzített, akkor a 17. ábra, valamint a 2. Tétel




17. ábra

segítségével felírható az alábbi feltételes valószínűség:

$$\mathbf{P}(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{\alpha t-\xi_{n-k,k}(t)\} < y \mid \tau_k^* = z_k) =$$

$$= 1-\left(1-\frac{\dfrac{y+z_k}{1-z_k}}{\dfrac{\alpha}{1-z_k}}\right)^{n-k}\left(1+\frac{y+z_k}{1-z_k}\right)^{n-k-1} = 1-\left(1-\frac{y+z_k}{\alpha}\right)^{n-k}\left(1+\frac{y+z_k}{1-z_k}\right)^{n-k-1},$$

ha

$$\max\{0,\ 1-\alpha\} < y+z_k < \alpha.$$

A $\tau_k^*$ sűrűségfüggvénye

$$h(z_k) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} z_k^{k-1}(1-z_k)^{n-k-1},$$

így a teljes valószínűség tétele értelmében írhatjuk

$$\mathbf{P}(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{\alpha t-\xi_{n-k,k}(t)\} < y) = \int_{z_k=0}^{1} \mathbf{P}(\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{\alpha t-\xi_{n-k,k}(t)\} < y \mid \tau_k^* = z_k) h(z_k)\mathrm{d}z_k =$$

$$= \int_{z_k=0}^{\alpha-x} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} z_k^{k-1}(1-z_k)^{n-k-1} \cdot$$

$$\cdot\left[1-\left(1-\frac{y+z_k}{1-\alpha_k}\right)^{n-k}\left(1+\frac{y+z_k}{1-z_k}\right)^{n-k-1}\right]\mathrm{d}z_k +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n-1}{j}(\alpha-y)^j(1+y-\alpha)^{n-1-j} = \sum_{j=k}^{n-1}\binom{n-1}{j}(\alpha-y)^j(1+y-\alpha)^{n-1-j} -$$

$$-\int_0^{\alpha-y} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} z_k^{k-1}\left(1-\frac{y+z_k}{\alpha}\right)^{n-k}(1+y)^{n-k-1}\,dz_k+$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n-1}{j}(\alpha-y)^j(1+y-\alpha)^{n-1-j} =$$

$$=1-\frac{n-k}{n}(1+y)^{n-k-1}\int_0^{-y}\frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} z_k^{k-1}\left(1-\frac{y+z_k}{\alpha}\right)^{n-k} dz_k =$$

$$=1-\frac{n-k}{n}(1+y)^{n-k-1}\frac{1}{\alpha^{n-k}}(\alpha-y)^n = 1-\frac{n-k}{n}\alpha^k\left(1-\frac{y}{\alpha}\right)^n(1+y)^{n-k-1},$$

ha $\max\{0, \alpha-1\}<y<\alpha$, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyezzük, hogy eredményünk a formális $k=0$ helyettesítéssel a 2. Tétel, a $k=0$ és $\alpha=1$ helyettesítéssel pedig az alaptétel megfelelő állításába megy át.

## 2. A modellel kapcsolatos megbízhatósági egyenletek aszimptotikus megoldása

A 3. Tételben szereplő nagyszámú paraméter miatt elég reménytelen feladatnak látszik a megfelelő megbízhatósági egyenletek megoldásaira használható táblázatot készíteni. Fordítsuk ezért most is a figyelmünket elsősorban az aszimptotikus megoldásokra. Ha jól meggondoljuk, két eset az érdekes:

a) ha $k\geqq 1$ rögzített és $n\to\infty$,

b) ha $(k, n)\to\infty$, de $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k}{n}=\beta>0$.

Ezenkívül technikai okokból a két típuson belül is szét kell választanunk az egyes eseteket $\alpha$ értékétől függően.

Nézzük először az *a)* esetet.

Ha $0<\alpha<1$, akkor a

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(n\sup_{0\leqq t\leqq 1}\{\alpha t-\xi_{n-k,k}(t)\}<z\right)=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{n-k}{n}\alpha^k\left(1-\frac{\frac{z}{\alpha}}{n}\right)^n\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-k-1}\right]=$$

$$=1-\alpha^k e^{-z\frac{1-\alpha}{\alpha}},\quad (z>0)$$

határeloszlás felhasználásával az $1-\varepsilon$ szintű megbízhatósági egyenlet megoldására elég nagy $n$ esetén kapjuk:

$$y\approx\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{n}\ln\frac{\alpha^k}{\varepsilon},\quad \text{ha}\quad \alpha^k>\varepsilon. \tag{5.6}$$

Ha $\alpha=1$, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-k}{n}=1$ miatt az alapmodellre vonatkozó

$$y\approx\sqrt{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\varepsilon}} \tag{5.7}$$

közelítés használható.

Az $\alpha>1$ esetben pedig az

$$y=\alpha-1+y^+,$$

illetve a

$$z=z-1+z^+$$

helyettesítés után a megfelelő határeloszlásra a

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(n\sup_{0\leq t\leq 1}\{\alpha t-\xi_{n-k,k}(t)\}<\alpha-1+z^+)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{n-k}{n}\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{z^+}{n}\right)^n\left(1+\frac{\frac{z^+}{\alpha}}{n}\right)^{n-k-1}\right]=1-\frac{1}{\alpha}e^{-z^+\frac{\alpha-1}{\alpha}},\quad z^+>0$$

eredményt, és ebből a $z^+=ny^+$ helyettesítéssel $y$-ra az

$$y\approx\alpha-1+\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon} \tag{5.8}$$

közelítést kapjuk, feltéve hogy $\alpha\varepsilon<1$. Figyeljük meg, hogy (5.8) nem függ $k$-tól és megegyezik (4.11)-gyel.

A *b)* eset $0<\alpha<1$ mellett nem érdekes. Az $\alpha=1$ esetben a

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(n\sup_{0\leq t\leq 1}\{t-\xi_{n-k,k}(t)\}<z)=\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{z}{n}\right)^n\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\right]=$$

$$=1-(1-\beta)e^{-\beta z},\quad z>0$$

határeloszlásból

$$y\approx\frac{1}{\beta n}\ln\frac{1-\beta}{\varepsilon},\quad 0<\beta<1-\varepsilon \tag{5.9}$$

következik.

Végül az $\alpha>1$ esetben az (5.8)-nál használt módszerrel az

$$y\approx\alpha-1+\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{1}{\beta n}\ln\frac{1-\beta}{\alpha\beta},\quad \frac{1-\beta}{\alpha\beta}>1 \tag{5.10}$$

eredményt nyerjük.

Az előző modellekhez hasonlóan most is megvizsgálhatnánk még egy sereg további kérdést. Ez azonban annyira szerteágazó aprólékos munkát igényelne, amelyet csak a gyakorlatban konkrétan felmerülő feladatokkal kapcsolatban érdemes elvégezni. Reméljük azonban, hogy a dolgozatban tárgyalt modellek és ezek illusztrációi így is megmutatták a $\xi_n(t)$ véletlen ugrású empirikus eloszlásfüggvénynek és általánosításainak az elméleten túlmenő gyakorlati alkalmazási lehetőségeit.

## IRODALOMJEGYZÉK

[1] PRÉKOPA, A.: Reliability equation for an inventory problem and its asymptotic solutions, *Colloquium on the Application of Mathematics to Economics*, Budapest, 1963. 317—327.

[2] ZIERMANN, M.: Anwendung des Smirnov'schen Satzes auf Lagerhaltungsproblemen, *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, Volume VIII (1964) Series B. No. 4. 509—518.

[3] SZMIRNOV, N. V.: Priblizsénije zakonov raszpregyelényija szlucsajnüh velicsin po empiricseszkim dannüm, *Uszpehü Mat. Nauk*, **10**, (1949) 179—206.
[4] GLIVENKO, V. I.: Sulla determinazione empirica di una legge di probabilita, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, **4** (1933) 1—10.
[5] BIRNBAUM, Z. W. and TINGEY, F. H.: One sided confidence contours for probability distribution functions, *Ann. Math. Stat.*, **22** (1951) 592—596.
[6] PRÉKOPA, A.: *Valószínűségelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.
[7] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámitás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
[8] KARLIN, S.: *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York and London, 1966.
[9] DOOB, J. L.: *Stochastic Processes*, Wiley-Chapman, New York—London, 1953.
[10] WILKS, S. S.: *Mathematical Statistics*, Wiley, New York, 1962.
[11] GNYEGYENKO, B. V. — KOROLJUK, B. SZ.: O makszimálnom raszhozsgyenyii dvuh empiricseszkih raszpregyelenyij; *Dokl. Akad. Nauk*, **80** (1951) 525.
[12] BERNSTEIN, SZ. N.: *Tyeorija verojatnosztyej*, Moszkva 1946.
[13] KOLMOGOROV, A. N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin 1933.
[14] VEINOTT, A. F.: The status of mathematical inventory theory, *Management Sci.* (1966) 745—777.
[15] HADLEY, G. —WHITIN, T. M.: *Analysis of Inventory Systems*, 1963.
[16] MORAN, P. A. P.: *The Theory of Storage*, London, 1961.
[17] ARROW, K. J. —KARLIN, R.—SCARF, H.: Studies in the mathematical Theory of Inventory and Production, Palo Alto 1958.
[18] HALD, A.: *Statistical Tables and Formulas*, New York, Wiley 1958.

(Beérkezett: 1970. IX. 15.)

# ÜBER WAHRSCHEINLICHKEITSBESCHRÄNKTE LAGERHALTUNGSMODELLE

von

Z. LÁSZLÓ

## Zusammenfassung

A. PRÉKOPA hat sich in seiner Arbeit [1] mit der folgenden Zuverlässigkeitsgleichung beschäftigt:

$$P(\sup_{0 \leq t \leq T} \{ct - F_n(t, \lambda)\} < M) = 1 - \varepsilon. \tag{1}$$

Diese Gleichung entstand aus einem praktischen Problem: ein Unternehmen A liefert im Zeitintervall $(0, T)$ eine Menge $cT$ von einem gewissen Werkstoff fürs Unternehmen B. Diese Menge wird von Unternehmen B in der Zeit gleichmässig mit der Intensität $c > 0$ aufgebracht. Die einzelnen Lieferungszeitpunkte und die Lieferungsmengen sind Zufallsgrössen. Die $n$ Lieferungszeitpunkte verteilen sich in $(0, T)$ gleichmässig und voneinadner unabhängig. Jede einzelne Lieferungsmenge enthält einen fixen Teil $\lambda \dfrac{cT}{n}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, und die übrige $(1-\lambda)\, cT$ Menge wird unter den $n$ Zeitpunkten vollständig zufällig (gleichmässig) verteilt. $F_n\ (t, \lambda)$ bedeutet die bis zum Zeitpunkt $t$ abgelieferte Menge $0 \leq t \leq T$, und $M$ ist die Anfangsmenge.

Die Lösung der Gleichung (1) im Fall $\lambda = 1$ hat M. Ziermann, die asymptotische Lösung im Fall $0 \leq \lambda < 1$ hat A. Prékopa gegeben. Die allgemeine Lösung bei beliebigen $\lambda$ ist bisher unbekannt.

Der erste Teil des Vortrags behandelt die Gleichung (1) im Spezialfall $\lambda = 0$, und es wird bewiesen:

$$P(\sup_{0 \leq t \leq T} \{ct - F_n(t, 0)\} < M) = 1 - \left(1 - \frac{M}{cT}\right)^n \left(1 + \frac{M}{cT}\right)^{n-1} \quad 0 \leq M \leq cT. \tag{2}$$

Dieses Ergebnis ermöglicht die genaue Lösung $M_0$ der Gleichung (1) zu bestimmen und damit $M$ einzuschätzen.

Der zweite Teil des Vortrags erwähnt eine mögliche Verallgemeinerung des Modells (1). Nehmen wir an, dass auch die Lieferungszeitintervalle von einem Parameter $\mu$, $0 \leqq \mu \leqq 1$, von unten beschränkt sind. So wurde mit der Voraussetzung $\mu \leqq \lambda$ bewiesen

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqq t \leqq T} \{ct - F_n(t, \lambda, \mu)\} < M\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqq t \leqq T} \left\{ct - F_n\left(t, \frac{\lambda - \mu}{1 - \mu}\right)\right\} < \frac{M - \frac{\mu}{n}}{1 - \mu}\right),$$

wo $F_n\,(t, \lambda, \mu)$ die analoge zufällige Funktion bedeutet. Mit Hilfe (3) kann man die asymptotische Lösung $M_{\lambda,\mu}$ der Gleichung:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqq t \leqq T} \{ct - F_n(t, \lambda, \mu)\} < M\right) = 1 - \varepsilon$$

angeben.
Der Fall $\lambda = \mu$ gibt eine genaue Lösung. Es gilt nämlich

$$M_{\lambda,\lambda} = \lambda \frac{cT}{n} + (1 - \lambda) M_0.$$

# VIZSGÁLATOK A VÉGES ÁBELCSOPORTOK HAJÓS-FÉLE ELMÉLETE KÖRÉBŐL

Írta: SEITZ KÁROLY

## 1. Bevezetés

Legyen $G$ véges ábelcsoport. Egy $G=K_1K_2 \dots K_n$, $(K_1, K_2, \dots, K_n \subseteq G)$ egyenletet a $G$ faktorizációjának nevezünk, ha $G$ minden eleme *egyértelműen* $g_1g_2 \dots g_n$ alakban írható $(g_j \in K_j,\ j=1, 2, \dots, n)$.

A következőkben szimplexeknek nevezünk minden olyan komplexust, amelynek elemei $e, g, g^2, \dots, g^{\gamma-1}$ $(O(g) \geqq \gamma \geqq 2)$. Ez a szimplex nyilván akkor és csak akkor csoport, ha a $g$ elem rendje $O(g)=\gamma$.

MINKOWSKI kimutatta (1), hogy ha az

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

valós együtthatójú lineáris alakok determinánsa $\pm 1$, akkor az $|y_1| \leqq 1$, $|y_2| \leqq 1, \dots, \dots, |y_n| \leqq 1$ diophantosi egyenlőtlenségrendszernek van a triviálistól különböző, azaz nem csupa zérus $x_1, x_2, \dots, x_n$ egész számokból álló megoldása. A tétel akkor is igaz, ha a fenti $\leqq$ jeleket egy kivételével a $<$ jellel helyettesítjük. Csupa $<$ jel általában nem vehető, amint azt az

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + x_2 \\ \vdots\ &\quad\ \vdots \qquad \vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1} + x_n \end{aligned} \tag{2}$$

példa mutatja.

MINKOWSKI sejtése szerint fordítva, minden más esetben a tétel csupa $<$ jellel is igaz. MINKOWSKI e sejtését csak az $n=2, 3$ esetekre igazolta. PERRON négy terjedelmes tanulmányban $n=2, 3, 4, \dots, 9$ esetére igazolta a sejtést.

MINKOWSKI sejtését minden $n$-re HAJÓS 1941-ben bizonyította be (2), felhasználva a sejtés alábbi geometriai megfogalmazását:

Az $n$-dimenziós euklideszi térben minden egyszeresen térfedő kockarács oszlopozott (azaz tartalmaz egész lapokkal illeszkedő kockapárt).

HAJÓS 1938-ban bebizonyította (3), hogy a sejtés a következő tétellel ekvivalens:

A $G$ véges ábelcsoport szimplex tényezőkre való faktorizációjában legalább az egyik tényező szükségképpen csoport.

O. H. KELLER 1930-ban kimondott sejtésében (4) azt állította, hogy egybevágó kockák egyszeresen térfedő rendszere akkor is mindig oszlopozott, ha a kockák középpontjai nem alkotnak rácsot.

KELLER sejtésének HAJÓS által megadott csoportelméleti megfogalmazása (5) a következő:

A $G$ véges ábelcsoport minden

$$G=K[a_1][a_2] \dots [a_n], \tag{3}$$

alakú faktorizációjánál, ahol $K$ a $G$ csoport egy komplexusa az

$$[a_i]=(e, a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{\alpha_i-1}), \qquad i=1,2,\ldots,n$$

szimplexek közül legalább az egyik záróeleme $a_j^{\alpha_j}$, $(1 \leqq j \leqq n)$, előállítható két $K$-beli elem hányadosaként

$$(4) \qquad a_j^{\alpha_j} = k^{-1}k', \quad (k, k' \in K).$$

A dolgozat első részében először KELLER sejtését arra a speciális esetre vonatkozóan bizonyítjuk be, amikor $K$ csoport. Ezután kimutatjuk, hogy KELLER sejtése akkor is igaz, amikor a $K$ komplexus egyértelműen előállítható $G$-beli szimplexek szorzataként.

A dolgozat második részében KELLER sejtését teljesen elemi csoportelméleti eszközök segítségével — a $G$ csoport gyűrűjének felhasználása nélkül — az $n=1,2,3,4$ esetekre bizonyítjuk be.

## 2. Keller sejtésének igazolása arra az esetre, amikor a K komplexus csoport

A *Keller*-sejtés egy fontos speciális esetére vonatkozik a következő tétel:

2.1. TÉTEL: *Ha a $G$ véges ábelcsoportnak*

$$(5) \qquad G=K[a_1][a_2]\ldots[a_n]$$

*egyértelmű faktorizációja és $K$ részcsoportja $G$-nek, akkor az* (5)*-ben szereplő szimplexek valamelyikének záróeleme előállítható két $K$-beli elem hányadosaként.*

*Bizonyítás.* Mivel (5) $G$-nek egyértelmű faktorizációja és $K$, $G$-nek részcsoportja, ezért

$$(6) \qquad G/K = [a_1K][a_2K]\ldots[a_nK],$$

ahol

$$[a_iK] = (K, a_iK, a_i^2K, \ldots, a_i^{\alpha_i-1}K), \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

a $G/K$ faktorcsoport szimplexei.

A (6) faktorizáció nyilván egyértelmű, mert ellenkező esetben egy

$$(7) \qquad gK = a_1^{x_1}K\cdot a_2^{x_2}K\ldots a_n^{x_n}K = a_1^{y_1}K\cdot a_2^{y_2}K\ldots a_n^{y_n}K$$

egyenlőséghez jutunk, ahol $g \in G$, $g \notin K$, $0 \leqq x_i$, $y_i \leqq \alpha_i - 1$, $i=1,2,\ldots,n$ és legalább egy $j$-re $x_j \neq y_j$, $(1 \leqq j \leqq n)$.

Ebből pedig

$$(8) \qquad ka_1^{x_1}a_2^{x_2}\ldots a_n^{x_n} = k'a_1^{y_1}a_2^{y_2}\ldots a_n^{y_n}, \quad (k, k' \in K)$$

következne, ellentétben az (5) faktorizáció egyértelműségével.

HAJÓS tétele szerint a (6) faktorizációban szereplő szimplexek valamelyike — mondjuk az első — csoport. Így

$$(9) \qquad a_1^{\alpha_1}K=K,$$

amiből

$$(9') \qquad a_1^{\alpha_1} = k^{-1}k', \quad (k, k' \in K)$$

következik.

## 3. Keller sejtésének igazolása arra az esetre, amikor a K komplexus egyértelműen előállítható szimplex tényezők szorzataként

A 21.1. tétel kézenfekvő általánosítása a

3.1. TÉTEL: *Ha a G véges ábelcsoportnak*

(10) $$G=K[a_1][a_2]\dots[a_n]$$

*egy egyértelmű faktorizációja, és*

(11) $$K=[b_1][b_2]\dots[b_m]$$

*egyértelmű faktorizációja K-nak, akkor a* (10) *felbontásban szereplő* $[a_i]$ *szimplexek egyikének záróeleme előállítható két K-beli elem hányadosaként.*

*Bizonyítás.* A (10) és (11) egyértelmű faktorizációk miatt

(12) $$G=[b_1][b_2]\dots[b_m]\cdot[a_1][a_2]\dots[a_n]$$

egyértelmű szimplex-faktorizációja $G$-nek. Így HAJÓS tétele szerint a (12)-ben szereplő szimplex faktorok közül legalább az egyik csoport.

Ha valamelyik $[a_i]$ alakú szimplex csoport, akkor a bizonyítandó állítás igaz.

Ha az $[a_i]$ szimplexek egyike sem csoport, akkor szükségképpen a $K$ felbontásában szereplő szimplexek valamelyike — mondjuk — $[b_1]$ csoport. Ebben az esetben a 2.1. tétel szerint a $[b_2], [b_3], \dots [b_m], [a_1], [a_2], \dots [a_n]$ szimplexek valamelyikének záróeleme előállítható két $\{b_1\}$-beli elem hányadosaként. Ha ez egy $[a_i]$ szimplexre igaz, akkor a bizonyítást befejeztük. Ha csak a $[b_2], \dots, [b_m]$ szimplexek valamelyikének — mondjuk $[b_2]$-nek — a záróeleme állítható elő két $\{b_1\}$-beli elem hányadosaként, akkor

(13) $$\{b_1\}\{b_2\} = \{b_1\}+b_2\{b_1\}+b_2^2\{b_1\}+\dots+b_2^{\beta_1-1}\{b_1\} = \{b_1\}[b_2].$$

Jelen esetben tehát, a

(14) $$G=\{b_1\}\{b_2\}\cdot[b_3]\dots[b_m]\cdot[a_1][a_2]\dots[a_n]$$

előállítás első két szimplex-tényezőjének szorzata csoport.

A 2.1. tétel szerint a (14)-ben szereplő $[b_3], [b_4], \dots [b_m], [a_1], [a_2], \dots [a_n]$ szimplexek valamelyikének záróeleme előállítható két $\{b_1\}\cdot\{b_2\}$-beli elem hányadosaként. Ha ez egy $[a_i]$ szimplexre igaz, akkor a bizonyítást befejeztük.

Ha csak a $[b_3], [b_4], \dots [b_m]$ szimplexek valamelyikének — mondjuk $[b_3]$-nak — záróeleme állítható elő két $\{b_1\}\cdot\{b_2\}$-beli elem hányadosaként, akkor

(15) $$\{b_1\}\{b_2\}\{b_3\} = \{b_1\}\{b_2\}+b_3\{b_1\}\{b_2\}+\dots+b_3^{\beta_3-1}\{b_1\}\{b_2\} = \{b_1\}\{b_2\}[b_3].$$

Így tehát a

(16) $$G=\{b_1\}\{b_2\}\{b_3\}[b_4][b_5]\dots[b_m]\cdot[a_1]\cdot[a_2]\dots[a_n]$$

előállítás első három szimplex-tényezőjének szorzata csoport.

A 2.1. tétel alkalmazásával vagy valamelyik $[a_i]$ alakú szimplex záróelemét állítjuk elő két $\{b_1\}\cdot\{b_2\}\cdot\{b_3\}$-beli elem hányadosaként, vagy a $[b_k]$, $k\geqq 4$ faktorok közül valamelyikre — mondjuk $[b_4]$-re —

$$\{b_1\}\{b_2\}\{b_3\}[b_4]=\{b_1\}\{b_2\}\{b_3\}\{b_4\}. \tag{17}$$

Eljárásunkat folytatva legfeljebb $m$ lépés után arra jutunk, hogy az $[a_i]$ alakú szimplexek valamelyikének záróeleme előállítható két $K$-beli elem hányadosaként.

## 4. Keller sejtésének bizonyítása az $n = 1, 2, 3, 4$ esetre

A következőkben KELLER sejtését az $n=1, 2, 3, 4$ esetre — a $G$ csoport gyűrűjének felhasználása nélkül — bizonyítjuk be.

4.1. TÉTEL: *Keller sejtése $n=1$ esetén igaz.*

*Bizonyítás.* Jelenesetben (3)

$$G=K[a_1] \tag{18}$$

alakú.

Így a

$$ka_1^{\alpha_1} = k'a_1^{x_1}, \quad (0 \leqq x_1 \leqq \alpha_1-1,\ k, k'\in K) \tag{18'}$$

előállításnál $x_1=0$, mert ellenkező esetben a

$$ka_1^{\alpha_1-x_1} = k' \tag{19}$$

egyenlőséghez jutnánk, ami ellentmond a sejtésben foglalt ama feltevésnek, hogy $G$ minden eleme egyértelműen előállítható $K$, $[a_1]$, ..., $[a_n]$ elemeinek szorzataként.

Ezután bebizonyítjuk a következő tételt:

4.2. TÉTEL: *Keller sejtése $n=2$ esetén igaz.*

*Bizonyítás.* Esetünkben (3)

$$G=K[a_1][a_2] \tag{20}$$

alakú.

Tekintsük most a

$$ka_1^{\alpha_1} = k'a_1^{x_1}a_2^{x_2}, \quad (0 \leqq x_1 \leqq \alpha_1-1, \quad 0 \leqq x_2 \leqq \alpha_2-1, \quad k, k'\in k) \tag{21}$$

előállítást, amelynél $x_1$ szükségképpen zérus, mert ellenkező esetben a

$$ka_{a_1}^{\alpha_1-x_1} = k'a_2^{x_2} \tag{22}$$

egyenlőséghez jutnánk, ami ellentmondásra vezet.

Így

$$ka_1^{\alpha_1} = k'a_2^{x_2}. \tag{23}$$

Ha $x_2=0$, akkor $a_1^{\alpha_1}$ valóban előállítható két $K$-beli elem hányadosaként.

Ha $x_2>0$, akkor (23)-ból

$$ka_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2-x_2} = k'a_2^{\alpha_2} = k^*a_1^{y_1}a_2^{y_2}, \quad (0 \leqq y_1 \leqq \alpha_1-1, \quad 0 \leqq y_2 \leqq \alpha_2-1, \quad k^*\in K) \tag{24}$$

adódik.

Itt $y_1=0$, mert ellenkező esetben (24) szerint a

(25) $$ka_1^{\alpha_1-y_1}a_2^{\alpha_2-x_2}=k^*a_2^{y_2}$$

ellentmondáshoz vezető egyenlőséghez jutnánk.
Ha $y_2\neq0$, akkor (24) miatt

(26) $$k'a_2^{\alpha_2-y_2}=k^*,$$

ami ismét ellentmondáshoz vezet.
Így tehát $y_2=0$ és

(27) $$a_2^{\alpha_2}=k'^{-1}k^*.$$

4.3. TÉTEL: *Keller sejtése $n=3$ esetén igaz.*

*Bizonyítás.* Ebben az esetben (3)

(28) $$G=K[a_1][a_2][a_3]$$

alakú.
Tekintsük tetszőleges $k\in K$ mellett a

(29) $$ka_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2-1}=k'a_2^{x_2}a_3^{x_3},\quad (0\leqq x_2\leqq\alpha_2-1,\quad 0\leqq x_3\leqq\alpha_3-1),$$

(30) $$ka_1^{\alpha_1-1}a_2^{\alpha_2}=k''a_1^{y_1}a_3^{y_3},\quad (0\leqq y_1\leqq\alpha_1-1,\quad 0\leqq y_3\leqq\alpha_3-1)$$

előállításokat, ahol $k', k''\in K$.
Így (29) és (30) szerint

(31) $$ka_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}=k'a_2^{x_2+1}a_3^{x_3}=k''a_1^{y_1+1}a_3^{y_3}.$$

Itt az egyértelmű előállítás miatt az $x_2+1=\alpha_2$, $y_1+1=\alpha_1$ egyenlőségek közül legalább az egyik teljesül.
Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_2+1=\alpha_2$. Így (31) miatt

(32) $$ka_1^{\alpha_1}=k'a_3^{x_3}$$

Ha $x_3=0$, akkor

(33) $$a_1^{\alpha_1}=k'k^{-1}.$$

Ha $x_3>0$, akkor (32) mindkét oldalát $a_3^{\alpha_3-x_3}$-mal megszorozva

(34) $$ka_1^{\alpha_1}a_3^{\alpha_3-x_3}=k'a_3^{\alpha_3}=\bar{k}a_2^{z_2},$$

adódik, ahol $0\leqq z_2\leqq\alpha_2-1$, $\bar{k}\in K$.
Ha $z_2=0$, akkor (34)-ből

(35) $$a_3^{\alpha_3}=k'^{-1}\bar{k}$$

következik.
Ha $z_2>0$, akkor (34) figyelembevételével

(36) $$ka_1^{\alpha_1}a_3^{\alpha_3-x_3}a_2^{\alpha_2-z_2}=k'a_3^{\alpha_3}a_2^{\alpha_2-z_2}=\bar{k}a_2^{\alpha_2}\bar{k}',$$

adódik, ahol $\bar{k} \in K$; vagyis

(37) $$a_2^{\alpha_2} = \bar{k}^{-1}\bar{k}'.$$

4.4. TÉTEL: *Keller sejtése $n=4$ esetén igaz.*

*Bizonyítás.* Jelen esetben (3)

(38) $$G = K[a_1][a_2][a_3][a_4$$

alakú.

Tekintsük tetszőleges $k \in K$ mellett a

(39) $$ka_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2-1} = k'a_2^{x_2}a_3^{x_3}a_4^{x_4}, \quad (0 \leqq x_j \leqq \alpha_j - 1, \qquad j = 2, 3, 4),$$

(40) $$ka_1^{\alpha_1-1}a_2^{\alpha_2} = k''a_1^{y_1}a_3^{y_3}a_4^{y_4}, \quad (0 \leqq y_j \leqq \alpha_j - 1, \qquad j = 1, 3, 4),$$

alakú előállításokat, ahol $k', k'' \in K$.

Így (39) és (40) miatt

(41) $$ka_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2} = k'a_2^{x_2+1}a_3^{x_3}a_4^{x_4} = k''a_1^{y_1+1}a_3^{y_3}a_4^{y_4}.$$

Itt az egyértelmű előállítás miatt az $x_2+1 = \alpha_2$, $y_1+1 = \alpha_1$ egyenlőségek közül legalább az egyik teljesül.

Így (41) szerint okvetlenül fennáll a

(42) $$ka_1^{\alpha_1} = k'a_3^{x_3}a_4^{x_4},$$

(43) $$ka_2^{\alpha_2} = k''a_3^{y_3}a_4^{y_4}$$

egyenlőségek valamelyike.

Ha a (39), (40) relációkat az $(a_1, a_2)$ elempárokon kívül az $(a_1, a_3)$, $(a_1, a_4)$, $(a_2, a_3)$, $(a_2, a_4)$, $(a_3, a_4)$ elempárokra is felírjuk, akkor — a (42), (43) egyenlőségeket ismét felírva — a

| | | | |
|---|---|---|---|
| (42) | $ka_1^{\alpha_1} = k'a_3^{x_3}a_4^{x_4}$ | (43) | $ka_2^{\alpha_2} = k''a_3^{y_3}a_4^{y_4}$ |
| (44) | $ka_1^{\alpha_1} = k_1'a_2^{u_2}a_4^{u_4}$ | (45) | $ka_3^{\alpha_3} = k_1''a_2^{v_2}a_4^{v_4}$ |
| (46) | $ka_1^{\alpha_1} = k_2'a_2^{z_2}a_3^{z_3}$ | (47) | $ka_4^{\alpha_4} = k_2''a_2^{w_2}a_3^{w_3}$ |
| (48) | $ka_2^{\alpha_2} = k_3'a_1^{p_1}a_4^{p_4}$ | (49) | $ka_3^{\alpha_3} = k_3''a_1^{q_1}a_4^{q_4}$ |
| (50) | $ka_2^{\alpha_2} = k_4'a_1^{r_1}a_3^{r_3}$ | (51) | $ka_4^{\alpha_4} = k_4''a_1^{s_1}a_3^{s_3}$ |
| (52) | $ka_3^{\alpha_3} = k_5'a_1^{t_1}a_2^{t_2}$ | (53) | $ka_4^{\alpha_4} = k_5''a_1^{l_1}a_2^{l_2}$ |

egyenlőségekhez jutunk, ahol $k_j', k_j'' \in K$, $(j=1, 2, 3, 4)$ és az $a_j$, $(j=1, 2, 3, 4)$ elemek kitevői a $0, 1, 2, \dots \alpha_j - 1$ számok közül kerülnek ki.

A fenti konstrukcióból azonnal következik, hogy az egy sorban levő (42)—(53) egyenlőségek közül legalább az egyik teljesül.

Ha a szóban forgó egyenlőségek közül három olyan áll fenn, amelyek bal oldala megegyezik, például (42,) (44), (46), akkor az egyértelmű előállítás miatt

(54) $$a_1^{\alpha_1} = k^{-1}\bar{k},$$

ahol $$\bar{k} = k' = k_1' = k_2'.$$

Mivel a (42)—(53) egyenlőségek közül legalább hat teljesül, ezért van közöttük legalább két olyan, amelyeknek bal oldalai megegyeznek.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy egy ilyen közös bal oldallal rendelkező egyenlőségpár éppen a (42), (44) egyenlőségekből áll.

Így az egyértelmű előállítás felhasználásával (42) és (44)-ből

$$ka_1^{\alpha_1} = k'a_4^{x_4} \tag{55}$$

következik.

Ha (55)-ben $x_4=0$, akkor

$$a_1^{\alpha_1} = k^{-1}k'. \tag{56}$$

Ha $x_4>0$, akkor (55)-ből

$$ka_1^{\alpha_1}a_4^{\alpha_4-x_4} = k'a_4^{\alpha_4} = \bar{k}_1a_2^{h_2}a_3^{h_3} \tag{57}$$

adódik, ahol $(0 \leqq h_2 \leqq \alpha_2-1,\ 0 \leqq h_3 \leqq \alpha_3-1,\ \bar{k}_1 \in K)$.

Ha $h_2>0$, akkor (57)-ből a

$$ka_1^{\alpha_1}a_4^{\alpha_4-x_4}a_2^{\alpha_2-h_2} = k'a_4^{\alpha_4}a_2^{\alpha_2-h_2} = \bar{k}_1a_2^{\alpha_2}a_3^{h_3} = \bar{k}_2a_3^{i_3} \tag{58}$$

egyenlőséghez jutunk, ahol $0 \leqq i_3 \leqq \alpha_3-1$, $\bar{k}_2 \in K$.

Ha $h_3=i_3$, akkor (58) miatt

$$a_2^{\alpha_2} = \bar{k}_1^{-1}\bar{k}_2. \tag{59}$$

Ha $h_3<i_3$, akkor (58)-ból

$$ka_1^{\alpha_1}a_4^{\alpha_4-x_4}a_2^{\alpha_2-h_2}a_3^{\alpha_3-i_3} = k'a_4^{\alpha_4}a_2^{\alpha_2-h_2}a_3^{\alpha_3-i_3} = \bar{k}_1a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3-i_3+h_3} = \bar{k}_2a_3^{\alpha_3} = k_3; \tag{60}$$

vagyis

$$a_3^{\alpha_3} = \bar{k}_2^{-1}\bar{k}_3, \quad (\bar{k}_3 \in K), \tag{61}$$

következik.

Ha $h_3>i_3$, akkor (58) szerint

$$ka_1^{\alpha_1}a_4^{\alpha_4-x_4}a_2^{\alpha_2-h_2}a_3^{\alpha_3-h_3} = k'a_4^{\alpha_4}a_2^{\alpha_2-h_2}a_3^{\alpha_3-h_3} = \bar{k}_1a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3} = \bar{k}_2a_3^{\alpha_3-h_3+i_3}. \tag{62}$$

Tekintsük most a

$$\bar{k}_1a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3} = (\bar{k}_1a_3^{\alpha_3}a_2^{\alpha_2-1})a_2 = \bar{k}_1'a_2^{x+1}a_1^{y}a_4^{z} \tag{63}$$

előállítást, ahol $0 \leqq x \leqq \alpha_2-1$, $0 \leqq y \leqq \alpha_1-1$, $0 \leqq z \leqq \alpha_4-1$.

Ha $x_1+1<\alpha_2$, akkor (62) és (63) felhasználásával az egyértelmű előállításnak ellentmondó

$$k_1'a_2^{x+1}a_1^{y}a_4^{z} = \bar{k}a_3^{\alpha_3-h_3+i_3} \tag{64}$$

egyenlőséghez jutunk.

Ha $x_1+1=\alpha_2$, akkor az egyértelmű előállítás, továbbá (62) és (63) miatt az $y=0$, $z=0$ egyenlőségekhez jutunk.

Ekkor viszont (63)-ból

(65) $$a_3^{\alpha_3}=\bar{k}_1^{-1}\bar{k}_1',$$

adódik.

Ha $h_2=0$ és $h_3>0$, akkor lényegében a fenti eljárás szó szerinti megismétlésével jutunk célhoz.

Ha $h_2=0$ és $h_3=0$, akkor (57)-ből

(66) $$a_4^{\alpha_4}=k'^{-1}\bar{k}_1$$

következik.

## 5. Zárómegjegyzések

A véges ábelcsoportok modern elméletének RÉDEI LÁSZLÓ által kitűzött alapfeladata a (3) alakú faktorizációk közvetlen általánosításaként adódó

(67) $$G=K_1\cdot K_2\ldots K_n,\ (K_1, K_2, \ldots, K_n \text{ komplexusok})$$

felbontások vizsgálata.

RÉDEI a (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12) cikksorozatban gyűrű- és testelméleti eszközök felhasználásával vizsgálta a (67) alakú faktorizációk szerkezetét.

Vizsgálatai során kimutatta, hogy a $p^2$ rendű nemciklikus ábelcsoportnak csak olyan kéttényezős normált faktorizációja van, amelyben az egyik tényező csoport. E tétel bizonyítása rendkívül nehéz és a $p\neq 2$ karakterisztikájú prímtestek elméletében több fontos megállapítást tartalmaz.

Ezek egyike az, hogy a szóban forgó prímtest fölött az

(68) $$f_1(x)=x^{p-1}+\alpha x^{\frac{p-1}{2}}+\cdots$$

alakú hézagos polinomok közül csak az

(69) $$f_1(x)=x^{\frac{p-1}{2}j}(x^{\frac{p-1}{2}}-1)^k(x^{\frac{p-1}{2}}+1)^l,\quad (j+k+l=2),$$

és

(70) $$f_2(x)=\frac{x+\lambda}{x}\left[(x+\lambda)^{\frac{p-1}{2}}-\lambda^{\frac{p-1}{2}}\right],\left[(x+\lambda)^{\frac{p-1}{2}}-\sigma\lambda^{\frac{p-1}{2}}\right],$$
$$(\sigma=0, 1;\ 0\neq\lambda\in K_p)$$

szerkezetűek bonthatók fel elsőfokú tényezők szorzatára.

A fentiek alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy a *Keller*-sejtés végleges kivizsgálása csak a jelenleg ismert csoport, csoportgyűrű és testelméleti apparátus radikális továbbfejlesztése útján lehetséges.

Befejezésül köszönetet mondok RÉDEI LÁSZLÓ akadémikusnak és SZÉP JENŐ professzornak a tanulmány anyagához kapcsolódó megjegyzéseikért.

## IRODALOM

[1] MINKOWSKI, H.: *Geometrie der Zahlen*, Leipzig (1896—1910), 104—105.
[2] HAJÓS, G.: Über Einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter. *Math. Zeitschr.*, **47** (1941) 427—467
[3] HAJÓS, G.: Többméretű terek befedése kockaráccsal, *Mat. Fiz. Lapok*, 45 (1938) 171—190
[4] KELLER, H.: Über lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln. *Journal für r. u. a. Mathematik*, **163** (1930) 231—248
[5] HAJÓS, G.: Sur la factorisation des groupes abéliens, *Casopis*, **74** (1950) 157—162
[6] RÉDEI, L.: Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski—Hajós, *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1949) 21—35.
[7] RÉDEI, L.; Die Reduktion des gruppentheoretische Satzes von Hajós auf Fall von $p$-Gruppen, *Monatshefte Math.*, **53** (1949) 221—226
[8] RÉDEI, L.: Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, *Comm. Math. Helv.*, **23** (1949) 272—282
[9] RÉDEI, L.: Ein Betrag zum Problem der Faktorisation von endlichen abelschen Gruppen, *Acta. Mat. Acad. Sci. Hung.* **1** (1950) 197—207)
[10] RÉDEI, L.: Neuer Beweis des Hajósschen Satzes über die endlichen abelschen Gruppen, *Acta Math. Acad. Sci Hung* **6** (1955) 27—40.
[11] RÉDEI, L.: Die gruppentheoretischen Zetafunktionen und der Satz von Hajós, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955) 271—279
[12] RÉDEI, L.: Zwei Lückensätze über Polynome in endlichen Primkörpern mit Anwendung auf die endlichen Abelschen Gruppen und die Gaussischen Sammen, *Acta Math.* **79** (1947) 273—290.

(Beérkezett: 1970. XI. 9.)

# UNTERSUCHUNGEN IN KREISE DER HAJÓS-SCHEN THEORIE ENDLICHER ABEL-SCHEN GRUPPEN

von

K. SEITZ

Zusammenfassung

O. H. KELLER behauptete in seiner in 1930 ausgesprochenen Vermutung (4) dass ein den Raum einfach bedeckendes Systhem kongruenter Würfel immer zwei Würfel mit gemeinsamer Grezfläche enthalten muss.

Hajós's gruppentheoretische Fassung der Kellerschen Vermutung ist die folgende. Bei der Faktorisation einer G Abelschen Gruppe in der Form [5]

$$G = K[a_1],\ [a_2]\dots[a_n],$$

wobei $K$ ein Komplex von der Gruppe $G$ darstellt, kann unter den Simplexen $[a_i]$ $[i = 1, 2, \dots n]$ zumindest ein Sperrelement als Quotient zweier in $K$ enthaltenen Elementen dargestellt werden.

Im ersten Teil der Arbeit wird die Kellersche Vermutung in jenem Spezialfall bewiesen, in welchem $K$ eine Gruppe ist. Folglich beweisen wir, dass die Vermutung auch im'Fall war ist, wenn dass Komplex $K$ eindeutig als Produkt der in $G$ enthaltenen Simplexe hergestellt werden kann.

Im zweiten Teil der Arbeit beweisen wir die Gültigkeit der Kellerschen Vermutung — undzwar durch elementaren gruppentheoretischen Hilfsmittel, ohne der Anwendung des Ringes der $G$ Gruppe — auf die Fälle $n = 1, 2, 3,$ und 4.

# SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYEK ÉS DISZKRÉT ELOSZLÁSOK SZUPERPOZÍCIÓINAK FELBONTÁSA

Írta: MEDGYESSY PÁL

## ELŐSZÓ

1922-ben NIKHILRANJAN SEN fizikus egy rövid közleményt publikált a *Physikalische Zeitschrift*ben. A közleményben arról volt szó, hogy a hidrogénspektrum $H_\alpha$ jelzésű vonala intenzitásváltozása görbéjének birtokában, mely két *Gauss*-függvény — két *komponens* — szuperpozíciója képének volt tekinthető, a vonal finomabb szerkezetére vonatkozó adatok az addiginál sokkal pontosabban megkaphatók, ha — *kizárólag* az intenzitásváltozás-görbe ordinátaértékei segítségével — előállítható az ezt a görbét létrehozó két komponens csúcshelyeivel azonos csúcshelyű, de azoknál *keskenyebb* két Gauss-görbe szuperpozíciója; ugyanis ennek immár különváltan megmutatkozó komponensei csúcshelyét stb. kimérve, a kívánt adatokra jutunk.

N. SEN — A. SOMMERFELDnek, a híres fizikusnak egy észrevételéből kiindulva — elő is állította a keresett szuperpozíciót, ezzel legelőször hajtva végre két sűrűségfüggvény — két normális sűrűségfüggvény — szuperpozíciójának *felbontását*. Nem vette azonban észre azt a rendkívül fontos tényt, hogy eljárása a komponensek számától *független*. Erre csak G. DOETSCH mutatott rá 1928-ban, N. SEN eljárása egzakttá tétele során. Így született meg — immár 50 éve — a sűrűségfüggvény- (és később: a diszkrét eloszlás-) *szuperpozíciók felbontásának* problémaköre, melyben a fő feladat: egy *ismeretlen* komponens-számú szuperpozíció görbéjéből a komponens-szám, és esetleg a komponensek egyes paraméterei közelítő értékének meghatározása.

*Munkánk a szuperpozíciók felbontása kérdéskörének jelen állását kívánja bemutatni.* A szuperpozíció-felbontás gyakorlati fontossága az előzők után sejthető; találkozunk vele például a legkülönbözőbb eredetű spektrumok feldolgozásakor, vagyis a spektroszkópia különböző ágaiban, a magfizikában, és í. t. — de segítségül vehető egyes biológiai vizsgálatokban és még sok más tudományterületen is.

Korábbi hasonló munkának kettő tekinthető: 1. a szerző 1954-ben írt kandidátusi disszertációjának a felbontás kérdéskörét felvázoló része; ez azonban csak néhány speciális esetet taglalt; 2. a szerző 1961-ben megjelent kis monográfiája („*Decomposition of superpositions of distribution functions*", Akadémiai Kiadó, Budapest) ezen kérdéskör első rendszeres összefoglalása volt ugyan, de akkor még nem voltak kellően kidolgozva a felhasználható segédeszközök, — különösen áll ez azokra a numerikus eszközökre, melyek a fellépő ún. inkorrekt problémák tárgyalásához szükségesek.

Munkánk ilyenformán *nem* e korábbiak kibővítése. Benne és az előbb említettekben természetesen ugyanaz az alapprobléma és bizonyos módszerek. Tárgyalásmódja korántsem annyira általános, mint a korábbiaké; eszközei és eredményei azonban *túlnyomórészt újak.* — Itt jegyezzük meg, hogy tartalma lényegében ugyanaz, mint a szerző 1971-ben elkészült, a *Hivatkozások*ban megemlített disszertációjának, illetve könyvkéziratának.

Munkánk öt fejezetre és utószóra oszlik; a fejezetek paragrafusokra; további alosztások is bőven szerepelnek. Minden paragrafus egy *főrészből* és egy *„Kiegészítések és problémák”* című részből áll. *Az utóbbiak első olvasáskor ki is hagyhatók:* megjegyezzük azonban, hogy a jövő kutatási feladatai bennük vannak lefektetve.

Már a legelején mondottak is érthetővé teszik, hogy egész munkánkban alapvető fontosságú fogalmak sűrűségfüggvények, ill. diszkrét eloszlások görbéinek egycsúcsúsága és „keskenysége”. Épp ezért a bevezető I. fejezet után ezekkel foglalkozik a segédeszközökről szóló II. fejezet 1., 2., 4. és 5. §-a, melyek egyszersmind témáik *rendszeres — bár bizonyára nem végleges — összefoglalásai* is. A bennük közöltek jórészt a *szerző* eredményei. E paragrafusok a *valószínűségelmélet* szempontjából is bizonyára érdekesek.

A felbontási módszerek — melyek jórészt a *szerző* egyetlen, de nagy hatóerejű ötletén: a már a II. fejezetben értelmezett egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltak alkalmazásán alapulnak —, sűrűségfüggvény-szuperpozíciók esetében a III., diszkrét eloszlás-szuperpozíciók esetében pedig — bár itt nem annyira hatásosak, a diagramok diszkrét volta folytán — a IV. fejezetben kerülnek rendszeres tárgyalásra. Az előbbiben kerül tárgyalásra — már csak kis alpontként — *normális sűrűségfüggvények szuperpozíciója felbontásának* — mondhatni, ma már klasszikus (50 évvel ezelőtt vizsgált) — problémája, valamint egy ennél sokkal nehezebben kezelhető, de napjaink kísérleti tudományaiban egyre fontosabbá váló kérdés: *exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása* — melyre kielégítő válasz jelenleg nincs, bár a *szerző* is kidolgozott idevágó módszereket.

Az V. fejezetben a felbontások gyakorlati végrehajtásához leghasznosabbnak mutatkozó numerikus módszereket soroljuk fel, melyek a módszerek elméleti megalapozásához adtak szempontokat. Mivel sokszor szerepel *I. fajú integrálegyenletek megoldása*, érdemesnek tartottuk összefoglalni e kérdéskör jelen állását, különös tekintettel az ezek által képviselt ún. *inkorrekt* problémák kezelésére — és így az A. N. TIHONOV-féle *regularizációs módszerre.* Ez az *összefoglalás* bizonyára magában is érdekes. — Bár numerikus módszerek kidolgozása nem tartozott a munka célkitűzései közé, e fejezetben is van néhány saját eredménye a *szerzőnek.*

Általában olyan módszereket igyekeztünk tárgyalni a III. és IV. fejezetekben, melyek *numerikusan is megvalósíthatók:* legideálisabbnak tartjuk természetesen az ún. *korrekt* problémát képviselő módszereket. Sajnos, az utóbbiakból még nem sok van; a jövő kutatásainak — véleményünk szerint — ilyen módszerek megkeresését kell kitűzniük célként maguk elé. A korrekt problémákat illetőleg még a legjobb a helyzet diszkrét eloszlás-szuperpozíciók felbontása esetében, ezt azonban elrontja az, hogy az alkalmazott módszerek eleve nem lehetnek olyan jók, mint sűrűségfüggvény-szuperpozíciók esetében és az e nehézségből kivezető út megtalálása egyelőre a jövő feladata. — A minderre történő utalások összefoglalása lényegében véve az *Utószó.*

A ma már inkább csak történeti érdekességű „ad hoc” módszereket külön paragrafusokban soroljuk fel.

Fontosabb fogalmakat, érdekesebb példákat ábrákkal kísérünk. Jórészük a gyakorlatban felmerült felbontási probléma megoldását mutatja be.

A tárgyalásmódot igyekeztünk minél egyszerűbbé tenni. Különösebb előismereteket nem tételeztünk fel. A nehézségekre, egyes megoldások nem kielégítő voltára mindenütt kendőzés nélkül rámutattunk.

A tételek, stb. számozása paragrafusonként, szakaszonként újra kezdődik. Egyazon paragrafus, szakasz stb.-n belül a hivatkozások a paragrafus stb. feltüntetése nékül történnek.

A munkánkban megemlített művek a „*Hivatkozások*" cím alatt vannak felsorolva, *szerző* szerint, egyazon szerző(k) különböző munkáit megjelenésük évszámával különböztetve meg; ha egyazon évben több is megjelent, az évszámhoz *a*, *b*, *c*, ... betűt csatolva soroljuk fel őket. E *Hivatkozások* egyes tételeire vezetéknévvel (nevekkel), évszámmal — és az esetleg emellett álló betűvel — utalunk; például: MEDGYESSY *(1967b)*.

Dolgozatunk végén „*A szuperpozíciók felbontásával foglalkozó fontosabb munkák kronologikus bibliográfiája*" cím alatt a *főtéma* szempontjából érdekesnek minősülő munkákat közöljük, teljesség igénye nélkül, *megjelenési évek* szerinti csoportosításban, egyébként a „*Hivatkozások*"-ból véve ki a tételeket. Ezzel egyfajta *történeti áttekintést* kívántunk csupán adni; reá nem hivatkozunk sehol sem.

Az orosz neveket és szavakat technikai okokból latin betűvel írtuk, de a könyvtári átírási szabályok szerint; ekkor ugyanis az eredeti egyértelműen rekonstruálható. Folyóiratcímeket a *Mathematical Reviews*-ben szokásos módon rövidítettünk.

*Köszönetnyilvánítások.* A szerző hálával emlékezik meg elsősorban RÉNYI ALFRÉD (1921—1970), SZELE TIBOR (1918—1955) és SZENTMÁRTONY TIBOR (1895—1965) érdeklődéséről, bátorító szavairól, tanácsairól; továbbá BÁRTFAI PÁL, BERENCZ FERENC, BÉKÉSI GÁBOR, E. BREITENBERGER (Athens, Ohio), DOBOZY OTTÓ, GACSÁLYI SÁNDOR, KOSIK PÁL, KÖRMENDI ISTVÁN, MAKAI ENDRE, ifj. MAKAI ENDRE, — unokaöccse: MEDGYESSY GYÖRGY (1923—1969), — MERZA JÓZSEF, J. MYHILL (Canberra), ROCHLITZ SZILVESZTER, SARKADI KÁROLY, VEKERDI LÁSZLÓ és VOLLY TAMÁS érdeklődéséről, értékes megjegyzéseiről, segítőkészségéről.

A szerző köszönetét fejezi ki a numerikus példák elkészítésében tanúsított felbecsülhetetlen segítségéért VARGA LÁSZLÓnak, rajzolói, illetve gépírói munkájáért pedig KOSIK PÁLNÉnak, PALOTAI ANDORNÉnak, UJHELYI ADORJÁNNÉnak és VÁRNAI PÉTERNÉnek.

## NÉHÁNY, A KÖVETKEZŐKBEN GYAKRAN HASZNÁLT JELÖLÉS ÉRTELMEZÉSE

| | |
|---|---|
| $\mathscr{G} f(x)$ | az $f(x)$ függvény — speciálisan: sűrűségfüggvény — görbéje. |
| $\mathscr{G} \{f_n\}$ | az $\{f_n\}$ számhalmaz — speciálisan: diszkrét eloszlás — diagramja. |
| $*$ | a konvolúció jele. |
| $*n$ | kitevőben: az önmagával való $n$-szeres konvolúció jele. |
| $\mathrm{F}[k(x); t]$ | A $k(x)$ függvény *Fourier*-transzformáltja, |

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{itx}\, dx.$$

$\mathbf{F}^{-1}[\varphi(t);\, x]$ A $\varphi(t)$ függvény inverz *Fourier*-transzformáltja — speciálisan:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-ixt}\,dt.$$

$\mathbf{G}[\{f_n\};\, z]$ Az $\{f_n\}$ $(n=0,1,\ldots)$ eloszlás generátorfüggvénye,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \quad (|z| \leqq 1).$$

# I. BEVEZETÉS

## 1. §. Sűrűségfüggvények, illetve diszkrét eloszlások szuperpozíciói. Szuperpozíciók felbontása.

Kísérleti tudományokban egy kísérlet vagy megfigyelés eredményét gyakran egy folytonos függvénygörbe, vagy egy diszkrét pontokból álló diagram szolgáltatja.

Sokszor tudjuk — vagy feltehetjük —, hogy ez a folytonos függvénygörbe a

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x, \alpha_k, \beta_k)$$

függvényt ábrázolja, ahol $f(x, \alpha, \beta)$ adott analitikus alakú, kétparaméteres sűrűségfüggvény, $\alpha_k$, $\beta_k$ $\alpha$, illetve $\beta$ valamilyen megengedett értéke, azonos $(\alpha_k, \beta_k)$ párok nincsenek, továbbá $p_k>0$. Mivel a vizsgálódás általánosságát nem befolyásolja, *a továbbiakban feltesszük, hogy* $\beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \cdots \leqq \beta_N$. — Ekkor azt mondjuk, hogy $k(x)$ az $f(x, \alpha_k, \beta_k)$ sűrűségfüggvények — a komponensek — $p_k$ súlyokkal képezett szuperpozíciója, másképp: $k(x)$ egy sűrűségfüggvény-szuperpozíció.

Másszor tudjuk — vagy feltehetjük —, hogy az említett diagram a

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_n(\gamma_k, \delta_k)\right\} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

számhalmazt ábrázolja, ahol $\{f_n(\gamma, \delta)\}$ adott analitikus alakú, kétparaméteres diszkrét eloszlás és $\gamma, \delta, \gamma_k, \delta_k, p_k$ értelmezése ugyanaz, mint előbb $\alpha, \beta, \alpha_k, \beta_k, p_k$ értelmezése.

Ekkor azt mondjuk, hogy $\{k_n\}$ az $\{f_n(\gamma_k, \delta_k)\}$ diszkrét eloszlások — a komponensek — $p_k$ súlyokkal képezett szuperpozíciója, másképp: $\{k_n\}$ egy diszkrét eloszlás-szuperpozíció.

A gyakorlatban sokszor találkozunk a következő problémákkal.

1. PROBLÉMA. Adva vannak $k(x)$ görbéje egyes pontjai ordinátáinak *mért* értékei. Az $N, \alpha_k, \beta_k, p_k$ paraméterek *ismeretlenek*. — Meghatározandó a *mért* értékek alapján $N$ és — esetleg — egyes $p_k, \alpha_k, \beta_k$ paraméterek *közelítő értéke*.

A megoldást szolgáltató *numerikus* eljárást a $k(x)$ szuperpozíció (numerikus) felbontásának nevezzük.

Az egyöntetűség kedvéért a következőkben $\{k_n\}$ diagramjának nevezzük az $(n, k_n)$ pontok halmazát.

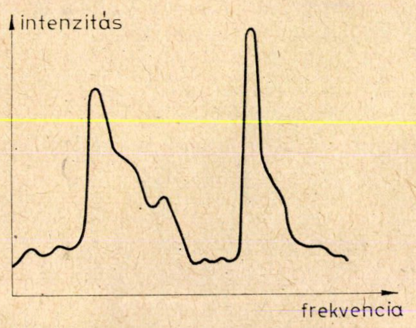
2. PROBLÉMA. Adva vannak $\{k_n\}$ diagramja egyes pontjai ordinátáinak *mért* értékei. Az $N, \gamma_k, \delta_k, p_k$ paraméterek *ismeretlenek*. — Meghatározandó a *mért* értékek alapján $N$ és — esetleg — egyes $p_k, \gamma_k, \delta_k$ paraméterek *közelítő* értéke.

A megoldást szolgáltató *numerikus* eljárást a $\{k_n\}$ szuperpozíció (numerikus) felbontásának nevezzük.

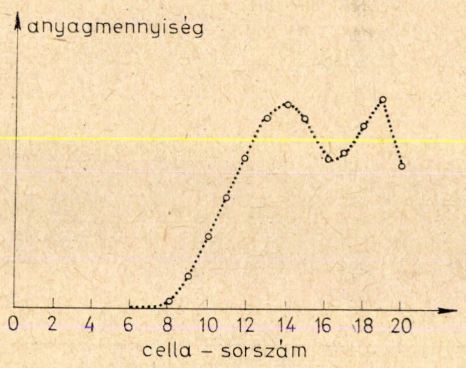
Munkánk célja: e két probléma rendszeres vizsgálata.

Problémáink lényegileg a *numerikus analízisbe* tartoznak. — Természetesen statisztikai mintából megszerkesztett hisztogram, vagy relatív gyakoriság-diagram is tekinthető valamilyen $k(x)$, ill. $\{k_n\}$ szuperpozíció görbéje, ill. diagramjának, vizsgálatukat azonban *nem a mintára alapozzuk*. — Mindazonáltal számos segédeszközt a *valószínűségelméletből* veszünk.

PÉLDÁK. 1. *Abszorpciós spektrumok* vonalainak intenzitásváltozás-görbéjét — elméleti meggondolások alapján — legtöbbször normális- vagy Cauchy-sűrűségfüggvény görbének tekintik. Ekkor egy spektrumszakasz intenzitásváltozása normális- vagy Cauchy-sűrűségfüggvények szuperpozíciója lesz. — Az 1. ábra atomos




*1. ábra*




*2. ábra*

Fe ívspektruma intenzitásváltozás-görbéjének egy részletét mutatja. — Gyakori feladat, hogy egy ilyen görbéből meg kell határozni a spektrumszakaszban levő vonalak számát, helyét, intenzitását, főleg ha sejthető, hogy az egyes komponensek görbéi egymást eltorzítják és egyesek csúcsai teljesen kivehetetlenek. — Ennek megoldása nyilván a szereplő szuperpozíció felbontása.

2. A kémiában nem vegyülő oldott anyagoknak a „*frakcionáló megosztás*" módszerével történő szétválasztásakor a készülék celláiban a komponens anyagok binomiális eloszlás tagjaival arányos mennyiségekben vannak jelen. Ekkor az összes oldott anyag cellánkénti mennyisége binomiális eloszlások szuperpozíciója lesz. Egy ilyen anyagmennyiségeloszlás-diagramot mutat be a 2. ábra. — Gyakori feladat, hogy egy ilyen diagramból meg kell határozni a komponens anyagok számát s egyes kémiai jellemzőit, főleg ha sejthető, hogy egyes komponensekhez tartozó diagramok felismerhetetlenül elrejtőztek az összképben. — Ennek megoldása nyilván a szereplő szuperpozíció felbontása.

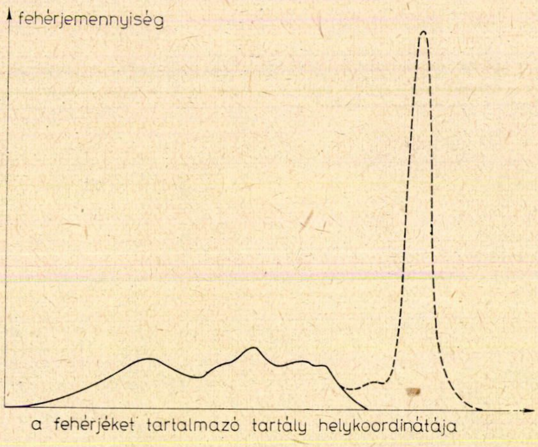
**Kiegészítések és problémák az I. 1. §-hoz**

1. Nyilvánvaló, hogy konstans faktortól eltekintve $k(x)$, ill. $\{k_n\}$ sűrűségfüggvények, ill. diszkrét eloszlások egy diszkrét eloszlás szerinti keveréke.

2. *Eloszlásfüggvények szuperpozíciója* sűrűségfüggvények szuperpozíciójának analógiájára értelmezhető. MEDGYESSY *(1961a)* könyvében még ez volt a középpontban; a jelen tárgyalásmód azonban célszerűbbnek látszik.

3. A „felbontás" elnevezései a külföldi irodalomban: „*system identification*", pontosabban „*unscrambling*" (BELLMAN, KAGIWADA, KALABA *(1965)*); „*raffinage*" (ROSENSTIEHL, GHOUILA-HOURI *(1960)*); „*analyse d'un mélange*" (THIONET *(1966)*). Mi angol szövegben a „*decomposition of superpositions*" elnevezést használjuk.

4. Abszorpciós spektrum vizsgálatával kapcsolatos felbontási problémáról írt pl. DOETSCH *(1928)*; STICKER *(1930 a, b)*; SCHELLENBERG *(1932)*; SZIGETI *(1947)*; KISS, SÁNDORFY *(1948)*; BERENCZ *(1955 a, b)*; NOBLE, HAYES, jr., EDEN *(1959)*. — Matematikailag hasonló problémával találkozunk *fehérjék elektroforézis útján történő szétválasztásakor*, pl. emberi vérszérum vizsgálata során, A. TISELIUS készülékével; egy ilyen vizsgálat eredménye látható a 3. ábrán (az albumin-csúcsot (— — —),




*3. ábra*

mely úgyis jól kivehető, grafikusan levontuk az összképből.) Ilyenkor a felbontás *diagnosztikai* fontosságú, mert belőle a szérumfehérjék száma, százalékos aránya stb. meghatározható. — A $\gamma$-globulin therapiás célú különválasztásakor is előadódik ez a probléma. — A probléma irodalmából megemlíthető pl. SVEDBERG, PEDERSEN *(1940)* p. 265; WIEDEMANN *(1947)*; WALLNER, ULKE *(1952)*; MEDGYESSY *(1953)*, *(1954 c)*; WUHRMANN, WUNDERLY *(1957)* III. B. — Részletesen ismertetés mindehhez pl. MEDGYESSY *(1953)*, *(1954b)*, *(1955 a, b, c)*, *(1957)*, *(1961a)* pp. 18—21.

5. Sűrűségfüggvény-szuperpoziciók felbontásának a spektroszkópián kívül szerepe van a matematikai statisztikában, matematikai közgazdaságtanban, biokémiában é. í. t.; lásd pl. HARDING *(1949)*; CASSIE *(1954)*; DAEVES, BECKEL *(1958)*; CARNAHAN *(1964)*; INOUYE *(1964)*; VARGA *(1966)*; BHATTACHARYA *(1967)*;

LARSON, KENNETH *(1967)*; MESZÉNA *(1968)*; VARGA *(1968)*; ZSIDKOV, SCSEDRIN, RAMBIDI, EGOROVA *(1968)*; GREGOR *(1969)*.

6. A kémiai frakcionáló megosztás tárgyköréhez irodalom pl. JANTZEN *(1932)*; CRAIG *(1944)*; STENE *(1945)*; CRAIG *(1951)*. — Ismertetés, ill. kiegészítés még pl. MEDGYESSY *(1954a)*; MEDGYESSY, RÉNYI, TETTAMANTI, VINCZE *(1954)*; MEDGYESSY *(1955c)*, *(1961a)* pp. 22—23.

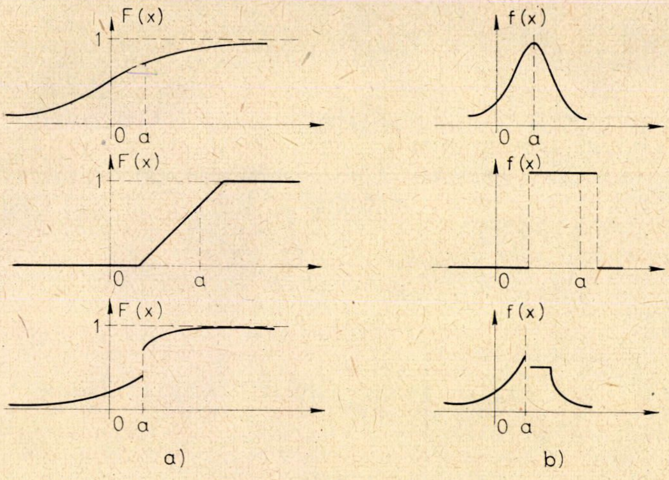
7. Diszkrét eloszlás-szuperpoziciók felbontásának a kémiai technológián kívül szerepe van a matematikai statisztikában és egyéb tudományokban is; lásd pl. MCPHEE *(1963)*; THIONET *(1966)*.

## II. NÉHÁNY MATEMATIKAI SEGÉDESZKÖZ

### 1. §. Egycsúcsú sűrűségfüggvények

Egy sűrűségfüggvény egycsúcsúságát a hozzá tartozó eloszlásfüggvény segítségével értelmezhetjük a legkönnyebben.

1. DEFINÍCIÓ. Egy $F(x)$ eloszlásfüggvényt az $x=a$ pontban egycsúcsúnak — röviden: $(a)$ egycsúcsúnak — nevezünk, ha a $(-\infty, a)$ intervallumban konvex, az $(a, \infty)$ intervallumban pedig konkáv. $a$ neve: *csúcshely* (modus). — Ha konvex, ill. konkáv helyett szigorúan konvex, ill. konkáv is mondható, azt mondjuk: $F(x)$ szigorúan $(a)$ egycsúcsú (HINCSIN *(1938)*; GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* §. 32). (A lehetséges típusokat mutatja a 4*a* ábra.)




*4. ábra*

2. DEFINÍCIÓ. Egy $f(x)$ sűrűségfüggvényt $(a)$ egycsúcsúnak, ill. szigorúan $(a)$ egycsúcsúnak nevezünk, ha a hozzá tartozó eloszlásfüggvény $(a)$ egycsúcsú, ill. szigorúan $(a)$ egycsúcsú.

Ekkor $f(x)$ a $(-\infty, a)$ szakaszon monoton nemcsökkenő, ill. monoton növekedő, az $(a, \infty)$ szakaszon pedig monoton nemnövekedő, ill. monoton csökkenő. $x=a$-ban

$f(x)$ nem mindig van értelmezve (FELLER *(1966)* p. 115). (A lehetséges típusokat mutatja a 4*b* ábra.)

E jelzőket $F(x)$, ill. $f(x)$ görbéjére is alkalmazzuk, az előzőket értve rajtuk.

Egy $f(x)$ szigorúan ($a$) egycsúcsú sűrűségfüggvény görbéjének $(a, f(a))$ pontját $f(x)$ görbéje *csúcsának* nevezzük.

Ha $F(x)$, ill. $f(x)$ egy $b$ pont körül szimmetrikus, ($b$) szimmetrikusnak nevezzük.

Az egycsúcsúság megállapítása nyilván egyszerű lesz, ha $f(x)$-re $f'(x) = \Phi(x) f(x)$ típusú differenciálegyenlet áll fenn — például, ha a $\Phi(x)$ függvénynek egyetlen zérushelye van; vö. a *Pearson*-féle sűrűségfüggvénycsalád esetével (PEARSON *(1894)*).

## Kiegészítések és problémák II. 1. §-hoz

1. A főrészben elmondottak eloszlás-, ill. sűrűségfüggvények konstansszorosára is nyilván igazak.

2. Mivel a munkánkban leírt módszerek alkalmazásakor sokszor szükséges sűrűségfüggvények egycsúcsúságának megállapítása, felsoroljuk az ehhez felhasználható fontosabb tételeket. *Ez az áttekintés önmagában is érdeklődésre tarthat számot.*

1. TÉTEL. *Egy $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény akkor és csak akkor egy* ($a$) *egycsúcsú eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye, ha*

$$\varphi(t) = \frac{e^{iat}}{t} \int_0^t \psi(u)\, du = e^{iat} \int_0^1 \psi(tu)\, du,$$

*ahol $\psi(u)$ egy karakterisztikus függvény* (HINCSIN *(1938)*; GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* § 32; FELLER *(1966)* p. 501).

A tétel levezethető a *Pólya*-féle konvex karakterisztikus függvények előállítási tételéből is (MEDGYESSY *(1963)*). — Rokon tételek: ISII *(1958)*; OLSHEN, SAVAGE *(1970)*.

2. TÉTEL. *Egy $f(x)$ sűrűségfüggvény akkor és csak akkor* (0) *egycsúcsú, ha*

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^\infty \frac{dP(y)}{y} & (x \geqq 0) \\[2ex] \displaystyle -\int_{-\infty}^x \frac{dP(y)}{y} & (x < 0) \end{cases}$$

*ahol $P(y)$ egy eloszlásfüggvény. Ha $P(y)$-nak létezik sűrűségfüggvénye, az a képletbe gépiesen bevihető* (GIRAULT *(1955)*).

3. TÉTEL. *Ha egycsúcsú eloszlásfüggvények egy sorozata tart valamilyen eloszlásfüggvényhez, akkor ez utóbbi is egycsúcsú* (LAPIN *(1947)*; GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* § 32; IBRAGIMOV, LINNIK *(1965)* p. 79).

4. TÉTEL. *Ha $F_1(x)$ $(a_1)$ szimmetrikus, $(a_1)$ egycsúcsú és $F_2(x)$ $(a_2)$ szimmetrikus, $(a_2)$ egycsúcsú eloszlásfüggvény, akkor $F_1(x)*F_2(x)$ $(a_1+a_2)$ szimmetrikus, $(a_1+a_2)$ egycsúcsú eloszlásfüggvény* (WINTNER *(1956)*: IBRAGIMOV, LINNIK *(1965)* pp. 80—81).

Hasonló tétel áll fenn sűrűségfüggvényekre.

3. DEFINÍCIÓ. Egy $F(x)$ eloszlásfüggvényt erősen egycsúcsúnak nevezünk, ha tetszőleges $H(x)$ egycsúcsú eloszlásfüggvény esetén $F(x)*H(x)$ is egycsúcsú (IBRAGIMOV *(1956)*).

Ekkor $F(x)$ maga is egycsúcsú.

5. TÉTEL. *Egy $F(x)$ nem-elfajult egycsúcsú eloszlásfüggvény akkor és csak akkor erősen egycsúcsú, ha $F(x)$ folytonos és* $\log F'(x)$ — *ahol $F'(x)$ a (mindenütt létező) bal (vagy jobb) oldali deriváltat jelenti — konkáv azon a ponthalmazon, melyen $F(x)$-nek sem a bal, sem a jobb oldali deriváltja nem zérus* (IBRAGIMOV *(1956)*).

Az erősen egycsúcsú sűrűségfüggvény fogalma az előbbiekre visszavezetve definiálható.

PÉLDA. Az
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{p-1}e^{-\frac{x}{K}}}{K^p\Gamma(p)} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}\qquad (K>0)$$
Gamma-sűrűségfüggvény erősen egycsúcsú, ha $p\geqq 1$; $0<p<1$ esetén viszont ez már nem igaz (KUBIK *(1966)*).

Ezután *elégséges* feltételeket adunk meg eloszlásfüggvények egycsúcsúságára. Ehhez néhány újabb fogalomra és tételre van szükség.

4. DEFINÍCIÓ. Egy $\Lambda(x)$ mérhető, valós függvényt *totálpozitívnak* nevezünk, ha legalább két különböző $x$ értékre $\Lambda(x)\neq 0$, továbbá, ha tetszőleges $n=1, 2, \ldots$-re az $x_1<\cdots<x_n$, $y_1<\cdots<y_n$ mennyiségekből képezett determinánsra fennáll $\|\Lambda(x_i-y_j)\|_{i,j=1,\ldots,n}\geqq 0$ (SCHOENBERG *(1947)*, *(1951)*).

5. DEFINÍCIÓ. Egy $\Lambda(x)$ mérhető, valós függvényt *kétszeresen pozitívnak* nevezünk, ha $\Lambda(x)\geqq 0$ és tetszőleges $x_1<x_2$, $y_1<y_2$ értékekre
$$\begin{vmatrix}\Lambda(x_1-y_1) & \Lambda(x_1-y_2)\\ \Lambda(x_2-y_1) & \Lambda(x_2-y_2)\end{vmatrix}\geqq 0$$
(SCHOENBERG *(1947)*, *(1951)*).

A $k$-szorosan pozitív függvény ezek analógiájára definiálható. — Egy totálpozitív függvény nyilván $k$-szorosan — tehát kétszeresen is — pozitív.

6. TÉTEL. *Egy $\Lambda(x)$ mérhető, valós függvény akkor és csak akkor kétszeresen pozitív, ha $\Lambda(x)=e^{-\psi(x)}$, ahol $\psi(x)$ konvex (és folytonos), ha $\alpha<x<\beta$ $(-\infty\leqq\alpha<\beta\leqq\leqq+\infty)$, $\varphi(x)=+\infty$, ha $x<\alpha$ és $x>\beta$ és ha $\alpha$ és $\beta$ véges, $\psi(\alpha+0)\leqq\psi(\alpha)\leqq+\infty$, és $\psi(\beta-0)\leqq\psi(\beta)\leqq+\infty$* (SCHOENBERG *(1947)*, *(1951)*).

6. DEFINÍCIÓ. A $\Lambda(x)$ nem-monoton, totálpozitív függvénnyel képezett
$$\frac{\Lambda(x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Lambda(x)\,dx}$$
függvényt *Pólya*-féle sűrűségfüggvénynek nevezzük (SCHOENBERG *(1947)*, *(1951)*).

PÉLDÁK totálpozitív függvényekre:

$$\Lambda(x) = e^{-x^2}; \quad \Lambda(x) = e^{-|x|};$$

$$\Lambda(x) = \begin{cases} x^n e^{-x}, & (x > 0) \quad (n = 0, 1, \dots); \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \nu^2 e^{-x\nu^2} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

(SCHOENBERG *(1947)*; *(1951)* p. 343, 372).

7. TÉTEL. *Egy Pólya-féle sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye*

$$\lambda(t) = C \cdot e^{-\gamma t^2} e^{i\delta t} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-i\delta_\nu t}}{(1 - i\delta_\nu t)}$$

$$\left(\gamma \geqq 0; \quad \delta, \delta_\nu \text{ valós}; \quad 0 < \gamma + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu^2 < \infty\right)$$

*alakú* (SCHOENBERG *(1951)*).

Egy Pólya-féle sűrűségfüggvény tehát egy normális sűrűségfüggvénynek és exponenciális sűrűségfüggvények, ill. tükörképeik (esetleg végtelenszeres) konvolúciójának a konvolúciója.

$\lambda(t)$ — pontosabban: bizonyos $\Psi(s)$ egész függvény, melyre $\Psi(-it) = \lambda(t)$ és — mint igazolható (SCHOENBERG *(1947)*, *(1951)*) — $\frac{1}{\Psi(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs} \Lambda(x)\, dx$, ahol $\Lambda(x)$ egy sűrűségfüggvény konstansszorosa — PÓLYA GYÖRGY egy dolgozatában szerepel először (PÓLYA *(1915)*). Ez az elnevezés magyarázata.

8. TÉTEL. *Egy Pólya-féle sűrűségfüggvény deriváltjának egyetlen zérushelye van, vagyis a Pólya-féle sűrűségfüggvények egycsúcsúak* (SCHOENBERG *(1947)*; HIRSCHMAN, WIDDER *(1949)*; HIRSCHMAN *(1950)*).

9. TÉTEL. *Egy $\Lambda(x)$ kétszeresen pozitív függvény — konstans faktortól eltekintve — erősen egycsúcsú sűrűségfüggvény* (MEDGYESSY *(1968)*, *(1971c)*, *(1971d)*).

*Bizonyítás.* Feltevéseink folytán $\Lambda(x) = e^{-\psi(x)} \neq 0$, ha $\alpha < x < \beta$ és $\Lambda(x)$ konstans faktortól eltekintve egy sűrűségfüggvény, mely $(\alpha, \beta)$-n folytonos. Legyen a hozzátartozó eloszlásfüggvény $F(x)$. $F(x)$ folytonos, $F'(x) = \Lambda(x) \neq 0$ és $\log F'(x) = -\psi(x)$ konkáv, ha $\alpha < x < \beta$, így tehát az 5. tétel következtében $F(x)$ erősen egycsúcsú eloszlásfüggvény — és ez a tétel állításával ekvivalens.

Ebből következik, hogy a kétszeresen pozitív függvények által képviselt erősen egycsúcsú sűrűségfüggvények karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = C \cdot \int_\alpha^\beta e^{-\psi(x)} e^{itx}\, dx$ alakú — melynek további vizsgálata megoldatlan probléma — és — mivel *Pólya-féle* sűrűségfüggvény totálpozitív és így kétszeresen pozitív is — a

10. TÉTEL. *A Pólya-féle sűrűségfüggvények erősen egycsúcsúak* (MEDGYESSY *(1968)*, *(1971c)*, *(1971d)*).

Ha tehát egy karakterisztikus függvény $\lambda(t)$ alakú, akkor a megfelelő sűrűségfüggvény erősen egycsúcsú. — A Gamma-sűrűségfüggvények fent említett típusa — melyre ez közvetlenül is igazolható volt — $\lambda(t)$ típusú és ilyen a normális sűrűségfüggvény is (IBRAGIMOV *(1956)*).

A *Pólya*-féle sűrűségfüggvényeket kivéve, a kétszeresen pozitív függvények analitikus előállítása megoldatlan probléma (SCHOENBERG *(1955)*).

A totálpozitív és ezekkel rokon függvényeknek nagy irodalma van; az idézett cikkeken kívül könyv is (KARLIN *(1968)*).

11. TÉTEL. *A*

$$\varphi(t) = e^{-c|t|^A\{1+iB\operatorname{sgn} t\cdot\omega(t,A)\}}$$

$$\left(c>0,\ 0<A\leqq 2,\ |B|\leqq 1,\ \omega(t,A)=\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{\pi A}{2} & (A\neq 1)\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}\log|t| & (A=1)\end{cases}\right)$$

*karakterisztikus függvényű $S_A(x,B,c)$ ún. stabilis eloszlásfüggvények* (LÉVY *(1924)*, *(1925)* pp. 252—277; HINCSIN, LÉVY *(1937)*; HINCSIN *(1938)*; GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* § 34) *egycsúcsúak* (IBRAGIMOV, CSERNIN *(1959)*).

Mivel $S_A(x, B, c)$ tetszőleges sokszor differenciálható (GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* § 36) a $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényű $s_A(x, B, c)=\frac{d}{dx}S_A(x, B, c)$ ún. *stabilis sűrűségfüggvények* is értelmezve vannak és egycsúcsúak. Nyilván $s_A(x, B, c) = s_A(-x, -B, c)$.

PÉLDÁK. A tétel alapján egycsúcsúak az elemi stabilis sűrűségfüggvények: a *normális sűrűségfüggvény*, melyet $f(x)=\dfrac{e^{-\frac{x^2}{4c}}}{\sqrt{4\pi c}}$ *alakban írunk munkánkban*, minthogy ekkor felel meg karakterisztikus függvénye, $\varphi(t)=e^{-ct^2}$ a fenti alaknak (itt $A=2$, $B$ tetszőleges); a *Cauchy-féle sűrűségfüggvény*, $f(x)=\dfrac{1}{\pi c}\dfrac{1}{1+x^2/c^2}$ alakkal (itt $A=1$, $B=0$); *a Pearson-féle V. típusú sűrűségfüggvény*, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{e^{-\frac{c^2}{2x}}}{x^{3/2}} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}$

alakkal (itt $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$), melynek érdekes alkalmazásai vannak (FELLER *(1966)* pp. 170—172; OVSZEEVICS, JAGLOM *(1954)*).

A többi stabilis sűrűségfüggvény analitikus alakját illetőleg lásd pl. WINTNER *(1941)*; POLLARD *(1946)*; BERGSTRÖM *(1953)*; LINNIK *(1954)*; SZKOROHOD *(1954)*; ZOLOTAREV *(1954)*, *(1956)*; IBRAGIMOV, LINNIK *(1965)* II. § 3.

7. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy egy eloszlásfüggvény *korlátlanul osztható*, ha karakterisztikus függvénye, $\psi(t)$ előállítható a

$$\psi(t) = \exp\left[i\gamma t-\frac{\sigma^2t^2}{2}+\int_{-\infty}^{-0}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dM(u)+\int_{+0}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u)\right]$$

alakban (*P. Lévy*-féle kanonikus előállítás; l. GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* § 18) — ahol $\gamma$, $\sigma$ valós, $M(u)$ a $(-\infty, 0)$, $N(u)$ pedig a $(0, \infty)$ szakaszon nem-eltűnő és nemcsökkenő, $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$ és $\int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dM(u) + \int_{0}^{\varepsilon} u^2 dN(u) < \infty$ bármely $\varepsilon > 0$ mellett.

8. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy egy eloszlásfüggvény az $\mathscr{L}$ *osztályba tartozik*, ha karakterisztikus függvénye, $\lambda(t)$ eleget tesz minden $\alpha$ $(0<\alpha<1)$ mellett a $\lambda(t) = \lambda(\alpha t)\lambda_\alpha(t)$ függvényegyenletnek, ahol $\lambda_\alpha(t)$ egy karakterisztikus függvény. Az $\mathscr{L}$ osztálybeli eloszlásfüggvények korlátlanul oszthatók. (LÉVY *(1937)*: GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* § 29).

12. TÉTEL. *Az $\mathscr{L}$ osztályba tartozó szimmetrikus eloszlásfüggvények egycsúcsúak* (WINTNER *(1956)*).

Analóg állítás igaz a megfelelő sűrűségfüggvényekre.

13. TÉTEL. *Azok az $\mathscr{L}$ osztályba tartozó eloszlásfüggvények, amelyek P. Lévy-féle kanonikus előállításában vagy $M(u) \equiv 0$ vagy $N(u) \equiv 0$, egycsúcsúak* (WOLFE *(1971)*).

14. TÉTEL. *Ha $\{F(x, y)\}$ $(c<y<d)$ $(a)$ egycsúcsú eloszlásfüggvények egyparaméteres családja és $F(x, y)$ karakterisztikus függvénye $\varphi(t, y)$, továbbá $A(y)$ egy eloszlásfüggvény, akkor a $G(x) = \int_c^d F(x, y)\, dA(y)$ keverék-eloszlásfüggvény is $(a)$ egycsúcsú és karakterisztikus függvénye $\omega(t) = \int_c^d \varphi(t, y)\, dA(y)$. — Ha $F(x, y)$ egyúttal $(a)$ szimmetrikus is, $G(x)$ is az* (MEDGYESSY *(1967)*).

PÉLDÁK. Ha $\xi$ $(a)$ egycsúcsú eloszlásfüggvényű, $\varphi_\xi(t)$ karakterisztikus függvényű sztochasztikus változó, $\eta$ pedig egy $\xi$-től független, $F(x)$ eloszlásfüggvényű sztochasztikus változó, akkor $\xi\eta$, illetve $\xi/\eta$ karakterisztikus függvénye

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\xi(tu)\, dF(u), \quad \text{ill.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\eta\left(\frac{t}{u}\right) dF(u)$$

(GIRAULT *(1955)* pp. 290—292) és a tétel szerint $\xi\eta$, ill. $\xi/\eta$ eloszlásfüggvénye szintén $(a)$ egycsúcsú.

15. TÉTEL. *Ha $\Phi(t)$ egy $(0)$ egycsúcsú, $(0)$ szimmetrikus eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye, $\{p_r\}$ $(r=0, 1, \ldots)$ pedig egy $g(z)$ generátorfüggvényű diszkrét eloszlás, akkor $\sum_{r=0}^{\infty} p_r[\Phi(t)]^r = g[\Phi(t)]$ egy $(0)$ egycsúcsú, $(0)$ szimmetrikus eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye* (MEDGYESSY *(1967)*).

Analóg tételek igazak sűrűségfüggvényekre is.

PÉLDÁK. 1. A $\varphi(t) = e^{\lambda[\Phi(t)-1]}$ $(\lambda>0)$ karakterisztikus függvényű eloszlásfüggvények (de FINETTI *(1930)*), ahol $\Phi(t)$ a tételben szereplő karakterisztikus függvény, a tétel folytán $(0)$ egycsúcsúak és $(0)$ szimmetrikusak.

2. A $\varphi(t) = \dfrac{p-1}{p-\Phi(t)}$ $(p>1$, $\Phi(t)$ az előbbi$)$ karakterisztikus függvényű eloszlásfüggvények — melyek korlátlanul oszthatók is (LUKÁCS *(1957)*, *(1964)* pp. 215—216) — a tétel folytán $(0)$ egycsúcsúak és $(0)$ szimmetrikusak is.

9. DEFINÍCIÓ. Jelentse $\mathscr{M}$ azon szimmetrikus, korlátlanul osztható eloszlásfüggvények *osztályát*, melyek karakterisztikus függvénye fenti *P. Lévy*-féle kanonikus előállításában — melyben a szimmetricitás folytán nyilván $N(u) = M(-u) - M(u)$ *konvex* a $(-\infty, 0)$ szakaszon (MEDGYESSY *(1967)*). — Ezek nyilván $(\gamma)$ szimmetrikusak.

Egycsúcsú eloszlásfüggvények egy *új osztályát* vezeti be a

16. TÉTEL. *Az $\mathscr{M}$ osztályba tartozó eloszlásfüggvények egycsúcsúak* (MEDGYESSY *(1967)*).

PÉLDÁK. 1. Nyilván ide tartoznak a szimmetrikus stabilis eloszlásfüggvények, de ezek egycsúcsúsága már bizonyított;

2.) $$\gamma = \sigma^2 = 0, \quad M(u) = \int_{-\infty}^{u} M'(y)dy,$$

$$M'(u) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{|u|^{1+\alpha}} & (-1 < u \leqq 0) \\ \beta e^{-\frac{1}{2}(|u|-1)} & (u \leqq -1) \end{cases} \qquad (u < 0, \quad 0 < \alpha < 1)$$

eleget tesznek a tétel feltételeinek. Így tehát a

$$\psi(t) = \exp\left[i\gamma t + 2\beta \int_{-\infty}^{-0} (\cos tu - 1) M'(u)du\right]$$

karakterisztikus függvényű eloszlásfüggvény, mely — mint igazolható — *nem* tartozik az $\mathscr{L}$ osztályba, $(\gamma)$ egycsúcsú, — ami értékes adat, minthogy ez az eloszlásfüggvény zárt alakban nem írható fel.

17. TÉTEL. *Ha $\psi(t)$ az $\mathscr{M}$ osztályba tartozó $(\gamma)$ egycsúcsú eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye, akkor $[\psi(t)]^c$ $(c>0)$ egy $(c\gamma)$ egycsúcsú, $(c\gamma)$ szimmetrikus, korlátlanul osztható $\mathscr{M}$ osztálybeli eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye* (MEDGYESSY *(1976)*).

18. TÉTEL. *Ha $\psi(t)$ az $\mathscr{M}$ osztályba tartozó* (0) *egycsúcsú eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye és $B(x)$ egy eloszlásfüggvény, akkor az $\omega(t) = \int_0^\infty [\psi(t)]^x dB(x)$ függvény — azaz $B(x)$ Laplace—Stieltjes-transzformáltja a $[-\log \psi(t)]$ helyen —, egy* (0) *egycsúcsú,* (0) *szimmetrikus, korlátlanul osztható eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye* (MEDGYESSY *(1967)*).

Analóg tételek, ill. definíciók fogalmazhatók meg sűrűségfüggvényekre.

Érdemes vizsgálni *általánosságban* azokat az $E$ egycsúcsú eloszlás- (sűrűség-) függvény-családokat, melyeknek az a tulajdonsága, hogy bármely két tagjuk konvolúciója szintén beletartozik a családba. Ilyen eloszlás-, ill. sűrűségfüggvénycsaládot alkotnak ugyanis — definíciójukból következően — 1. a *Pólya*-féle sűrűségfüggvények (SCHOENBERG *(1951)*) — ez karakterisztikus függvényükből is leolvasható; 2. az egyazon $A$ és $B$ paraméterű karakterisztikus függvényű stabilis eloszlásfüggvények; 3. az $\mathscr{L}$ osztálybeli szimmetrikus eloszlásfüggvények; 4. az $\mathscr{M}$ osztálybeli eloszlásfüggvények.

Az e családokhoz tartozó bármely két — egycsúcsú — eloszlásfüggvény konvolúciója ismét egycsúcsú; erősen egycsúcsú jelleget nem kell feltenni (ez nem vezet ellentmondásra, mert az erősen egycsúcsú eloszlásfüggvények esetében tetszőleges egycsúcsú eloszlásfüggvénnyel való konvolúció szerepel, itt pedig *nem* tetszőleges a másik eloszlásfüggvény). — Az összes ilyen $E$ családok meghatározása azonban megoldatlan probléma.

Még inkább megoldatlan probléma, hogy van-e olyan egycsúcsú eloszlásfüggvénycsalád, mely család tetszőleges két tagjának konvolúciója — ami esetleg nem is tartozik a családba — egycsúcsú?

19. TÉTEL. *Ha egy $f(x)$ $(x>0)$ sűrűségfüggvény deriválható és deriváltja előállítható $f'(x)=\int_0^\infty e^{-xt}\varphi(t)\,dt$ Laplace-transzformáció alakban, melyben a $\varphi(t)$ függvénynek egyetlen jelváltása van a $(0, \infty)$ szakaszon, akkor $f(x)$ egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1968)*).

*Bizonyítás.* Ismeretes (DOETSCH *(1950)* p. 149), hogy ha egy $F(t)$ valós függvénynek $t>0$ esetén $n$ számú jelváltása van, akkor az $f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$ *Laplace*-transzformáltnak a konvergencia-félsík valós $s$ értékeire legfeljebb $n$ különböző zérushelye van, vagyis legfeljebb $n$ előjelváltása. Ennek alapján az $f'(x)$ függvénynek legfeljebb egy előjelváltása lesz a $(0, \infty)$ szakaszon, vagyis $f(x)$-nek legfeljebb egy extremuma lesz. Mivel $f(x)$ sűrűségfüggvény, épp egy maximum lesz, azaz $f(x)$ egycsúcsú.

Hasonló tétel mondható ki, ha $e^{-xt}$ helyett *Pólya*-féle sűrűségfüggvényt képviselő magfüggvény szerepel (SCHOENBERG *(1951)*; HIRSCHMAN, WIDDER *(1955)* p. 108).

Olykor annak alapján is eldönthető egy sűrűségfüggvény egycsúcsúsága, hogy karakterisztikus függvénye eleget tesz bizonyos differenciálegyenletnek. Ilyen kritériumot szolgáltat a

20. TÉTEL. *Ha egy $f(x)$ sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye, $\varphi(t)$ eleget tesz a*

$$\sum_{\mu=0}^{M} B_\mu \varphi^{(\mu)}(t)+\sum_{\nu=0}^{N} A_\nu [t\varphi(t)]^{(\nu)} = 0$$

*differenciálegyenletnek, ahol $M, N>0$, $A_\nu$, $B_\mu$ konstansok, továbbá*

$$\lim_{|t|\to\infty} \varphi^{(\varrho)}(t) = 0 \qquad (\varrho = 0, 1, \dots, M-1),$$

$$\lim_{|t|\to\infty} [t\varphi(t)]^{(\tau)} = 0 \qquad (\tau = 0, 1, \dots, N-1),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\,dt<\infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |t\varphi(t)|\,dt<\infty$$

*és a*

$$\Phi(x) = \sum_{\mu=0}^{M} B_\mu i^\mu x^\mu \Big/ \sum_{\nu=0}^{N} A_\nu i^{\nu-1} x^\nu \qquad (-\infty<x<\infty)$$

*függvénynek egyetlen jelváltása van, akkor $f(x)$ egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1971d)*).

*Bizonyítás.* Feltételeink alapján a differenciálegyenlet inverz Fourier-transzformáltját képezve azt kapjuk, hogy $f'(x)=\Phi(x)f(x)$, amiből állításunk már következik. A csúcs helye az előbbiek alapján rögtön megadható. — Ha $N=0$ $M=1$, $\Phi(x)$-nek automatikusan egyetlen jelváltása lesz. (Érdekes kapcsolatba hozni e tételt a *Pearson*-féle sűrűségfüggvénycsaláddal (PEARSON (1894)).

Történeti megjegyzések. Egycsúcsú sűrűségfüggvények vizsgálata a XIX. sz. végén kezdődött el, amidőn szükségessé vált empirikus sűrűségfüggvények egycsúcsú grafikonját szintén *egycsúcsú* függvényekkel közelíteni (JORDAN *(1927)* p. 179). Ennek során vezették be a ma *Pearson*-féle sűrűségfüggvénycsalád néven ismert egycsúcsú sűrűségfüggvényosztályt (PEARSON *(1894)*), mely számos fontos típust tartalmazott. Később kiderült, hogy a legjellegzetesebbekhez egészen más oldalról is — független sztochasztikus változók összegei határeloszlásának vizsgálata révén — el lehet jutni. Így bukkantak rá a korlátlanul osztható eloszlásfüggvényekre a 30-as években; ezek általános jellemzői azonban mit sem mondtak az egycsúcsúsági viszonyokról. Elkezdődött tehát egycsúcsúsági kérdések vizsgálata a karakterisztikus függvény alapján (HINCSIN *(1938)*). Ennek hatalmas lökést adott az az észrevétel (CHUNG *(1953)*), hogy egycsúcsú eloszlásfüggvények konvolúciója, szemben az addigi — téves — állítással (LAPIN *(1947)*), *nem* szükségképp egycsúcsú. Bizonyítandó maradt ezzel együtt az a korábban igaznak tartott állítás is, hogy a stabilis eloszlásfüggvények egycsúcsúak. Ezt csak később igazolták (IBRAGIMOV, CSERNIN *(1959)*;) időközben egycsúcsú eloszlásfüggvények konvolúciója egycsúcsúságának kérdését is tisztázták (IBRAGIMOV *(1956)*). — Eloszlásfüggvények egycsúcsúságának vizsgálata azóta is folyik (LUKÁCS *(1961)*; FISZ *(1962)*; MEDGYESSY *(1963)*, *(1967)*, *(1968)*; WOLFE *(1971)*). — *Diszkrét eloszlások egycsúcsúságára vonatkozó kutatások viszont — érdekes módon — alig voltak. Ezt a hiányt igyekezett pótolni a szerző* (MEDGYESSY *(1968)*, *(1971b)*, *(1971c)*, *(1971d)*); ennek eredménye a II. 2. §-ban van összefoglalva.

Említést érdemelnek a következő

PROBLÉMÁK. 1. Az $\mathscr{M}$ osztályba tartozó eloszlásfüggvények karakterisztikus függvénye eleget tesz-e — az $\mathscr{L}$ osztályba tartozókénak a mintájára — valamilyen függvényegyenletnek?

2. Igaz-e, hogy ha egy $F(x)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye véges intervallumon kívül azonosan 0, akkor $F(x)$ nem lehet egycsúcsú?

3. Két (0) egycsúcsú, *nem-szimmetrikus* eloszlásfüggvény konvolúciója milyen feltételek mellett lehet — esetleg (0) — egycsúcsú? (Két, egyazon $A$, $B$ karakterisztikus függvény-paraméterekkel jellemzett, 0-ba eltolt csúcsú, nem-szimmetrikus stabilis eloszlásfüggvényre ez fennáll.)

4. Nyilvánvaló: ha $F(x)$ erősen egycsúcsú eloszlásfüggvény, $[F(x)]^{*n}$ $(n=2, 3, \dots)$ egycsúcsú. – Kérdés: ha $F(x)$ csupán (0) egycsúcsú, mikor lesz ugyanilyen $[F(x)]^{*n}$?

5. Határozzuk meg egy erősen egycsúcsú, korlátlanul osztható eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényének *Lévy-Hincsin*-féle kanonikus alakját.

6. Egy egycsúcsú és egy nem-egycsúcsú eloszlásfüggvény konvolúciója mikor lesz egycsúcsú?

7. *Nem* (0) *egycsúcsú* eloszlásfüggvények keveréke mikor lesz egycsúcsú?

8. Igaz-e: ha $F(x)$ egy eloszlásfüggvény, akkor $[F(x)]^{*n}$ — bizonyos feltételek mellett — már *egycsúcsú* eloszlásfüggvény lesz, ha $n$ túlhaladt valamilyen jól definiált küszöbszámon? (Vö. azzal, hogy független, egyforma eloszlásfüggvényű sztochasztikus változók alkalmasan normált összegének határeloszlásfüggvénye normális — vagyis egycsúcsú (GNEDENKO *(1954)* p. 248). — E sejtés analogonja RÉNYI ALFRÉD egy sejtésének (l. a *Kiegészítések és problémák* II. 2. §-hoz 1.) végén a 7. problémát).

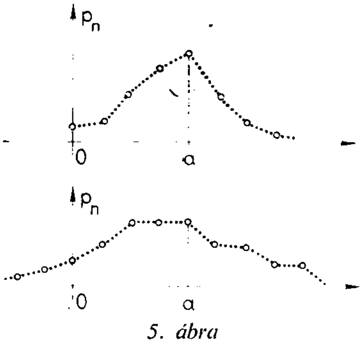
## 2. §. Egycsúcsú diszkrét eloszlások

Az egycsúcsúságot diszkrét eloszlások esetén nem lehet úgy értelmezni, mint folytonos eloszlásfüggvényeknél, mert eloszlásfüggvényük lépcsős. Kínálkozik azonban az

1. DEFINÍCIÓ. Egy $\{p_n\}$ $(n=\cdots=1, 0, 1, \ldots)$ diszkrét eloszlást az $n=a$ pontban egycsúcsúnak — röviden: $(a)$ egycsúcsúnak nevezünk, ha a

$$\ldots, p_{-1}-p_{-2}, p_0-p_{-1}, p_1-p_0, \ldots, p_n-p_{n-1}, \ldots$$

sorozatban egyetlen előjelváltás van éspedig $n = a+1$-nél (MEDGYESSY *(1968)*, *(1971b)*, *(1971c)*, *(1971d)*). (Az 5. ábra lehetséges típusokat mutat.)




*5. ábra*

E jelzőt $\{p_n\}$ diagramjára is alkalmazzuk, az előzőket értve rajta. — Rokon definíciók: HOLGATE *(1970)*; KEILSON, GERBER *(1971)*.

Egy $\{p_n\}$, $(n=\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ $(a)$ egycsúcsú diszkrét elosztás diagramjának $(a, p_a)$ pontját $\{p_n\}$ diagramja *csúcsának* nevezzük.

Az egycsúcsúság megállapítása nyilván egyszerű lesz, ha $\{p_n\}$ tagjai közt $p_{n+1}=\Phi(n)p_n$ típusú rekurzív összefüggés áll fenn — például, ha a $\{\Phi(n)-1\}$ sorozatban egyetlen előjelváltás van.

### Kiegészítések és problémák a II. 2. §-hoz

1. Mivel a munkánkban leírt módszerek alkalmazásakor sokszor szükséges diszkrét eloszlások egycsúcsúságának megállapítása, felsoroljuk azehhez felhasználható, túlnyomórészt MEDGYESSY PÁLtól származó tételeket, melyek sokban analogonjai az egycsúcsú eloszlásfüggvényekről szólóknak. *Ez az áttekintés ön-*

*magában is érdeklődésre tarthat számot, mert ezt a tárgykört eddig valahogy elhanyagolták a valószínűségelméletben.*

1. TÉTEL. *Egy* $\{p_n\}$ $(n=\dots,-1,0,1,\dots)$ *diszkrét eloszlás akkor és csak akkor* $(a)$ *egycsúcsú, ha az*

$$(a-n+\theta)(p_n-p_{n-1})=q_n$$

*jelölés mellett, ahol* $\theta$ $(0<\theta<1)$ *tetszőleges,* $\{q_n\}$ *egy diszkrét eloszlás, melyre* $q_{a+1}>0$. (MEDGYESSY *(1968), (1971b), (1971c), (1971d)*).

2. TÉTEL. *Egy* $\{p_n\}$ $(n=\dots,-1,0,1,\dots)$ *diszkrét eloszlás akkor és csak akkor* $(a)$ *egycsúcsú, ha karakterisztikus függvénye,* $\gamma(t)$,

$$\gamma(t)=\frac{e^{i(a+\theta)t}}{i(1-e^{it})}\int_0^t \varkappa(u)e^{-i(a+\theta)u}\,du$$

*alakú, ahol* $\theta$ $(0<\theta<1)$ *tetszőleges,* $\varkappa(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n e^{int}$ *egy* $\{q_n\}$ $(n=\dots,-1,0,1,\dots)$ *diszkrét eloszlás karakterisztikus függvénye és* $q_{a+1}>0$ (MEDGYESSY *(1968), (1971b), (1971c), (1971d)*).

Ennek generátorfüggvényekre vonatkozó analogonja — ha $\{p_n\}(n=0,1,\dots)$ értelmezése $\{p_n\}(n=\dots,-1,0,1,\dots;\ p_n=0$ ha $n<0)$ — a

3. TÉTEL. *Egy* $\{p_n\}$ $(n=0,1,\dots)$ *diszkrét eloszlás akkor és csak akkor* $(a)$ *egycsúcsú* $(a>0)$, *ha generátorfüggvénye,* $\pi(z)$, $0<\varepsilon\leqq x<1$*-re*

$$\pi(x)=\frac{x^{a+\theta}}{(1-x)}\int_x^1 \frac{q(u)}{u^{a+\theta+1}}\,du \qquad (0<\varepsilon\leqq x<1)$$

*alakú, ahol* $\theta$ $(0<\theta<1)$ *tetszőleges,* $q(z)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ $(|z|\leqq 1)$ *egy* $\{q_n\}$ $(n=0,1,\dots)$ *diszkrét eloszlás generátorfüggvénye és* $q_{a+1}>0$, *továbbá* $\varepsilon>0$ *tetszőleges kicsi* (MEDGYESSY *(1968), (1971b), (1971c), (1971d)*).

A 3. tételben szükséges és elégséges feltételként

$$\pi'(x)x(x-1)+\pi(x)[a+\theta-(a+\theta-1)x]=q(x) \qquad (0<\varepsilon\leqq x<1)$$

is vehető.

Az $a=0$ eset egyszerűbben is tárgyalható.

4. TÉTEL. *Egy* $\{p_n\}$ $(n=0,1,\dots)$ $(p_0>0)$ *diszkrét eloszlás akkor és csak akkor* $(0)$ *egycsúcsú, ha a*

$$\frac{p_{n-1}-p_n}{p_0}=q_n \qquad (n=1,2,\dots)$$

*jelölés mellett* $\{q_n\}$ *egy diszkrét eloszlás, melyre* $q_1>0$ (MEDGYESSY *(1967), (1971b), (1971c), (1971d)*).

5. TÉTEL. *Egy* $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \dots)$ $(p_0>0)$ *diszkrét eloszlás akkor és csak akkor* (0) *egycsúcsú, ha a*

$$\frac{\pi(z)(1-z)}{\pi(0)}+1 = q(z) \quad (|z|\leqq 1)$$

*jelölés mellett* $q(z)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$ $(|z|\leqq 1)$ *egy* $\{q_n\}$ $(n=1, 2, \dots)$ *eloszlás generátorfüggvénye, melyre* $q_1>0$ (MEDGYESSY *(1968), (1971b), (1971c), (1971d)*).

Az e két tételben mondottak gépiesen átvihetők egy $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \dots, N)$ eloszlásra is.

6. TÉTEL. *Ha egycsúcsú diszkrét eloszlások egy sorozata tart valamilyen diszkrét eloszláshoz, akkor ez utóbbi is egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1969), (1971b), (1971c), (1971d)*; KEILSON GERBER *(1971)*).

Ezután *elégséges* feltételeket adunk meg diszkrét eloszlások egycsúcsúságára. Ehhez a csúcshely ismerete általában *nem* szükséges.

Megjegyezzük, hogy a 7., 8., 9. és 11. tételben mondottak gépiesen átvihetők egy $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \dots, N)$ eloszlásra is.

7. TÉTEL. *Ha* $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \dots)$ *egy diszkrét eloszlás és valamilyen* $\alpha$ *és* $\beta$ $(\alpha, \beta>0, \alpha+\beta = 1)$ *mellett*

$$p_n \geqq \alpha p_{n-1}+\beta p_{n+1} \qquad (n=1, 2, \dots)$$

*(*$\beta p_1-\alpha p_0 \neq 0$ *esetén ezzel ekvivalens, hogy*

$$\frac{p_n-\alpha p_{n-1}-\beta p_{n+1}}{\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-\alpha p_{n-1}-\beta p_{n+1})} = \frac{p_n-\alpha p_{n-1}-\beta p_{n+1}}{\beta p_1-\alpha p_0} = q_n \qquad (n=1, 2, \dots)$$

*jelölés mellett* $\{q_n\}$ *egy diszkrét eloszlás), akkor* $\{p_n\}$ *egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1968), (1971b), (1971c), (1971d)*).

$\alpha=\beta=1/2$ esetén a $\{p_n\}$ sorozat *konkáv*.

8. TÉTEL. *Ha egy* $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \dots)$ *diszkrét eloszlás generátorfüggvénye* $\pi(z)$ *és valamilyen* $\alpha, \beta$ $(\alpha, \beta>0, \alpha+\beta = 1)$, *továbbá* $\beta p_1-\alpha p_0 \neq 0$ *mellett, bevezetve az*

$$\frac{1}{\beta p_1-\alpha p_0}\left[\pi(z)\left(1-\alpha z-\frac{\beta}{z}\right)+p_0\left(\frac{\beta}{z}-1\right)+\beta p_1\right] = q(z) \quad (|z|\leqq 1)$$

*jelölést,* $q(z)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$ $(|z|\leqq 1)$ *egy olyan eloszlás generátorfüggvénye, melyre* $q_0=0$, *akkor* $\{p_n\}$ *egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1968), (1971b), (1971c), (1971d)*).

9. TÉTEL. *Ha* $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \dots)$ $(p_n\neq 0)$ *egy diszkrét eloszlás és valamilyen* $\alpha$ *és* $\beta$ $(\alpha, \beta>0)$ *mellett*

$$\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)^{\alpha} \leqq \left(\frac{p_n}{p_{n+1}}\right)^{\beta} \qquad (n=1, 2, \dots),$$

$\left(0 < \sum_{n=1}^{\infty} (p_n^{\alpha+\beta} - p_{n+1}^{\alpha} p_{n+1}^{\beta}) < \infty\right.$ *esetén ezzel ekvivalens, hogy a*

$$\frac{p_n^{\alpha+\beta} - p_{n-1}^{\alpha} p_{n+1}^{\beta}}{\sum_{n=1}^{\infty} (p_n^{\alpha+\beta} - p_{n-1}^{\alpha} p_{n+1}^{\beta})} = q_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

*jelölés mellett* $\{q_n\}$ *egy diszkrét eloszlás), akkor* $\{p_n\}$ *egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1968)*, *(1971b)*, *(1971c)*, *(1971d)*).

Ha az előző egyenlőtlenség fennáll $\alpha = \beta = 1$-re, azaz $p_{n-1}/p_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ monoton nemcsökkenő sorozat, vagyis $p_{n-1}/p_n \leqq p_n/p_{n+1}$ illetve $p_n^2 - p_{n-1}\, p_{n+1} \geqq 0$, — és ebből következőleg $p_n p_{n-s+r} - p_{n+s}\, p_{n+r} \geqq 0$ $(r = 1, 2, \ldots;\ s = 1, 2, \ldots;\ p_n = 0$, ha $n < 0)$ — azt mondjuk, hogy $\{p_n\}$ tagjai ún. *kétszeresen pozitív* sorozatot alkotnak (FEKETE, PÓLYA *(1912)*). Ha tehát egy eloszlás tagjai kétszeresen pozitív sorozatot képeznek, az eloszlás egycsúcsú. — Ez esetben a

$$\frac{p_n^2 - p_{n-1} p_{n+1}}{\sum_{n=1}^{\infty} (p_n^2 - p_{n-1} p_{n+1})} = q_n$$

mennyiségek alkotnak diszkrét eloszlást, ha $0 < \sum_{n=1}^{\infty} (p_n^2 - p_{n-1}\, p_{n+1}) < \infty$.

PÉLDÁK. Könnyen igazolható, hogy a *Poisson-eloszlás*, a *geometriai eloszlás*, a *binomiális eloszlás* tagjai kétszeresen pozitív sorozatot alkotnak, vagyis ezek az eloszlások egycsúcsúak.

10. TÉTEL. *Ha egy* $\{p_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *diszkrét eloszlás generációfüggvénye* $\Pi(z)$ *és* $0 < \sum_{n=1}^{\infty} (p_n^2 - p_{n-1} p_{n+1}) < \infty$, *továbbá az*

$$\frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Pi(\sqrt{x} e^{i\vartheta})|^2 (1 - e^{2i\vartheta})\, d\vartheta - \Pi(0)^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Pi(e^{i\vartheta})|^2 (1 - e^{2i\vartheta})\, d\vartheta - \Pi(0)^2} = q(x) \quad (0 < x \leqq 1)$$

*jelölés mellett* $q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$ $(|z| \leqq 1)$ *egy* $\{q_n\}$ *eloszlás generátorfüggvénye, akkor* $\{p_n\}$ *egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1968)*, *(1971b)*, *(1971c)*, *(1971d)*).

11. TÉTEL. *Ha* $\{p_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *egy diszkrét eloszlás és*

$$p_0 \leqq p_1, \quad p_n > \min(p_{n-1}, p_{n+1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

— *másképp*:

$$p_0 \leqq p_1, \quad p_n > \frac{1}{2}[p_{n-1} + p_{n+1} - |p_{n-1} - p_{n+1}|]$$

$\left(0 < \sum_{n=1}^{\infty} [p_n - \min(p_{n-1}, p_{n+1})] < \infty\right.$ *esetén ezzel ekvivalens, hogy a*

$$\frac{p_n - \min(p_{n-1}, p_{n+1})}{\sum_{n=1}^{\infty} [p_n - \min(p_{n-1}, p_{n+1})]} = q_n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

*jelölés mellett* $\{q_n\}$ *egy diszkrét eloszlás), — akkor* $\{p_n\}$ *egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1968), (1971b), (1971c), (1971d)*).

A tétel feltétele azzal ekvivalens, hogy $\{p_n\}$ tagjai ún. szigorúan *kvázi-konkáv* sorozatot alkotnak; így tehát a tétel az ún. *kvázi-konkáv függvények* egycsúcsúságáról szóló tétel analogonja (KOVÁCS *(1963)*).

A tétel generátorfüggvényekre szóló átfogalmazása megoldatlan probléma.

12. TÉTEL. *Ha a* $\{p_n^{(j)}\}$ $(n=0, 1, \ldots; j=1, 2, \ldots)$ *diszkrét eloszlások tagjai kétszeresen pozitív sorozatot alkotnak — vagyis az eloszlások egycsúcsúak — akkor a*

$$\{p_n^{(1)}\} * \{p_n^{(2)}\} * \cdots * \{p_n^{(M)}\} \qquad (M=1, 2, \ldots)$$

*konvolúció tagjai is kétszeresen pozitív sorozatot alkotnak — vagyis ez utóbbi eloszlás is egycsúcsú.*

Mindez FEKETE MIHÁLY egy híres tételéből következik (FEKETE, PÓLYA *(1912)*).

PÉLDÁK: 1. Legyen $\{p_n^{(j)}\}$ ugyanaz a geometriai eloszlás bármely $j$ mellett. Mivel — mint láttuk — a geometriai eloszlás tagjai kétszeresen pozitív sorozatot alkotnak, azt kapjuk, hogy egy geometriai eloszlás $M$-szeres önmagával való konvolúciója — vagyis egy *negatív binomiális eloszlás* — egycsúcsú.

2. Mivel egy binomiális eloszlás, ill. egy geometriai eloszlás tagjai kétszeresen pozitív sorozatot képeznek, konvolúciójuk tagjai is, vagyis *binomiális és geometriai eloszlás konvolúciója* egycsúcsú.

13. TÉTEL. *Ha a* $\{p_n^{(j)}\}$ $(n=0, 1, \ldots;\ j=1, 2, \ldots)$ *diszkrét eloszlások tagjai kétszeresen pozitív sorozatot alkotnak — vagyis az eloszlások egycsúcsúak — és a*

$$\{p_n^{(1)}\} * \{p_n^{(2)}\} * \cdots * \{p_n^{(M)}\}$$

*konvolúció tart valamilyen eloszláshoz, ha* $M \to \infty$, *akkor ez a határeloszlás is egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1968), (1971b), (1971c), (1971d)*).

PÉLDA. Legyen $\{p_n^{(1)}\}$ *Poisson*-eloszlás, $\{p_n^{(j)}\}$ $(n=0, 1, \ldots;\ j=2, 3 \ldots)$ binomiális eloszlás és geometriai eloszlás konvolúciója. Generátorfüggvényekre térve át, a tételből következik, hogy ha egy $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ diszkrét eloszlás generátorfüggvénye

$$\pi(z) = Ce^{c_1 z} \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty} (1+\alpha_\nu z)}{\prod_{\nu=1}^{\infty} (1-\beta_\nu z)} \qquad (|z| \leq 1)$$

($C$ normáló konstans, $c_1 > 0$, $\alpha_\nu$, $\beta_\nu > 0$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu) < \infty$), akkor $\{p_n\}$ egycsúcsú.

$\pi(z)$ azon $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsorok általános alakja is, melyek $a_n$ együtthatói ún. *totálpozitív sorozatot* alkotnak — vagyis az

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

matrix tetszőleges rendű minorja nemnegatív; az ilyen sorozatok a totálpozitív függvények (l. II. 1. §.) analogonjai (SCHOENBERG *(1948)*). A totálpozitív sorozatoknak ma már nagy irodalma van (AISSEN, SCHOENBERG, WHITNEY *(1952)*; EDREI *(1952)*, *(1953a)* *(1953b)*; SCHOENBERG *(1953)*, *(1955)*; lásd még KARLIN *(1968)*). — $\pi(z)$ egy speciális esete már jóval korábban ismert volt (LIPKA *(1938)*).

Ha a fenti matrixnak csupán az 1. és 2. rendű minorjai nemnegatívok, az $a_n$ együtthatők sorozata kétszeresen pozitív lesz (FEKETE, PÓLYA *(1912)*; SCHOENBERG *(1955)*). Bár egy totálpozitív sorozat kétszeresen pozitív is, vagyis konstans faktortól eltekintve egy egycsúcsú eloszlás tagjait szolgáltatja — itt tulajdonképp nincs szükség a rájuk vonatkozó tételekre. Sajnos, azon *hatványsoroknak, melyek együtthatói kétszeresen pozitív sorozatot alkotnak, nem ismerjük oly általános alakját, mint a totálpozitív sorozatot képviselő együtthatójú hatványsoroknak* (SCHOENBERG *(1955)*). Ha ilyent ismernénk, megkapnánk általa az egycsúcsú eloszlások egy nagy osztályára a generátorfüggvény általános alakját.

$\pi(z)$ alakjából látható, hogy egy totálpozitív sorozat által megadott — és így egycsúcsú — eloszlások konvolúciója is ugyanilyen; ez a totálpozitív sorozatok általános elméletéből is következik (SCHOENBERG *(1948)*).

Diszkrét eloszlások egycsúcsúságára újabb elégséges feltételeket kaphatunk azon régóta tanulmányozott összefüggések alapján, melyek egy polinom vagy egy hatványsor együtthatóinak a sorozatában fellépő előjelváltozások száma és a polinom — vagy hatványsor — zérushelyeinek tulajdonságai közt fennállnak. *Míg azonban a korábbi vizsgálatokban az együttható-sorozat jelváltásainak számából következtettek a zérushelyek tulajdonságaira, itt „ellenkező irányban" használjuk fel ezeket az összefüggéseket, főleg azokat, melyek a jelváltás-szám és a zérushely-szám egyenlőségét mondják ki* (ilyen tételek a 14., 16. tétellel kapcsolatban a *Descartes*-féle előjelszabály speciális esetei (LIPKA *(1938)*, *(1942)*) vagy e tétel: ha a valós együtthatós $P(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N (a_0,\ a_N \neq 0)$ polinom zérushelyei a $\pi - \frac{\pi}{k+1} \leqq \arg z \leqq \pi + \frac{\pi}{k+1}$ szektorban vannak, akkor az $\{a_0, a_1, \dots, a_N\}$ sorozat $k$-szorosan pozitív (SCHOENBERG *(1954)*; l. még KARLIN (1968) p. 415)). — Emlékeztetünk arra, hogy egy eloszlást akkor értelmezünk egycsúcsúnak, amikor tagjai első differenciáinak sorozatában egyetlen előjelváltás van.

Közlünk néhányat az említett összefüggésekre felépíthető tételek közül.

14. TÉTEL. *Ha egy* $\{p_0, p_1, \dots, p_n, \dots, p_N\}$ $(p_n > 0\ (n = 0, 1, \dots, N))$ *diszkrét eloszlás generátorfüggvénye értelmezhető bármely z-re és csak valós gyökei vannak, akkor ez az eloszlás egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1968)*, *(1971b)*, *(1971c)*, *(1971d)*).

PÉLDA. Minthogy egy binomiális eloszlás

$$P(z) = (pz+q)^N \quad (|z|\leqq 1;\ p, q>0, p+q = 1,\ N=1, 2, \ldots)$$

generátorfüggvényének csak valós gyökei vannak, a tétel révén is megkapjuk, hogy az eloszlás egycsúcsú.

15. TÉTEL. *Ha egy* $\{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots, p_N\}$ $(p_0, p_N>0)$ *diszkrét eloszlás generátorfüggvénye értelmezhető bármely z-re és egyetlen konjugált komplex* $\xi \pm i\eta$ *gyökpárja van, többi gyökei pedig valósak, továbbá, ha* $\xi < -2$, *akkor ez az eloszlás egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1968), (1971b), (1971c), (1971d)*).

PÉLDA. A $\{45/52, 6/52, 1/52\}$ eloszlás nyilvánvaló egycsúcsúságát egyetlen korábbi tétellel sem tudjuk megállapítani (pl. tagjai nem alkotnak kétszeresen pozitív sorozatot). Generátorfüggvényének, a $P(z) = \frac{1}{52}(45+6z+z^2)$ függvénynek, gyökei $-3\pm 6i$, valós gyöke nincs, amiből a tétel alapján már következik az eloszlás egycsúcsúsága.

16. TÉTEL. *Ha egy* $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \ldots; p_0>0)$ *diszkrét eloszlás* $P(z)$ *generátorfüggvénye*

$$P(z) = \frac{e^{\alpha z}}{P(1)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right) \quad (|z|\leqq 1)$$

*alakú, értelmezhető bármely z-re és ekkor az* $\alpha_\nu$ *gyökök közt M komplex van, pozitív pedig nincs, továbbá, ha a komplex gyökök egy oly r sugarú,* $(-d, 0)$ *középpontú körben fekszenek, melyre fennáll* $d>r\sqrt{M+1}$, *akkor ez az eloszlás egycsúcsú* (MEDGYESSYY *(1969), (1971b), (1971c), (1971d)*).

A következő tétel egy momentumokra vonatkozó eredményen alapul (FEJÉR *(1914)*).

17. TÉTEL. *Legyen* $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ *egy diszkrét eloszlás, melynek generátorfüggvénye* $\Pi(z)$. *Ha* $\Pi(-s)(1+s)$ *értelmezhető bármely* $s>0$*-ra, és valamilyen* $f(x)$ $(x\geqq 0, f(0)\geqq 0)$ *folytonos függvény Laplace-transzformáltja és* $f(x)$ *összes momentumai léteznek, továbbá, ha* $f(x)$*-nek egyetlen zérushelye van* $(0, \infty)$*-ben, akkor ez az eloszlás egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1968), (1971b), (1971c), (1971d)*).

PÉLDA. Tekintsük az $\{(n+1)(1-p)^2 p^n\}$ $(n=0, 1, \ldots; 0<p<1)$ negatív binomiális eloszlást. Itt

$$\Pi(z) = \left(\frac{1-p}{1-pz}\right)^2 \quad \text{és} \quad \Pi(-s)(1+s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx,$$

ahol

$$f(x) = \left(\frac{1-p}{p}\right) e^{-\frac{x}{p}} \left[\left(\frac{1-p}{p}\right) - x\right].$$

E függvénynek egyetlen zérushelye van. Mivel a tétel egyéb feltételei is teljesülnek, ezúton is megkapjuk, hogy a vizsgált eloszlás egycsúcsú.

Olykor annak alapján is eldönthető egy diszkrét eloszlás egycsúcsúsága, hogy generátorfüggvénye eleget tesz bizonyos differenciálegyenletnek. Ilyen kritériumot szolgáltat a

18. TÉTEL. *Ha egy* $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \ldots; p_0\neq 0)$ *diszkrét eloszlás generátorfüggvénye,* $g(z)$, *eleget tesz a*

$$\sum_{\nu=0}^{M}(A_\nu z^\nu + B_\nu z^{\nu+1})g^{(\nu)}(z) = 0 \quad (0<|z|\leqq 1)$$

*differenciálegyenletnek, ahol* $M>0$ *és* $A_\nu$, $B_\nu$ *konstansok, emellett*

$$\sum_{\nu=0}^{M} A_\nu \binom{n+1}{\nu}\nu! \neq 0 \qquad ha \quad n=0, 1, \ldots$$

*és*

$$\sum_{\nu=0}^{M} B_\nu \binom{n}{\nu}\nu! \neq 0 \quad ha \quad n=0, 1, \ldots, N \quad (N\leqq +\infty)$$

*és a*

$$-\left(\sum_{\nu=0}^{M} B_\nu \binom{n}{\nu}\nu! \Big/ \sum_{\nu=0}^{M} A_\nu \binom{n+1}{\nu}\nu!\right)-1 \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

*mennyiségek sorozatában legfeljebb egy előjelváltás van, akkor* $\{p_n\}$ *egycsúcsú* (MEDGYESSY *(1971d)*).

*Bizonyítás.* A $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ sort a differenciálegyenletbe beírva és együtthatókat összehasonlítva azt kapjuk, hogy $p_{n+1}=\Phi(n)\,p_n$ $(n=0, 1, \ldots)$, ahol

$$\Phi(n) = -\sum_{\nu=0}^{M} B_\nu \binom{n}{\nu}\nu! \Big/ \sum_{\nu=0}^{M} A_\nu \binom{n+1}{\nu}\nu!\,.$$

A feltételekből következik, hogy $p_n\neq 0$, ha $n=0, 1, \ldots, N (N\leqq +\infty)$. Így tehát a $p_{n+1}-p_n = [\Phi(n)-1]p_n$ mennyiségek sorozatában ugyanannyi előjelváltás van, mint a $\Phi(n)-1$ mennyiségek sorozatában, vagyis legfeljebb egy, a $p_0, p_1-p_0, p_2-p_1, \ldots, p_{n+1}-p_n, \ldots$ sorozatban pedig nyilván éppen egy. Az 1. definíció folytán ebből már következik $\{p_n\}$ egycsúcsúsága.

A csúcs helye az előbbiek alapján rögtön megadható. — Ha $M=1$, a $\Phi(n)-1$ mennyiségek sorozatában automatikusan legfeljebb egy előjelváltás lesz.

Említést érdemelnek a következő, eloszlásfüggvényekkel kapcsolatosakkal bizonyos analógiát mutató

PROBLÉMÁK. 1. Mikor lesz (0) egycsúcsú diszkrét eloszlások konvolúciója ugyanilyen?

2. Igaz-e az a sejtés, hogy egy kétszeresen pozitív sorozatot képező tagokból álló — és így egycsúcsú — diszkrét eloszlás és egy másik egycsúcsú diszkrét eloszlás konvolúciója egycsúcsú? (Ha a második tagjai is kétszeresen pozitív sorozatot alkotnak, igaz a sejtés. Úgy sejtjük, hogy a „kétszeresen pozitív" fogalom a megfelelője az 1. §-ban eloszlásfüggvényekkel kapcsolatban bevezetett „erősen egycsúcsú" fogalomnak. (*Levonat-olvasáskor:* Ezt a sejtést igazolták (KEILSON, GERBER *(1971)*).)

3. Ismeretes, hogy egy korlátlanul osztható diszkrét eloszlás generátorfüggvénye $g(z)=e^{\lambda[f(z)-1]}$ $(\lambda>0)$ alakú, ahol $f(z)$ egy generátorfüggvény (FELLER *(1957)*, p. 271.). Milyen legyen $f(z)$, hogy $g(z)$ egycsúcsú eloszlás generátorfüggvénye legyen? (Sejtés: ha $f(z)$ együtthatói kétszeresen pozitív sorozatot alkotnak, a megoldás $f(z)=z$).

4. Egy egycsúcsú és egy nem-egycsúcsú diszkrét eloszlás konvolúciója mikor lesz egycsúcsú?

5. Egycsúcsú diszkrét eloszlások keveréke mikor lesz egycsúcsú?

6. Melyek azok az egycsúcsú diszkrét eloszláscsaládok, melyek bármely két tagjának konvolúciója — mely ugyanazon családba is tartozhat — ismét egycsúcsú? (Ez felveti a *stabilis eloszlásfüggvények diszkrét analogonjai* kérdését is.)

7. RÉNYI ALFRÉD egy sejtése: Ha $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ diszkrét eloszlás, akkor található olyan $n_0$ küszöbszám, hogy $n>n_0$ esetén $\{p_n\}^{*n}$ már egycsúcsú eloszlás lesz. — E sejtés hátterében az áll, hogy egyforma eloszlású, független diszkrét sztochasztikus változók alkalmasan normált összegének határsűrűségfüggvénye normális, tehát egycsúcsú (GNEDENKO *(1954)*, p. 252).

8. Lehet-e eloszlásfüggvényeket alkalmas módon *„diszkrétizálni”* és ekkor a diszkrét eloszlásokra szóló tételek felhasználásával vizsgálni egycsúcsúságukat?

## 3. §. Sűrűségfüggvények és diszkrét eloszlások szuperpozícióval kapcsolatos identifikációs kérdések

Egy szuperpozíció felbontásáról csak akkor beszélhetünk, ha a szuperpozíció csakis akkor azonos egy másikkal, ha az első paraméterei sorra azonosak a másik paramétereivel (*=identifikálhatóság:* TEICHER *(1960)*). Adott szuperpozíció esetén tehát el kell dönteni, identifikálható-e.

Mivel konstans faktortól eltekintve egy szuperpozíció egy ún. *véges keverék* (TEICHER *(1963)*), itt felhasználhatjuk az ilyen keverékek identifikálhatóságával kapcsolatos eredményeket (TEICHER *(1960)*, *(1961)*, *(1963)*; YAKOWITZ, SPRAGINS *(1968)*; BARNDORFF—NIELSEN *(1965)*; TALLIS *(1969)*). Ezek kimondják, hogy 1. *stabilis sűrűségfüggvények;* 2. *Gamma-sűrűségfüggvények;* 3. $f(x)=\dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}\,(\pi x/2)}$ *típusú ún.* ch-*sűrűségfüggvények:* 4. *negatív binomiális eloszlások:* 5. $\left\{\sum_{k=1}^{N} p_k \binom{\alpha_k}{n} \beta_k^n (1-\beta_k)^{\alpha_k-n}\right\}$ típusú $(n=0, 1, \ldots;$ az $\alpha_k$-k különböző egész számok; $\beta_k$ $(0<\beta_k<1)$ adott) *binomiális eloszlások* szuperpozíciói *identifikálhatók.*

Ezzel szemben $\left\{\sum_{k=1}^{N} p_k \binom{\alpha}{n} \beta_k^n (1-\beta_k)^{\alpha-n}\right\}$ típusú $(n=0, 1, \ldots, \alpha;$ $\alpha$ adott egész szám; $0<\beta_k<1$; a $\beta_k$-k különbözők) *binomiális eloszlások* szuperpozíciói *csak akkor identifikálhatók*, ha $\alpha \geqq 2N-1$.

A munkánkban vizsgált szuperpozíciókról eleve feltesszük, hogy identifikálhatók. A közölt példákra ez mindig igaz is.

### Kiegészítések és problémák II. 3. §-hoz

1. Identifikálhatósági kérdést — normális sűrűségfüggvények véges keverékei esetében — az említetteknél jóval korábban vizsgált már PEARSON *(1894)* és LONN *(1932)*.

2. Egyes felbontási módszerek alkalmazásakor automatikusan kiderül azokból az is, hogy a felbontandó szuperpozíció identifikálható (így pl. stabilis sűrűségfüggvények szuperpozíciói esetén (vö. TEICHER *(1963)*). Egyetemes bizonyítási módszer azonban nem nyerhető ebből.

3. Identifikálhatósági tételek bizonyítási technikáját, mely a szokásostól eltérőleg, folytonossági tulajdonságok kihasználásán alapul, jól szemlélteti — az I. § 11. tétele jelöléseivel — az

1. TÉTEL. *Ha* $s_A(x, B, c_k)$ $(c_k > 0)$ *stabilis sűrűségfüggvény, akkor a*

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k s_A(x-\gamma_k, B, c_k) \quad \big(p_k > 0;\ (\gamma_i, c_i) \neq (\gamma_j, c_j)\ (i \neq j);\ 0 < c_1 \leqq \cdots \leqq c_N\big)$$

*szuperpozíció identifikálható* (MEDGYESSY *(1962)*; TEICHER *(1963)*).

*Bizonyítás.* Azt kell igazolni, hogy $k(x)$ csak akkor azonos egy

$$\sum_{k=1}^{N'} p_k' s_A(x-\gamma_k', B, c_k') \quad \big(p_k' > 0;\ (\gamma_i', c_i') \neq (\gamma_j', c_j')\ (i \neq j);\ 0 < c_1' \leqq \cdots \leqq c_{N'}'\big)$$

szuperpozícióval, ha $N-N'$, $p_k = p_k'$, $(\gamma_i, c_i) \equiv (\gamma_i', c_i')$. Térjünk át karakterisztikus függvényekre. Mivel a stabilis eloszlásfüggvények akárhányszor deriválhatók (HINCSIN *(1938a)* p. 101; GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* p. 183.), ez kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés. Tegyük fel most az azonosságot; legyen

$$\sum_{k=1}^{N} p_k e^{i\gamma_k t} e^{-c_k|t|^A W(t)} \equiv \sum_{k=1}^{N'} p_k' e^{i\gamma_k' t} e^{-c_k'|t|^A W(t)}$$

$$\left( W(t) = 1 + iB \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, A), \quad \omega(t, A) = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{\pi A}{2} & (A \neq 1) \\ \dfrac{2}{\pi} \log|t| & (A = 1) \end{cases} \right).$$

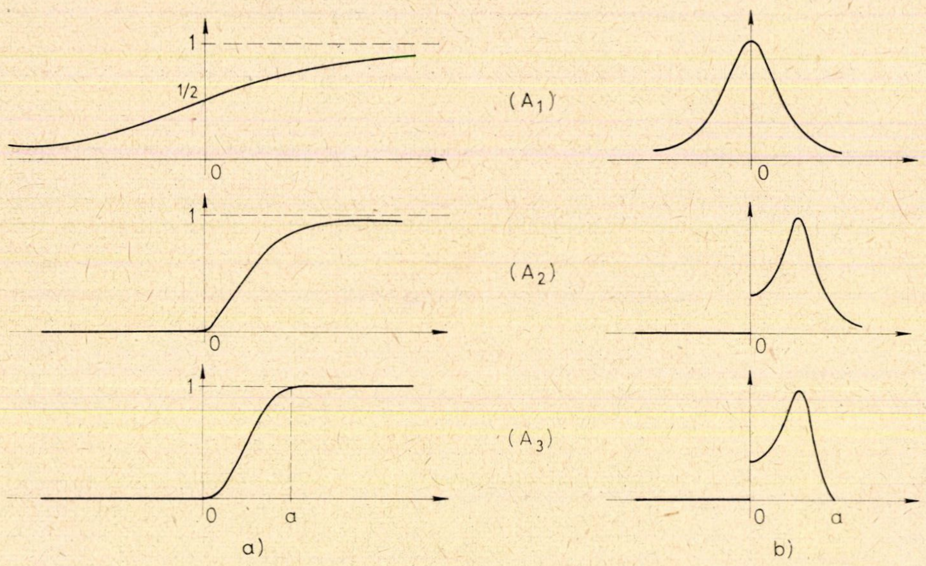
Rendezzük a karakterisztikus függvényeket; megállapodunk abban, hogy $e^{i\Gamma_1 t} e^{-C_1|t|^A W(t)}$ „megelőzi" az $e^{i\Gamma_2 t} e^{-C_2|t|^A W(t)}$ karakterisztikus függvényt ($\Gamma_1$, $\Gamma_2$ a $\gamma_i$, $\gamma_i'$, $C_1$, $C_2$ a $c_i$, $c_i'$ mennyiségek közül valók), ha $C_1 < C_2$, — vagy, ha $C_1 = C_2$, akkor $\Gamma_1 < \Gamma_2$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető az is, hogy ha $\nu < \mu$, akkor $e^{i\gamma_\nu t} e^{-c_\nu|t|^A W(t)}$ megelőzi az $e^{i\gamma_\mu t} e^{-c_\mu|t|^A W(t)}$ függvényt és hasonlóan a vesszős paraméterek esetében, továbbá, hogy $e^{i\gamma_1 t} e^{-c_1|t|^A W(t)}$ megelőzi az $e^{i\gamma_1' t}\, e^{-c_1'|t|^A W(t)}$ függvényt, hogyha nem azonosak. Következésképp $e^{i\gamma_1 t} e^{-c_1|t|^A W(t)}$ megelőzi az $e^{i\gamma_\nu' t}\, e^{-c_\nu'|t|^A W(t)}$ függvényt $(1 \leqq \nu' \leqq N')$. A karakterisztikus függvények közti azonosságot az $e^{i\gamma_1 t}\, e^{-c_1|t|^A W(t)}$ függvénnyel osztva — amikor a $p_1$ tag is fellép — és eloszlásfüggvényekre térve át, azt kapjuk, hogy szakadásos függvény(ek) és folytonos függvény(ek) összege egy folytonos függvénnyel lesz azonos. Mivel $p_1 > 0$, ez az ellentmondás csak úgy oldható fel, hogy $e^{i\gamma_1 t}\, e^{-c_1|t|^A W(t)} \equiv e^{i\gamma_1' t}\, e^{-c_1'|t|^A W(A)}$, azaz $\gamma_1 = \gamma_1'$, $c_1 = c_1'$ és $p_1 = p_1'$. Az ebből adódó egyszerűsítések után az egész eljárást értelemszerűen megismételve, azt kapjuk, hogy $p_k = p_k'$, $\gamma_k = \gamma_k'$, $c_k = c_k'$, ha $1 \leqq k \leqq \min(N, N')$. Ha $N \neq N'$, mikor is feltehető, hogy $N > N'$, ebből — azonos tagokat törölve — az következik, hogy $\sum_{k=N'+1}^{N} p_k\, s_A(x-\gamma_k, B, c_k) \equiv 0$, vagyis $p_k = 0$, ha

$N'+1 \leqq k \leqq N$, ami csak akkor nem ellentmondás, ha $N=N'$; ezekből a tétel állítása már következik.

A módszer kínálkozó általánosítását megadja TEICHER *(1963)*, karakterisztikus függvény és folytonossági meggondolások — előbb is szereplő — felhasználása (MEDGYESSY *(1962)*) helyett más transzformációval, ill. a transzformáltak végtelenben való viselkedését használva fel. — A különböző eszközök nyilván további kombinációkban is alkalmazhatók.

## 4. §. Sűrűségfüggvény-görbék alakjának jellemzése

Vizsgálatainkban alapvető szerepe van sűrűségfüggvény-görbék „keskenységének". Pontossá kell tennünk tehát ezt az intuitív fogalmat; ehhez felhasználjuk egy korábbi munkánkat is (MEDGYESSY *(1964)*).




*6. ábra*

Egy sűrűségfüggvény-görbe „keskenységét" a hozzá tartozó eloszlásfüggvény segítségével értelmezhetjük a legkönnyebben.

Munkánkban elegendő lesz a következő eloszlás-, illetve sűrűségfüggvény-típusokból eltolással nyert eloszlás-, illetve sűrűségfüggvényekre szorítkozni (l. a 6. ábrát). (Eltoláson mindenütt 0-eltolás (=egy helyben hagyás) *is* érthető.)

($A_1$) eloszlásfüggvény: egy monoton növekedő, differenciálható, (0) szimmetrikus eloszlásfüggvény. Ha egycsúcsú, csúcshelye egybeesik szimmetriapontjával.

($A_1$) sűrűségfüggvény: egy sűrűségfüggvény, melyhez ($A_1$) eloszlásfüggvény tartozik (vagyis amely (0) szimmetrikus és ha egycsúcsú, csúcshelye egybeesik szimmetriapontjával).

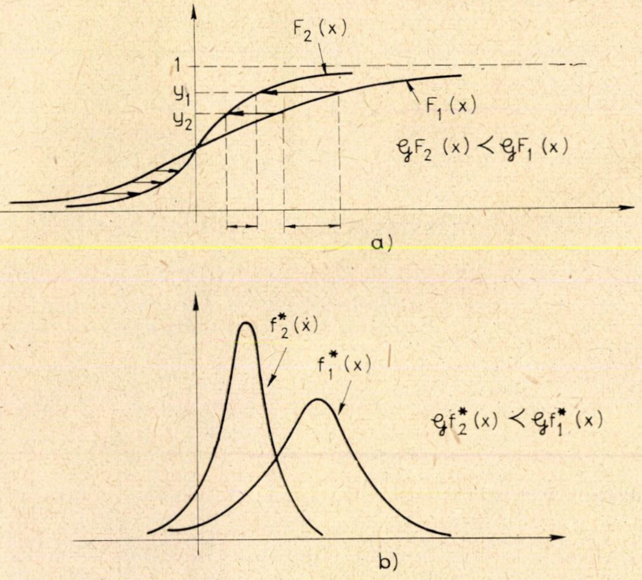
($A_2$) eloszlásfüggvény: egy eloszlásfüggvény, mely a $(-\infty, 0]$ szakaszon azonosan zérus, egyébként monoton növekedő, differenciálható, és a 0 pontban jobboldali határértéke 0.

($A_2$) sűrűségfüggvény: egy sűrűségfüggvény, melyhez ($A_2$) eloszlásfüggvény tartozik (vagyis amely a $(-\infty, 0]$ szakaszon azonosan zérus).

($A_3$) eloszlásfüggvény: ugyanaz, mint az ($A_2$) eloszlásfüggvény, azzal a különbséggel, hogy értéke nem a végtelenben, hanem valamilyen $A$ ($A>0$) ponttól kezdve 1.

($A_3$) sűrűségfüggvény: ugyanaz, mint az ($A_2$) sűrűségfüggvény, azzal a különbséggel, hogy az $(A, \infty)$ szakaszon is azonosan zérus.

1. DEFINÍCIÓ. Legyen $F_1(x)$, ill. $F_2(x)$ ($A_1$) vagy ($A_2$) eloszlásfüggvény. Azt mondjuk, hogy $F_2(x)$ görbéje keskenyebb, mint $F_1(x)$ görbéje, ha $F_2(x)$ görbéje $F_1(x)$ görbéjéből olyan, $x$-tengely menti, az origó felé irányuló összenyomással származtatható, melynél $F_2(x)$ görbéjének bármely két, $y_1$ és $y_2$ ordinátájú pontja




*7. ábra*

abszcisszáinak távolsága kisebb, mint $F_1(x)$ görbéje ugyanazon $y_1$ és $y_2$ ordinátájú pontjai abszcisszáinak távolsága. (L. a 7a ábrát.) — E „keskenyebb" viszonylatot így jelöljük: $\mathcal{G}F_2(x) \prec \mathcal{G}F_1(x)$ (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

A $\prec$ reláció tranzitív.

$F_2(x)$, ill. $F_1(x)$-ből eltolással származtatott $F_2^*(x)$, ill. $F_1^*(x)$ eloszlásfüggvények görbéiről azt mondjuk, hogy ugyanolyan keskenységi viszonylat áll fenn köztük, mint az előbb leírt; ennek jelölése szintén $\mathcal{G}F_2^*(x) \prec \mathcal{G}F_1^*(x)$.

A jövőben ilyen eloszlásfüggvényeket mindig a fenti ($A_1$) vagy ($A_2$) eloszlásfüggvényekre — eltolással — visszavezetve vizsgálunk.

Eltolással egymásba átvihető görbéket egyenlően keskenyeknek tekintünk. Belátható, hogy $\mathcal{G}F_2(x) \prec \mathcal{G}F_1(x)$ a következőkkel ekvivalens:

A) $F_1^{-1}(y)-F_2^{-1}(y)$ monoton növekedő függvény, melynek értéke az $y=0$ pontban 0 (MEDGYESSY *(1964)*).

B) $F_2(x)=F_1(\varphi(x))$, ahol $\varphi(x)$ $(-\infty, \infty)$-en van értelmezve, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(x)$ létezik és $\varphi'(x)>1$, vagyis $\varphi(x)$ monoton növekedő függvény (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

C) Az $F(x) = F_1(x+a)-F_2(x)$ függvénynek — melyben $(A_1)$ eloszlásfüggvények esetén $-\infty<a<\infty$, $(A_2)$ eloszlásfüggvények esetén $a>0$ — bármely $a$ mellett egyetlen előjelváltása van. Ha ez az $x=x_a$ pontban van, $F(x)<0$, ha $x>x_a$ (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

Igaz ezenfelül, hogy $\mathcal{G}F_2(x)\prec\mathcal{G}F_1(x)$ esetén $F_2(x)$ görbéje $F_1(x)$ görbéje felett halad, ha $x>x_a$ — és alatta, ha $x<x_a$; továbbá, hogy $\max F_2'(x)>\max F_1'(x)$. Az eloszlásfüggvények eltolása mindezen lényegileg nem változtat.

Fontos eredmény még az

1. TÉTEL. *Ha $F_1(x)$, $F_2(x)$ $(A_1)$ eloszlásfüggvények, melyek várható értéke létezik és $\mathcal{G}F_2(x)\prec\mathcal{G}F_1(x)$, továbbá, ha $p(x)$ (0) szimmetrikus, Pólya-féle sűrűségfüggvény, melyre fennáll, hogy tetszőleges $\omega>0$, $\xi>0$ mellett $\int_{-\infty}^{-\xi} p(x)\,dx<\omega p(-\xi)$, ha $\xi$ nagyobb egy $\xi_\omega$ küszöbszámnál — akkor*

$$\mathcal{G}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} p(y-x)F_2(x)\,dx\Big] \prec \mathcal{G}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} p(y-x)F_1(x)\,dx\Big]$$

*— vagyis az ezen konvolúciós transzformációval $F_2(x)$-ből kapott eloszlásfüggvény görbéje is keskenyebb, mint az $F_1(x)$-ből kapott eloszlásfüggvény görbéje* (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

A tétel sűrűségfüggvényekre értelemszerűen átfogalmazható.

Mindezek bizonyítása a *Kiegészítések és problémák II. 4. §-hoz* szakaszban található.

2. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy egy $f_2^*(x)$ $(A_1)$ vagy $(A_2)$ sűrűségfüggvényből eltolással származtatott sűrűségfüggvény görbéje keskenyebb, mint egy hasonló típusú $f_1^*(x)$ sűrűségfüggvény görbéje, ha a megfelelő eloszlásfüggvények görbéi közül az első keskenyebb, mint a második. E viszonylatot így jelöljük: $\mathcal{G}f_2^*(x)\prec\mathcal{G}f_1^*(x)$ (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

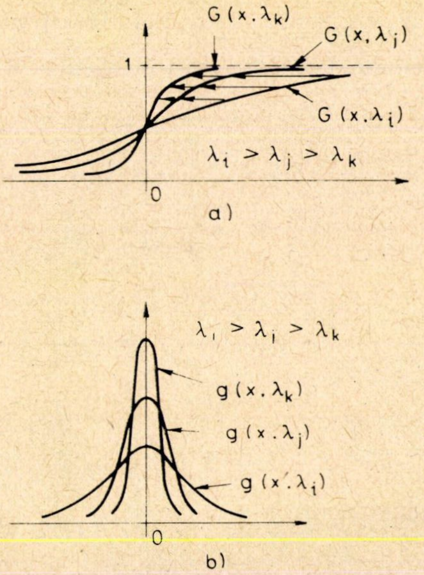
Szemléletes tartalma nyilvánvaló (l. a 7b ábrát).

A fenti, eloszlásfüggvényekre szóló állítások sűrűségfüggvényekre való kiterjesztése — a hozzájuk tartozó eloszlásfüggvényeken keresztül — gépiesen elvégezhető.

A következőkben $(A_1)$ vagy $(A_2)$ eloszlás-, ill. sűrűségfüggvények valamely $\{G(x, \lambda)\}$, ill. $\{g(x, \lambda)\}$ $(\Lambda_1\leqq\lambda\leqq\Lambda_2)$ egyparaméteres családja tagjai görbéire vezetünk be keskenységi összehasonlításokat. — Elegendő $x>0$-ra végezni el ezeket.

3. DEFINÍCIÓ. Ha $\lambda_i$, $\lambda_j$ a $\lambda$ paraméter két különböző értéke $(\Lambda_1<\lambda_i<\lambda_j<\Lambda_2)$ és $\mathcal{G}G(x, \lambda_i)\prec\mathcal{G}G(x, \lambda_j)$, azt mondjuk, hogy $\lambda$ $G(x, \lambda)$ görbéjének $(\Lambda_2, \Lambda_1)$ monoton formánsa; ha pedig $\mathcal{G}G(x, \lambda_j)\prec\mathcal{G}G(x, \lambda_i)$, azt mondjuk, hogy $\lambda$ $G(x, \lambda)$ görbéjének $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ monoton formánsa (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

$(\Lambda_2, \Lambda_1)$, ill. $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ monoton változása irányára utal. — A monoton formáns szemléletes jelentése világos: ahogy $\lambda$ monoton változik, a megfelelő görbe egyre keskenyebb lesz; a keskenységet egyetlen szám jellemzi (l. a 8a ábrát).




*8. ábra*

A fenti értelmezéseket megtartva, a rövidség kedvéért sokszor csak azt mondjuk: „$\lambda$ $G(x, \lambda)$ monoton formánsa" és í. t.

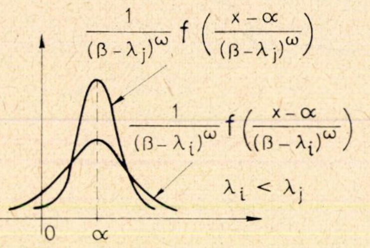
4. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $g(x, \lambda)$ $(\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2)$ $(A_1)$ vagy $(A_2)$ sűrűségfüggvény görbéjének $\lambda$ $(\Lambda_2, \Lambda_1)$, ill. $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ monoton formánsa, ha $\lambda$ $(\Lambda_2, \Lambda_1)$, ill. $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ monoton formánsa a $g(x, \lambda)$-hoz tartozó $(A_1)$, ill. $(A_2)$ eloszlásfüggvénynek (Medgyessy *(1971c), (1971d))*.

Ennek szemléletes jelentése nyilvánvaló (l. a 8b ábrát).

A fentebb a $\mathcal{G}F_2(x) \prec \mathcal{G}F_1(x)$ viszonylattal ekvivalens megállapítások a monoton formáns értelmezésébe is átvihetők. Így pl. mondhatjuk azt is, hogy $\lambda$ egy $G(x, \lambda)$ $(A_1)$ eloszlásfüggvénynek $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ monoton formánsa, ha a $H(x) = G(x+a, \lambda_i) - G(x, \lambda_j)$ függvénynek $(\Lambda_1 < \lambda_i < \lambda_j < \Lambda_2)$ bármely $a$ mellett egyetlen előjelváltása van, valamilyen $x = x_a$ pontban és $x > x_a$ esetén $H(x) < 0$ — és így tovább.

Példák. 1. *Skálaparaméter változtatásával kapott eloszlás (sűrűség)függvények.* Legyen $G(x, \lambda) = F\left(\frac{x}{\lambda^\omega}\right)$ $(0 < \lambda \leqq \Lambda_2,\ \omega > 0)$, ahol $F(x)$ $(A_1)$ vagy $(A_2)$ eloszlásfüggvény. Mivel a $\lambda$ skálaparaméter csökkentése az 1. definícióbeli összenyomást képviseli, $\mathcal{G}G(x, \lambda_j) \prec \mathcal{G}G(x, \lambda_i)$, ha $\Lambda_2 > \lambda_i > \lambda_j > 0$ vagyis $\lambda$ $(\Lambda_2, 0)$ monoton formánsa $F\left(\frac{x}{\lambda^\omega}\right)$ görbéjének. — Nyilván $(\Lambda_2, 0)$ monoton formánsa $\lambda$ $F\left(\frac{x-\alpha}{\lambda^\omega}\right)$ görbéjének is ($\alpha$ tetszőleges).

Ha $f(x)$ egy ($A_1$) vagy ($A_2$) sűrűségfüggvény, $\lambda$ $(\Lambda_2, 0)$ monoton formánsa — értelmezés szerint — egy $\frac{1}{\lambda^\omega} f\left(\frac{x}{\lambda^\omega}\right)$ sűrűségfüggvénynek $(0<\lambda\leqq\Lambda_2,\ \omega>0)$. Nyilvánvaló, hogy az $\frac{1}{(\beta-\lambda)^\omega} f\left(\frac{x-\alpha}{(\beta-\lambda)^\omega}\right)$ sűrűségfüggvénynek, ahol $0<\lambda<\beta$ ($\beta$, $\alpha$ adott) $\lambda$ $(0, \beta)$ monoton formánsa (l. a 9. ábrát).




*9. ábra*

2. *Különböző rendű Gamma-eloszlás (sűrűség) függvények.* Legyen

$$G(x,\lambda)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \frac{B^\lambda y^{\lambda-1}e^{-By}}{\Gamma(\lambda)}\,dy & (x>0)\quad (1\leqq\lambda\leqq\Lambda_2,\ B>0).\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}$$

$\lambda$ $(\Lambda_2, 1)$ monoton formánsa $G(x,\lambda)$ görbéjének, mert ha $\Lambda_2\geqq\lambda_i>\lambda_j>1$, a $H(x) = G(x+a,\lambda_i)-G(x,\lambda_j)$ ($a>0$, tetszőleges) függvénynek egyetlen előjelváltása van (vö. VAN ZWET *(1954a)* pp. 60—61); továbbá, $G(x+a,\lambda_i)$ és $G(x,\lambda_j)$ görbéi az előírt módon helyezkednek el egymáshoz képest, azaz $\mathcal{G}G(x,\lambda_j)\prec\mathcal{G}G(x,\lambda_i)$. — $\lambda$ nyilván $(\Lambda_2, 1)$ monoton formánsa a

$$g(x,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{B^\lambda x^{\lambda-1}e^{-Bx}}{\Gamma(\lambda)} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}$$

sűrűségfüggvénynek is.

3. *A* $\Phi(t)=\dfrac{\operatorname{ch}\alpha t}{\operatorname{ch}\beta t}$ $(0\leqq\lambda<\beta)$ *karakterisztikus függvényű eloszlásfüggvények.* A II. 8. §-ban megmutatjuk, hogy $\Phi(t)$ valóban karakterisztikus függvény. Könnyen igazolható, hogy a hozzá tartozó eloszlásfüggvény,

$$G(x,\lambda)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\beta}\,\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{2\beta}\cdot\cos\frac{\pi\lambda}{2\beta}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{\beta}+\cos\frac{\pi\lambda}{\beta}}\,dy=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2\beta}}{\cos\frac{\pi\lambda}{2\beta}}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$$

($A_1$) eloszlásfüggvény. — $\lambda$ $G(x,\lambda)$ görbéjének $(0,\beta)$ monoton formánsa lesz, ha $0<\lambda_i<\lambda_j<\beta$ esetén a

$$H(x) = G(x+a,\, \lambda_i) - G(x,\, \lambda_j) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(x+a)}{2\beta}}{\cos\frac{\pi\lambda_i}{2\beta}}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2\beta}}{\cos\frac{\pi\lambda_j}{2\beta}}\right)\right]$$

függvénynek egyetlen előjelváltása van. $H(x)$ előjelváltásainak száma azonban ugyanannyi, mint az

$$A(x) = \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(x+a)}{2\beta}}{\cos\frac{\pi\lambda_i}{2\beta}} - \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2\beta}}{\cos\frac{\pi\lambda_j}{2\beta}}$$

függvény előjelváltásainak a száma (vö. a *Kiegészítések és problémák* II. 4. §*-hoz* 3. C) gondolatmenetével), vagyis egy; továbbá, $G(x+a, \lambda_i)$ és $G(x, \lambda_j)$ görbéi az előírt módon helyezkednek el egymáshoz képest. Így tehát $\lambda$ $G(x, \lambda)$ $(0, \beta)$ monoton formánsa. $\lambda$ nyilván $(0, \beta)$ monoton formánsa a

$$g(x, \lambda) = \frac{1}{\beta}\, \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2\beta}\cdot\cos\frac{\pi\lambda}{2\beta}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{\beta}+\cos\frac{\pi\lambda}{\beta}}$$

$(A_1)$ sűrűségfüggvénynek is.

A fenti „keskenyebb" definíció a legtermészetesebb, általában azonban — analitikus okokból — nehezen alkalmazható. Kényelmesebbet keresünk tehát, melytől azt kívánjuk, hogy például $(A_3)$ eloszlásfüggvényekre vagy csak karakterisztikus függvényükkel definiált eloszlásfüggvényekre is alkalmazható legyen. — A $\mathcal{G}F_2(x) \prec \prec \mathcal{G}F_1(x)$ vonatkozás következményeiből kettőre építhető fel új definíció, immár *az egycsúcsúság bevonásával,* a következőképpen.

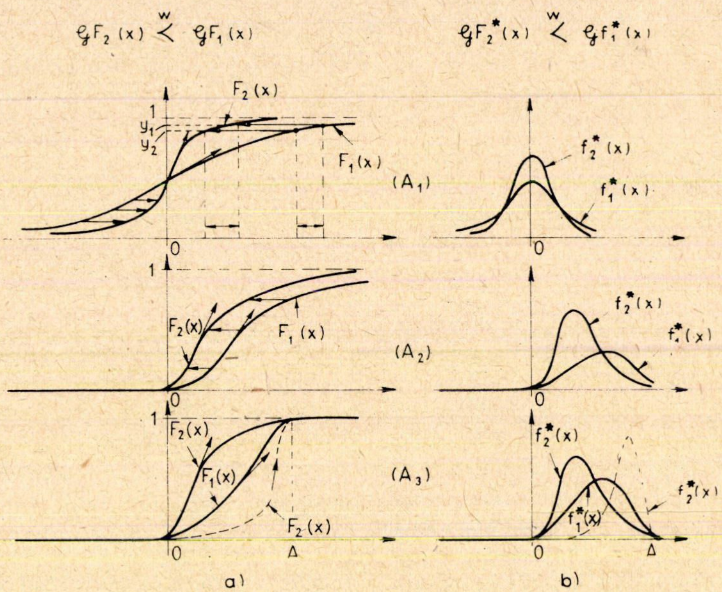
5. DEFINÍCIÓ. Legyen $F_1(x)$, ill. $F_2(x)$ szigorúan egycsúcsú $(A_1)$ vagy $(A_2)$ vagy $(A_3)$ eloszlásfüggvény. Azt mondjuk, hogy $F_2(x)$ görbéje tágabb értelemben keskenyebb, mint $F_1(x)$ görbéje, ha 1. $x>0$ esetén $F_2(x)$ görbéje $(A_1)$ vagy $(A_2)$ eloszlásfüggvények esetén $F_1(x)$ görbéje felett, $(A_3)$ eloszlásfüggvények esetén pedig vagy teljesen $F_1(x)$ görbéje felett, vagy teljesen ez alatt halad, mindenütt, ahol $F_1(x)\neq 0$ vagy $F_1(x)\neq 1$, — továbbá, 2. ha $F_2(x)$ differenciálhányadosának maximuma nagyobb, mint $F_1(x)$ differenciálhányadosának maximuma ((0) egycsúcsú $(A_1)$ vagy $(A_2)$ eloszlásfüggvény esetén 2. 1. következménye) (l. az 10a ábrát). — E „keskenyebbség" viszonylatot így jelöljük: $\mathcal{G}F_2(x) \overset{w}{\prec} \mathcal{G}F_1(x)$ (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

A $\overset{w}{\prec}$ reláció $(A_1)$ és $(A_2)$ eloszlásfüggvény esetében tranzitív.

$F_2(x)$, ill. $F_1(x)$-ből eltolással származtatott $F_2^*(x)$, ill. $F_1^*(x)$ eloszlásfüggvények görbéiről azt mondjuk, hogy ugyanolyan keskenységi viszonylat áll fenn közöttük, mint az előbb leírt; ennek jelölése szintén $\mathcal{G}F_2^*(x) \overset{w}{\prec} \mathcal{G}F_1^*(x)$.

A jövőben ilyen eloszlásfüggvényeket ezen új keskenységi viszonylat szempontjából mindig a fenti — ($A_1$) vagy ($A_2$) vagy ($A_3$) — eloszlásfüggvényekre — eltolással — visszavezetve vizsgálunk.

Eltolással egymásba átvihető görbéket egyenlően keskenyeknek tekintünk. Az itteni „keskenyebbség" viszonylat fennállásakor $F_2(x)$ görbéje $y_1$ és $y_2$ ordinátájú pontjainak abszcisszái nem okvetlenül vannak közelebb egymáshoz, mint $F_1(x)$ görbéje $y_1$ és $y_2$ ordinátájú pontjainak abszcisszái; csak az origóhoz vagy — ($A_3$) eloszlásfüggvény esetén — egy másik ponthoz lesznek mindenképpen köze-




*10. ábra*

lebb. A maximális deriváltérték növekedése a megfelelő sűrűségfüggvény csúcsmagassága növekedésével azonos; ez elég természetes jellemzője az elkeskenyedésnek.

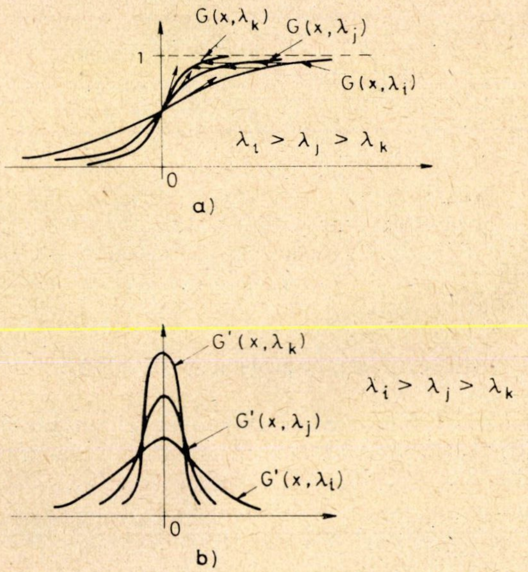
6. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy szigorúan egycsúcsú ($A_1$) vagy ($A_2$), vagy ($A_3$) sűrűségfüggvényből eltolással származtatott $f_2^*(x)$ sűrűségfüggvény görbéje tágabb értelemben keskenyebb, mint egy hasonló típusú $f_1^*(x)$ sűrűségfüggvény görbéje, ha a megfelelő eloszlásfüggvények görbéi közül az első tágabb értelemben keskenyebb, mint a második. E viszonylatot így jelöljük: $\mathcal{G}f_2^*(x) \overset{w}{\prec} \mathcal{G}f_1^*(x)$ (Medgyessy *(1971c), (1971d)*).

Szemléletes tartalma, figyelembe véve az előző bekezdést, nyilvánvaló (l. a 10b ábrát).

Világos, hogy a $\prec$ viszonylat fennállásakor $\overset{w}{\prec}$ is fennáll.

Sűrűségfüggvényekre szóló állításokat itt is a hozzájuk tartozó eloszlásfüggvényeken keresztül — gépiesen — fogalmazunk meg.

Szigorúan egycsúcsú ($A_1$) vagy ($A_2$) vagy ($A_3$) eloszlás-, ill. sűrűségfüggvények valamely $\{G(x, \lambda)\}$, ill. $\{g(x, \lambda)\}$ ($\Lambda_1 \leqq \lambda \leqq \Lambda_2$) egyparaméteres családja tagjai görbéire keskenységi összehasonlításokat itt ugyanúgy vezetünk be, mint a korábbi „keskenység” fogalom tárgyalásakor. Elég az ott mondottakban $\prec$ helyett $\overset{w}{\prec}$ jelet írni. Így tehát itt értelme lesz a monoton formáns, ill. a megkülönböztetés kedvéért: $(\Lambda_2, \Lambda_1)$ — vagy $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ — tágabb értelemben vett monoton formáns elnevezéseknek, az ott a monoton formánssal kapcsolatos megállapítások kiterjesztésének és í. t. — Pl. az, hogy a $G(x, \lambda)$ $(A_1)$ eloszlásfüggvénynek $\lambda$ $(\Lambda_2, \Lambda_1)$ tágabb értelemben vett monoton formánsa, azt jelenti, hogy ha $\Lambda_2 > \lambda_i > \lambda_j > \Lambda_1$, akkor $\mathcal{G}G(x, \lambda_j) \overset{w}{\prec} \mathcal{G}G(x, \lambda_i)$, vagyis $G(x, \lambda_j)$ görbéje $G(x, \lambda_i)$ görbéje felett halad, ha $x > 0$, és $G'(x, \lambda_j)$ csúcsmagassága nagyobb $G'(x, \lambda_i)$ csúcsmagasságánál. Hasonló




*11. ábra*

a helyzet egy $g(x, \lambda)$ $(A_1)$ sűrűségfüggvény tágabb értelemben vett monoton formánsa esetében és í. t. (l. a 11. ábrát).

Egy $G(x, \lambda)$ szigorúan egycsúcsú $(A_1)$ vagy $(A_2)$, vagy $(A_3)$ eloszlásfüggvény tágabb értelemben vett monoton formánsa megkeresésére szolgáló kritériumok sokkal egyszerűbbek, mint a korábbi monoton formánsra szólók. Szinte triviális például az

1. LEMMA. *Ha egy* $G(x, \lambda)$ $(\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2)$ *szigorúan egycsúcsú* $(A_1)$ *eloszlásfüggvény esetén* $\frac{\partial}{\partial \lambda} G(x, \lambda) < 0$, $(x > 0)$ *és* $G'(x, \lambda)$ *csúcsmagassága növekedik, ha* $\lambda$ *csökken, akkor* $\lambda$ $G(x, \lambda)$ *görbéjének* $(\Lambda_2, \Lambda_1)$ *tágabb értelemben monoton formánsa* (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

Ennek analogonjai triviálisak.

PÉLDÁK. 1. A korábbi példákban szereplő $\lambda$ monoton formáns nyilván tágabb értelemben monoton formáns is, ha szigorúan egycsúcsú eloszlásfüggvények szerepelnek.

2. *Az*

$$F(x,\beta)=\begin{cases}\int\limits_0^x \frac{y^{\beta-1}(1-y)^{c-\beta-1}}{B(\beta,c-\beta)}\,dy & (0\leqq y\leqq 1)\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}\qquad(0\leqq\beta\leqq 1/2)$$

*típusú Beta-eloszlásfüggvények* ($c-\beta>0$, $c$ adott) szigorúan egycsúcsú ($A_3$) eloszlásfüggvények. Egyszerű differenciálással igazolható, hogy $\beta$ $F(x,\beta)$ görbéjének $(1/2, 0)$ tágabb értelemben vett monoton formánsa. *A korábbi monoton formáns itt eleve értelmezhetetlen.*

3. Az

$$F(x,\beta,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi(\beta-\lambda)}\,\frac{1}{1+y^2/(\beta-\lambda)^2}+\frac{1}{\pi(\beta+\lambda)}\,\frac{1}{1+y^2/(\beta+\lambda)^2}\right]dy$$
$$(0<\lambda<\beta)$$

*eloszlásfüggvény* egy összenyomott és egy széthúzott *Cauchy*-eloszlásfüggvény szuperpozíciója és szigorúan egycsúcsú ($A_1$) eloszlásfüggvény. Elemi számításokkal megmutatható, hogy $\lambda$ $F(x,\beta,\lambda)$ görbéjének $(0,\beta)$ tágabb értelemben vett monoton formánsa, de *nem* $(0,\beta)$ *monoton formánsa a korábbi értelemben.*

## Kiegészítések és problémák II. 4. §-hoz

1. Eloszlás- ill. sűrűségfüggvénygörbék alakja jellemzésével foglalkozott még MEDGYESSY *(1967a)*, főleg abban az esetben, amidőn szórásnégyzet ill. várható érték nem létezik.

2. A „keskenyebb” fogalom *nem* ($A_1$) (vagy ($A_2$) vagy ($A_3$)) eloszlásfüggvények, ill. sűrűségfüggvények görbéjével kapcsolatban ugyanúgy értelmezhető, mint az 1., ill. 2. definícióban (vö.: MEDGYESSY *(1964)*).

3. *A* $\mathcal{G}F_2(x)\prec\mathcal{G}F_1(x)$ *relációval ekvivalens állítások bizonyításai.*

A) MEDGYESSY *(1964)* idézett cikkében van bizonyítva.

B) esetében az elégségesség így bizonyítható: $\varphi'(x)>1$, illetve $\varphi(x)$ monoton növekedő voltából következik, hogy $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)>x_2-x_1$, ha $x_2-x_1>0$. Legyen $x_2=F_2^{-1}(y_2)$, $x_1=F_2^{-1}(y_1)$, akkor $y_2>y_1$; ezt és az $F_2(x)=F_1(\varphi(x))$-ből következő $F_1^{-1}(x)=\varphi(F_2^{-1}(x))$ összefüggést felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$[F_1^{-1}(y_2)-F_2^{-1}(y_2)]-[F_1^{-1}(y_1)-F_2^{-1}(y_1)]>0$$

ami A) alapján állításunkkal ekvivalens. — A szükségesség bizonyítása hasonló.

Megjegyzendő, hogy ha $\varphi(x)$ *konvex* is a $(0,\infty)$ szakaszon, az ezzel képviselt transzformáció azonos a VAN ZWET *(1964a)*, *(1964b)* munkáiban bevezetettel. — E megszorításra azonban nincs szükségünk.

C) esetében az elégségesség bizonyításának egyik módja ($A_1$) eloszlásfüggvények esetén (vö. VAN ZWET *(1964a)*, pp. 60—61): A monotonitási viszonyok ($F_1^{-1}(x)$ *szigorúan monoton* stb.) folytán az $F_1^{-1}(F_1(x+a))-F_1^{-1}(F_2(x))$ függvénynek ugyanannyi előjelváltása van, mint $F_1(x+a)-F_2(x)$-nek, vagyis az $x+a-F_1^{-1}(F_2(x))=G(x)$

függvénynek egyetlen előjelváltása van. Mivel $F_1^{-1}[F_2(x)]=\varphi(x)$ páratlan függvény, ez csak úgy lehetséges, hogy vagy $\varphi'(x)>1$ vagy $\varphi'(x)<1$. Feltételeinkből az is következik, hogy elég nagy $x$-re, amidőn $F_1(x+a)-F_2(x)<0$, $x+a-\varphi(x)<0$, vagyis $\varphi'(x)>1$. Így tehát $\varphi'(x)>1$, amiből B) folytán állításunk már következik. — A szükségesség hasonlóan bizonyítható. — ($A_2$) eloszlásfüggvényeket az origó körül tükrözünk, majd 1-et adunk hozzájuk; ezzel ($A_1$) eloszlásfüggvények kétszeresét kapjuk, melyekre — $\frac{1}{2}$-del való szorzás után — az előbbi meggondolást alkalmazva, állításunkra jutunk. — A szükségesség is könnyen igazolható.

Mindezek *nem* ($A_1$) vagy ($A_2$) eloszlásfüggvényekre is sokszor átvihetők.

Megjegyzendő, hogy a „keskenyebb" fogalom C) alatti meghatározása rokon BIRNBAUM *(1948)* „csúcsosság"-definíciójával, mely szerint egy $F_2(x)$ eloszlásfüggvény egy $\xi$ pontban „csúcsosabb", mint egy $F_1(x)$ eloszlásfüggvény az $\eta$ pontban, ha tetszőleges $T$ $(T>0)$ mellett $F_2(\xi+T)-F_2(\xi-T) > F_1(\eta+T)-F_1(\eta-T)$. Ha $\xi=\eta=x_a$, C)-ből nyilván következik, hogy az $x=x_a$ pontban $F_2(x)$ „csúcsosabb", mint $F_1(x)$.

A mondottak ($A_1$) vagy ($A_2$) sűrűségfüggvényekre is egyszerűen megfogalmazhatók, a hozzájuk tartozó eloszlásfüggvényekre kimondható megállapítások alkalmas átfogalmazásával.

4. *Az 1. Tétel bizonyítása.* 3. C) alapján elég bizonyítani, hogy az

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y-x+a)F_1(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} p(y-x)F_2(x)dx$$

függvénynek egyetlen előjelváltása van, mondjuk $y=y_a$-ban és $F(y)<0$, ha $y>y_a$. — Mivel $F(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p(y-x)[F_1(x+a)-F_2(x)]dx$, SCHOENBERG *(1951)* egy tétele folytán (l. II. 8. §. 10. tétel) $F(y)$ előjelváltásainak száma legfeljebb annyi, mint $F_1(x+a)-$ $-F_2(x)$ előjelváltásainak száma, vagyis legfeljebb egy. Ha megmutatjuk, hogy $y$ elég nagy értékeire $F(y)<0$ és $y$ elég kis értékeire $F(y)>0$, a bizonyítás kész, mert ekkor $F(y)$-nak legalább egy előjelváltása van, vagyis a fentiek figyelembevételével pontosan egy és ha ez $y=y_a$-ban történik, $F(y)<0$, ha $y>y_a$. — Elég $F(y)<0$ bizonyításával foglalkozni, a többi annak analógiájára történik. Legyen $F_1(x+a)-F_2(x)$ előjelváltása $x=x_a$-ban. Ekkor $p(y-x) = p(x-y)$ folytán

$$F(y) = \int_{-\infty}^{x_a} [F_1(x+a)-F_2(x)]p(x-y)dx + \int_{x_a}^{\infty} [F_1(x+a)-F_2(x)]p(x-y)dx \leqq$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{x_a} p(x-y)dx - p(x_a-y)\left|\int_{x_a}^{2y-x_a} [F_1(x+a)-F_2(x)]\,dx\right| <$$

$$< \int_{-\infty}^{x_0} p(x-y)dx - p(x_a-y)\delta\left|\int_{x_a}^{\infty} [F_1(x+a)-F_2(x)]dx\right|$$

$(0<\delta<1$, $\delta$ adott), ha $y>x_a$ és $y>y_1$, ahol $y_1$ elég nagy, tekintetbe véve, hogy $\left|\int_{x_0}^{2y-x_0} [F_1(x+a)-F_2(x)]dx\right|$ $y$ monoton növekedő függvénye és a várható értékek létezése folytán $\int\limits_{x_a}^{\infty} [F_1(x+a)-F_2(x)]dx = \omega$ is létezik. A $p(x)$-re szóló feltétel értelmében azonban $F(y) \leqq \int\limits_{-\infty}^{x_a-y} p(x)dx - \omega\delta p(x_a - y) < 0$, ha $y-x_a > y_2$, ahol $y_2$ $\omega\delta$-tól függő küszöbszám. Ha tehát $y > \max(x_a, y_1, x_a+y_2)$, akkor $F(y) < 0$, amit bizonyítani kellett (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

Megjegyzendő, hogy a feltételeknek eleget tevő $p(x)$ *Pólya*-féle sűrűségfüggvények közelebbi meghatározása megoldatlan probléma.

5. Világos, hogy ha $\lambda$ egy $G(x, \lambda)$ $(A_1)$ $((A_2))$ eloszlásfüggvény monoton formánsa és $\varphi(x)$ a 3. pontbeli monoton függvény és $G(\varphi(x), \lambda)$ is $(A_1)$ $((A_2))$ típusú eloszlásfüggvény, akkor $\lambda$ a $G(\varphi(x), \lambda)$ eloszlásfüggvénynek is monoton formánsa. Az is világos, hogy $\lambda$ helyett egy $\lambda^*$ paramétert vezetve be, mely $\lambda$ szigorúan monoton függvénye, $\lambda^*$ monoton formánsa lesz a $G(x, \lambda^*)$ eloszlásfüggvénynek.

6. Monoton formáns *csak* diszkrét értékeket felvevő paraméter is lehet, de ezzel itt nem foglalkozunk (vö. *Kiegészítések és problémák* IV. 1. §-hoz, 21.).

7. A monoton formáns itteni fogalma *nem* azonos a szerző által korábban bevezetettel (MEDGYESSY *(1961a)* p. 122.). Ott monoton formánsnak neveztük egy $F(x, c)$ eloszlásfüggvény $\varphi(t, c)$ karakterisztikus függvénye $c$ $(c_1 \leqq c \leqq c_2)$ paraméterét, ha $\varphi(t, c) \to e^{iAt}$, ha $c \downarrow c_1$ vagy $c \uparrow c_2$ ($A$ konstans), $F(x, c)$ görbéje eközben azonban nem válik olyan egyszerűen „keskenyebbé", ahogy azt jelen munkánkban értelmeztük. Azt mondhatjuk csupán, hogy $F(x, c)$ és valamilyen degenerált eloszlás *Lévy*-féle távolsága (GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* p. 33) zérushoz tart, ha $c \downarrow c_1$ vagy $c \uparrow c_2$.

Olykor a két definíció megegyezik, — pl. ha $\varphi(t, c) = e^{i\alpha t}\Phi(ct)$ vagy $\varphi(t, c) = e^{i\alpha t}[\Phi(t)]^c$ (vö. 12., 3. Tétel), ahol $c$ — a jelen munkában használt értelmezés szerint — $(c_2, 0)$ monoton formánsa $F(x, c)$ görbéjének. Ekkor a monoton formáns az analitikus alakból kiolvasható. — Ilyen esetekben két eloszlásfüggvény konvolucíójakor sokszor az egyes eloszlásfüggvények monoton formánsai összeadásával kapható meg a konvolució monoton formánsa (vö. MEDGYESSY *(1964)*).

8. A keskenység jelen definíciója független momentumok létezésétől. Olykor azonban — pl. egy $\frac{1}{\lambda^\omega} f\left(\frac{x-\alpha}{\lambda^\omega}\right)$ $(\omega > 0)$ sűrűségfüggvény esetében — a *szórásnégyzet* — ha létezik — kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban van a $\lambda$ monoton formánssal; következésképp átveheti annak szerepét.

9. Abban az esetben, ha $F_1(x)$ a $(-\infty, 0)$ szakaszon $\neq 0$, $F_1(0) = F_2(0)$ és $F_1(x)$ (0) egycsúcsú, akkor az, hogy $F_2(x)$ tágabb értelemben keskenyebb, mint $F_1(x)$, ugyanaz, mint a BIRNBAUM *(1948)* szerinti „$F_2(x)$ az origóban csúcsosabb, mint $F_1(x)$" kijelentés.

10. A „tágabb értelemben keskenyebb" definíciója is független momentumok létezésétől. — Néha azonban — pl. egy $\frac{1}{\lambda^\omega} f\left(\frac{x-\lambda}{\lambda^\omega}\right)$ $(\omega > 0)$ szigorúan egycsúcsú sűrűségfüggvény esetében — a *szórásnégyzet* egyszerű összefüggésben van a tágabb értelemben monoton formánssal (és így átveheti annak szerepét).

11. A tágabb értelemben monoton formánsra adott 3. példa az alábbi tétel következménye:

2. TÉTEL. *Ha $f(x)$ szigorúan (0) egycsúcsú ($A_1$) sűrűségfüggvény; akkor a*

$$g(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\beta-\lambda)^{\omega}}f\left(\frac{x}{(\beta-\lambda)^{\omega}}\right)+\frac{1}{(\beta+\lambda)^{\omega}}f\left(\frac{x}{(\beta+\lambda)^{\omega}}\right)\right]\quad(0<\lambda<\beta,\ \omega>0)$$

*szintén szigorúan (0) egycsúcsú ($A_1$) sűrűségfüggvény görbéjének $\lambda$ $(0,\beta)$ tágabb értelemben monoton formánsa, ha* $\frac{f'(x)}{f(x)}>-\frac{\omega+1}{\omega x}$ $(x>0)$ (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

*Bizonyítás.* Azt kell csak igazolni, hogy $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\int\limits_{-\infty}^{x}g(y,\lambda)dy\right]>0$, ha $\lambda\uparrow\beta$. Differenciálással belátható, hogy ennek elégséges feltétele

$$\frac{1}{(\beta+\lambda)^{\omega+1}}f\left(\frac{x}{(\beta+\lambda)^{\omega}}\right)<\frac{1}{(\beta-\lambda)^{\omega+1}}f\left(\frac{x}{(\beta-\lambda)^{\omega}}\right)\quad(x>0)$$

vagyis $\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\beta^{\omega+1}}f\left(\frac{x}{\beta^{\omega}}\right)\right)<0$; ez azonban következik az $\frac{f'(x)}{f(x)}>-\frac{\omega+1}{\omega x}$ $(x>0)$ egyenlőtlenségből. —

Ha $f(x)$ (0) szimmetrikus *Pearson*-féle sűrűségfüggvény, vagyis $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{A+Cx^2}$ ($A$, $C$ konstansok), a legutóbbi egyenlőtlenség fennáll, ha $\frac{x}{A+Cx^2}>-\frac{\omega+1}{\omega x}$ $(x>0)$. Ez nem teljesül a normális sűrűségfüggvény ($A<0$, $C=0$) esetében, $A\neq 0$, $C\neq 0$; $A=C<0$ esetében azonban ez teljesül, ha $|A|\geqq\frac{\omega}{\omega+1}$. Az utóbbinak az $f(x)=$ $=\frac{R}{(1+x^2)^{\frac{1}{2|A|}}}$ *Pearson*-féle sűrűségfüggvények felelnek meg, ha $|A|<1$ ($R$ alkalmas konstans). Így tehát $\frac{\omega}{\omega+1}\leqq|A|<1$. Ha $\omega=1$, $|A|=1/2$; ez a 3. példában szereplő, *Cauchy*-sűrűségfüggvényből leszármaztatott eloszlásfüggvény esete.

12. A karakterisztikus függvény alapján általában még egy tágabb értelemben monoton formáns létezését is nehéz megállapítani. — Bemutatunk egy ide tartozó tételt.

3. TÉTEL. *Legyen az $F(x,\lambda)$ szigorúan egycsúcsú ($A_2$) eloszlásfüggvény, melynek karakterisztikus függvénye de Finetti-féle és alakja $\varphi(t,\lambda)=e^{\lambda[\psi(t)-1]}$ $(0<\lambda<\Lambda_2)$* (DE FINETTI *(1938)), ahol $\psi(t)$ egy $G(x)$ ($A_2$) eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye. Legyen $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t,\lambda)|dt<\infty$ és $F'_x(x,\lambda)$ csúcsmagassága növekedjék, ha $\lambda\downarrow 0$. Akkor $\lambda$ $(\Lambda_2, 0)$ tágabb értelemben monoton formánsa $F(x,\lambda)$ görbéinek* (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

*Bizonyítás.* Az inverziós formula és $F(0, \lambda)=0$, $G(0)=0$ alapján esetünkben

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-ixt}}{it}\varphi'_{\lambda}(t, \lambda)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-ixt}}{it}\right)\varphi(t, \lambda)\psi(t)dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-ixt}}{it}\varphi(t, \lambda)dt=$$

$$=\int_{0}^{x}F(x-y, \lambda)dG(y)-F(x, \lambda)\int_{0}^{\infty}dG(y)\leqq\int_{0}^{\infty}[F(x-y, \lambda)-F(x, \lambda)]dG(y),$$

és ez $F(x-y, \lambda)-F(x, \lambda)<0$ folytán negatív, vagyis $F(x, \lambda)$ rögzített $x$ mellett növekedik, ha $\lambda\downarrow 0$. A többi feltételek teljesülésekor azonban ez a tétel állításával ekvivalens.

13. Egyéb monoton formáns-definíciók is megadhatók. Láttuk, hogy egyes esetekben a szórásnégyzet is lehet monoton formáns, ha egyetlen paramétert tartalmaz. Ez az észrevétel támpont „monoton formáns" ill. „keskenység" fogalmának következő bevezetésére $(A_1)$ vagy $(A_2)$ eloszlásfüggvények valamilyen $\{G(x, \lambda)\}$ $(\Lambda_1\leqq\lambda\leqq\Lambda_2)$ családja esetében (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*):

ha $G(x, \lambda)$ görbéje a $(0, \infty)$ szakaszon az $y=1$ egyenes és egy $\gamma(x, \lambda)$ függvény görbéje közt fekszik, ahol az utóbbi „monoton" tart az $y$ tengelyhez és az $y=1$ egyeneshez, ha pl. $\lambda\downarrow\Lambda_1$, akkor azt mondhatjuk, hogy *ebben az újabb értelemben* $\lambda$ $(\Lambda_2, \Lambda_1)$ monoton formánsa $G(x, \lambda)$ görbéjének; mivel ugyanekkor $G(x, \lambda)$ egy elfajult eloszlásfüggvényhez tart, a definíciónak van alapja.

A valószínűségelmélet klasszikus egyenlőtlenségei ill. továbbfejlesztéseik (GODWIN *(1964)*) szolgáltatnak főleg $\gamma(x, \lambda)$ típusokat. Legyen pl. $G(x, \lambda)$ $(A_2)$ eloszlásfüggvény, és létezzék szórásnégyzete. Ekkor a *Csebüsev*-féle egyenlőtlenség alapgondolatából következik, hogy

$$G(x, \lambda)\geqq 1-\frac{\int_{0}^{\infty}y^2dG(y, \lambda)}{x^2}.$$

A jobb oldal felel meg a $\gamma(x, \lambda)$ függvénynek; ha $\lambda\downarrow 0$ esetén $\int_{0}^{\infty}y^2dG(y, \lambda)\downarrow 0$, ezen $\gamma(x, \lambda)$ a leírt módon viselkedik, vagyis $\lambda$ vehető az előbb definiált monoton formánsnak.

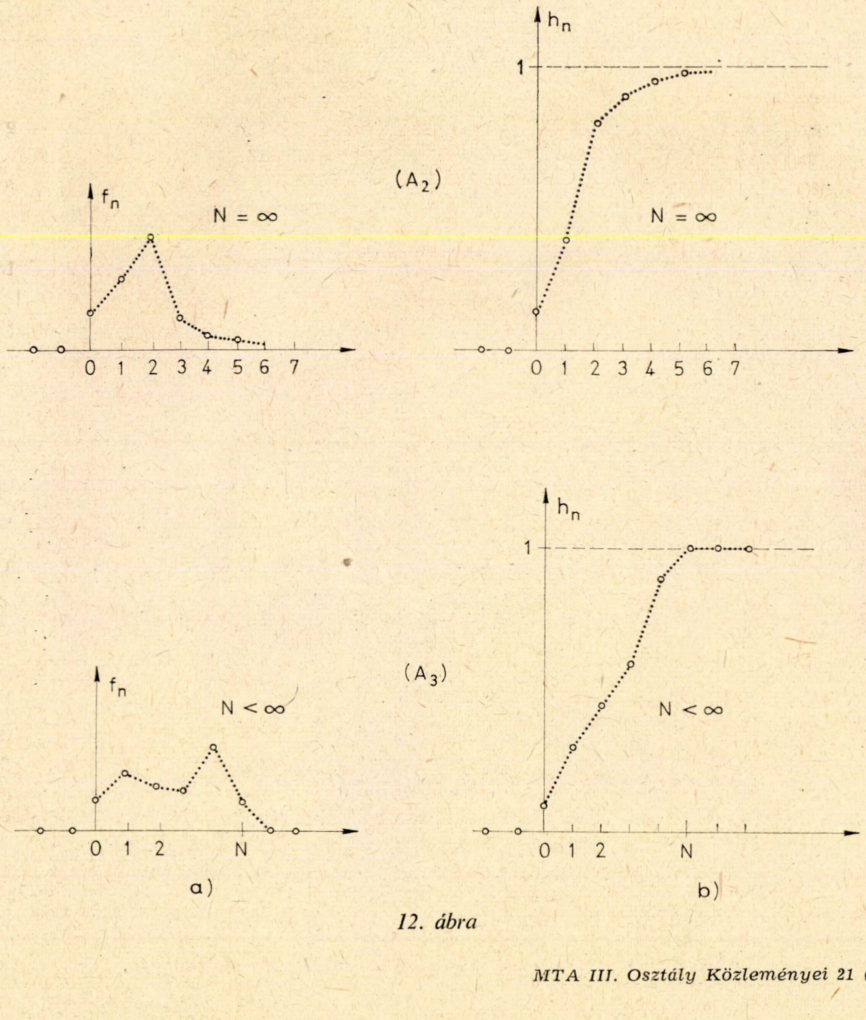
Ugyanígy bevezethető a szórásnégyzet is a $\gamma(x, \lambda)$ függvénybe. Ha $\lambda$ a szórásnégyzet monoton függvénye, ez utóbbi is vehető monoton formánsnak. Ez támogatja azt az általános szokást, hogy a szórásnégyzetet — mindenkor — a megfelelő eloszlásfüggvénygörbe keskenysége mértékének tekintik. — $\gamma(x, \lambda)$ a *Markov*-egyenlőtlenség segítségével is megadható, ha szórásnégyzet nem létezik. — Lehetséges bármilyen rendű momentum létezésétől függetlenül is megszerkeszteni $\gamma(x, \lambda)$ függvényt. Megoldatlan probléma viszont, szerkeszthető-e $\gamma(x, \lambda)$ függvény pusztán $G(x, \lambda)$ karakterisztikus függvényére, $\varphi(t)$-re támaszkodva, pl. a *Hincsin*-féle szórtságmérték, $-\int_{0}^{a}\log|\varphi(t)|dt$ $\left(|\varphi(t)|>0, \text{ ha } 0\leqq t\leqq a\right)$ útján (HINCSIN *(1937)*, LINNIK *(1960)* pp. 52—53, LUKÁCS *(1964)* p. 116) vagy az *Ito*-féle szórtságmérték („az eloszlásfüggvény koncentráltságmértéke"), $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\varphi(t)|^2}{1+t^2}\,dt$ (ITO *(1960)* pp. 42—49) felhasználásával.

## 5. §. Diszkrét eloszlás-diagramok alakjának jellemzése

Vizsgálatainkban alapvető szerepe van diszkrét eloszlás-diagramok „keskenységének" is. Ezt az intuitív fogalmat is pontossá kell tehát tennünk.

A továbbiakat mind a 4. §-ban a „tágabb értelemben vett keskenyebb" fogalommal kapcsolatban mondottak analógiájára fogalmazzuk meg.

Egy $\{q_n\}$ $(n = \ldots, -1, 0, 1)$ diszkrét eloszlás diagramja „keskenységét" a hozzá tartozó $\{h_n\} = \left\{\sum\limits_{\nu=-\infty}^{n} q_\nu\right\}$ *kumulatív eloszlás* segítségével értelmezhetjük a legkönnyebben.




*12. ábra*

Munkánkban elegendő lesz a következő eloszlás-, illetve kumulatív eloszlás-típusokból 0 vagy pozitív egész értékű eltolással nyert eloszlásokra, illetve kumulatív eloszlásokra szorítkozni (l. a 12. ábrát.)

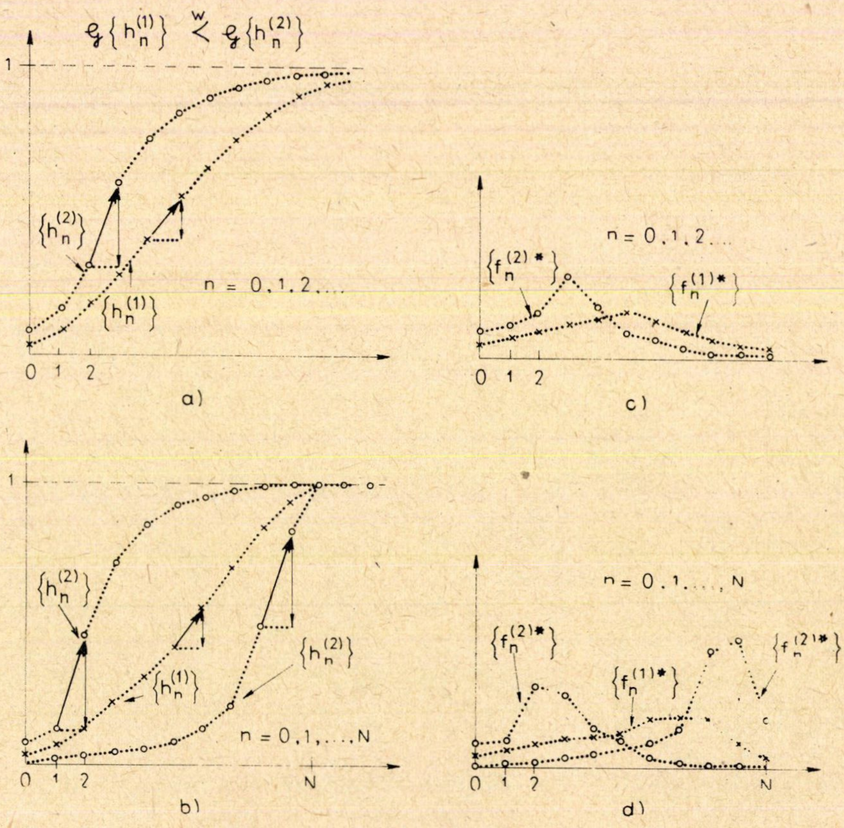
($A_2$) eloszlás: az egész számokon értelmezett $\{f_n\}$ egycsúcsú, diszkrét eloszlás, mely $\neq 0$ a $0, 1, \ldots$ pontokban, a $\ldots, -2, -1$ pontokban pedig 0.

($A_2$) kumulatív eloszlás: egy ($A_2$) eloszlásból leszármaztatott, az egész számokon értelmezett $\{h_n\} = \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \right\}$ diszkrét kumulatív eloszlás (mely tehát $\neq 0$ a $0, 1, \ldots,$ pontokban, a $\ldots, -2, -1$ pontokban pedig 0.

($A_3$) eloszlás: ugyanaz, mint az ($A_2$) eloszlás, azzal a különbséggel, hogy az $N+1$, $N+2, \ldots$ pontokban is 0, ahol ($N \geqq 0$) adott.

($A_3$) kumulatív eloszlás: ugyanaz, mint az ($A_2$) kumulatív eloszlás, azzal a különbséggel, hogy értéke nem a végtelenben, hanem már az $N, N+1, \ldots$ pontokban 1, ahol ($N \geqq 0$) adott.

1. Definíció. Legyen $\{h_n^{(1)}\}$, ill. $\{h_n^{(2)}\}$ ($A_2$) vagy ($A_3$) kumulatív eloszlás. Azt mondjuk, hogy $\{h_n^{(2)}\}$ diagramja keskenyebb, mint $\{h_n^{(1)}\}$ diagramja, ha 1. $\{h_n^{(2)}\}$




*13. ábra*

diagramja ($A_2$) kumulatív eloszlás esetén $\{h_n^{(1)}\}$ diagramja felett, ($A_3$) kumulatív eloszlás esetén pedig vagy teljesen $\{h_n^{(1)}\}$ diagramja felett vagy teljesen az alatt halad mindenütt, ahol $h_n^{(1)} \neq 0$ vagy $h_n^{(1)} \neq 1$, — továbbá 2. ha $\{h_n^{(1)}\}$ értékei első differenciáinak maximuma nagyobb, mint $\{h_n^{(1)}\}$ első differenciáinak maximuma (vagyis az előbbihez tartozó eloszlás csúcsmagassága nagyobb az utóbbiénál (l. a 13*a* és 13*b* ábrát). — E keskenyebbség-viszonylatot így jelöljük: $\mathscr{G}\{h_n^{(2)}\} \overset{w}{\prec} \mathscr{G}\{h_n^{(1)}\}$ (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

A $\overset{w}{\prec}$ reláció ($A_2$) kumulatív eloszlás esetén tranzitív.

$\{h_n^{(2)}\}$, ill. $\{h_n^{(1)}\}$-ből 0 vagy pozitív egész értékű eltolással származtatott $\{h_n^{(2)*}\}$, ill. $\{h_n^{(1)*}\}$ kumulatív eloszlások diagramjairól azt mondjuk, hogy ugyanolyan keskenységi viszonylat áll fenn közöttük, mint az előbb leírt; ennek jelölése szintén $\mathscr{G}\{h_n^{(2)*}\} \overset{w}{\prec} \mathscr{G}\{h_n^{(1)*}\}$.

A jövőben kumulatív eloszlásokat ezen keskenységi viszonylat szempontjából mindig a fenti ($A_2$) vagy ($A_3$) kumulatív eloszlásokra — eltolással — visszavezetve vizsgálunk, — ha lehet.

Eltolással egymásba átvihető diagramokat egyenlően keskenyeknek tekintünk.

Az itteni „keskenyebbség" viszonylat fennállásakor szemléletesen *nagyjából* az a viszony a két diagram között, mint a 4. §-ban bevezetett $\overset{w}{\prec}$ viszonylat esetében az ezzel összekapcsolt két görbe között; a diagrampontokat szakaszpoligonnal összekötve, a nyert kép rögtön mutatja ezt. Definíciónk tehát elég természetes.

2. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy egy ($A_2$) vagy ($A_3$) eloszlásból 0 vagy pozitív egész értékű eltolással származtatott $\{f_n^{(2)*}\}$ eloszlás diagramja keskenyebb, mint egy hasonló típusú $\{f_n^{(1)*}\}$ eloszlás diagramja, ha a megfelelő kumulatív eloszlások diagramjai közül az első keskenyebb, mint a második (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*). — E viszonylatot így jelöljük: $\mathscr{G}\{f_n^{(2)*}\} \overset{w}{\prec} \mathscr{G}\{f_n^{(1)*}\}$. Szemléletes tartalma, figyelembe véve az előző bekezdést, nyilvánvaló (l. a 13*c* és 13*d* ábrát).

Eloszlásokra szóló állításokat itt is a hozzájuk tartozó kumulatív eloszlásokon keresztül — gépiesen — fogalmazunk meg.

A következőkben ($A_2$) vagy ($A_3$) kumulatív eloszlások, ill. ($A_2$) vagy ($A_3$) eloszlások valamely $\{h_n(\lambda)\}$, ill. $\{f_n(\lambda)\}$ ($\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2$) egyparaméteres családja tagjai diagramjaira vezetünk be keskenységi összehasonlításokat.

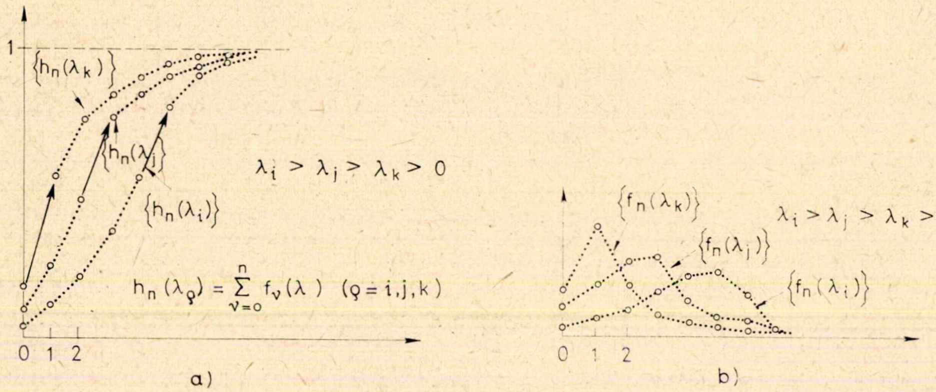
3. DEFINÍCIÓ. Ha $\lambda_i$, $\lambda_j$ a $\lambda$ paraméter két különböző értéke ($\Lambda_1 < \lambda_i < \lambda_j < \Lambda_2$) és $\mathscr{G}\{h_n(\lambda_i)\} \overset{w}{\prec} \mathscr{G}\{h_n(\lambda_j)\}$, azt mondjuk, hogy $\lambda$ $\{h_n(\lambda)\}$ diagramjának ($\Lambda_2$, $\Lambda_1$) monoton formánsa; ha pedig $\mathscr{G}\{h_n(\lambda_j)\} \overset{w}{\prec} \mathscr{G}\{h_n(\lambda_i)\}$, azt mondjuk, hogy $\lambda$ $\{h_n(\lambda)\}$ diagramjának ($\Lambda_1$, $\Lambda_2$) monoton formánsa (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

($\Lambda_2$, $\Lambda_1$), ill. ($\Lambda_1$, $\Lambda_2$) $\lambda$ monoton változása irányára utal. A monoton formáns szemléletes jelentése világos: ahogy $\lambda$ monoton változik, a megfelelő diagram egyre keskenyebb lesz (ezt a kumulatív eloszlás diagramja mutatja jól); a keskenységet *egyetlen* szám jellemzi (l. a 14*a* ábrát).

A fenti értelmezéseket megtartva a rövidség kedvéért sokszor csak azt mondjuk: „$\lambda$ $\{h_n(\lambda)\}$ monoton formánsa" és í. t.

4. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy egy $\{f_n(\lambda)\}$ $(A_2)$ vagy $(A_3)$ eloszlás diagramjának $\lambda$ $(\Lambda_2, \Lambda_1)$ vagy $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ monoton formánsa, ha $(\Lambda_2, \Lambda_1)$ vagy $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ monoton formánsa az $\{f_n(\lambda)\}$-hoz tartozó kumulatív eloszlásnak (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

Szemléletes jelentése az előzőek után világos (l. a 14*b* ábrát).




*14. ábra*

Egy $\{h_n(\lambda)\}$ $(A_2)$ vagy $(A_3)$ kumulatív eloszlás monoton formánsának megkeresésére szolgáló kritériumok sokkal egyszerűbbek, mint a 4. §-ban a monoton formánsra szólók. Szinte triviális *például* az

1. LEMMA. *Ha egy* $\{h_n(\lambda)\}$ $(n=0, 1, \ldots; \Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2)$ $(A_2)$ *kumulatív eloszlás esetén* $\frac{\partial}{\partial \lambda} h_n(\lambda) < 0$ *és* $h_{n+1}(\lambda) - h_n(\lambda)$, *vagyis a* $\{h_n(\lambda)\}$*-hoz tartozó* $\{f_n(\lambda)\}$ $(A_2)$ *eloszlás csúcsmagassága növekedik, ha* $\lambda$ *csökken, akkor* $\lambda$ $\{h_n(\lambda)\}$ *diagramjának* $(\Lambda_2, \Lambda_1)$ *monoton formánsa.*

Monoton formánsnak a generátorfüggvény alapján történő meghatározását sokszor elősegíti a következő két tétel, melyek bizonyítása a *Kiegészítések és problémák II. 5. §-hoz* szakaszban található.

1. TÉTEL. *Legyen* $g(z, \lambda)$ $(|z| < 1)$ *az* $\{f_n(\lambda)\}$ $(n=0, 1, \ldots N;\ N \leqq +\infty;\ 0 \leqq \Lambda_1 \leqq \leqq \lambda \leqq \Lambda_2)$ $(A_2)$ *vagy* $(A_3)$ *eloszlás generátorfüggvénye. Ha* $\{f_n(\lambda)\}$ *csúcsmagassága nem csökken, ha* $\lambda \uparrow \Lambda_2$ *(illetve* $\lambda \downarrow \Lambda_1$*), továbbá ha* $g'_\lambda(z, \lambda)$ *létezik és* $\frac{g'_\lambda(z, \lambda)}{1-z}$ *hatványsorának együtthatói* $(A_2)$ *eloszlás esetén pozitívak (illetve negatívak),* $(A_3)$ *eloszlás esetén pedig egyforma előjelűek, akkor* $\lambda$ $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ *(illetve* $(\Lambda_2, \Lambda_1)$*) monoton formánsa az* $\{f_n(\lambda)\}$ *diagramjának* (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

2. TÉTEL. *Legyen* $w(z)$ *egy* $\{f_n\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ *korlátlanul osztható* $(A_2)$ *eloszlás generátorfüggvénye, melynek kanonikus előállítása* $w(z) = e^{B(H(z)-1)}$ $(B > 0)$, *ahol* $H(z) = \sum_{r=1}^{\infty} H_r z^r$ $(H_r > 0)$ *egy generátorfüggvény. Legyen továbbá* $\{q_n(\lambda)\}$ *korlátlanul*

*osztható* ($A_2$) *vagy* ($A_3$) *eloszlás, melynek generátorfüggvénye* $g(z, \lambda)=\omega(z)^\lambda$ $(0<\lambda<\Lambda_2)$. *Ha* $\{q_n(\lambda)\}$ *diagramja csúcsmagassága növekedik, amikor* $\lambda \to 0$, *akkor* $\lambda$ $\{q_n(\lambda)\}$ *diagramjának* $(\Lambda_2, 0)$ *monoton formánsa* (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

Egy $\{f(\lambda)\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ ($A_2$) eloszlás diagramja csúcsmagassága változásának vizsgálatát elősegíti pl. a következő triviális

2. LEMMA. *Ha* $\lambda$ *csökkenésekor az új* $\lambda$ *értékhez tartozó eloszlás tagjai a kiindulási* $\{f_n(\lambda)\}$ *csúcshelyéig vagy attól jobbra eső pontig növekednek, akkor* $\{f_n(\lambda)\}$ *csúcsmagassága* $\lambda$ *csökkenésekor növekedik* (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

Ezzel és hasonló megállapításokkal a csúcsmagasság meghatározása, ami általában nehéz, elkerülhető.

Ha a csúcsmagasság változása pontosan nem határozható meg, *a csúcsmagasság növekedése helyett azt is elfogadjuk, ha annak valamilyen alsó korlátja növekedik,* ha pl. $\lambda$ csökken.

PÉLDÁK. 1. *A Poisson-eloszlás.* Legyen alakja $\left\{e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\right\}$ $(n=0, 1, \ldots; 0<\lambda<\Lambda_2)$; ez egycsúcsú és generátorfüggvénye $g(z, \lambda)=e^{\lambda(z-1)}$. A 2. Tétel alkalmazható és így $\lambda$ $(\Lambda_2, 0)$ monoton formánsa ezen eloszlás diagramjának, ha a csúcsmagassága nem csökken, ha $\lambda \downarrow 0$. A 2. lemma segítségével ez könnyen igazolható: Az $\left\{e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\right\}$ eloszlás csúcshelye $[\lambda]$-ban van és

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\begin{cases} >0 \\ =0, \\ <0 \end{cases} \text{ha} \quad \lambda\begin{cases} <n \\ =n \\ >n \end{cases}$$

az eloszlás tagjai növekednek $\lambda$ csökkenésekor, ha $n \leqq \lambda$. Ezen $n$-értékek legfeljebb akkorák, mint a csúcshely abszcisszája: ebből állításunk következik.

2. *A negatív binomiális eloszlás.* Legyen alakja

$$\left\{\binom{R-1+n}{R-1}(1-\lambda)^R\lambda^n\right\} \qquad (n=0, 1, \ldots; \quad R=1, 2, \ldots; \quad 0<\lambda<1).$$

Tudjuk, hogy egycsúcsú és generátorfüggvénye $g(z, \lambda) = \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda z}\right)^R$. Az 1. Tételt alkalmazzuk: a $\frac{g'_\lambda(z, \lambda)}{1-z} = -R\frac{(1-\lambda)^{R-1}}{(1z\gamma-)^{R+1}}$ hatványsor együtthatói negatívak, így tehát $\lambda(1, 0)$ monoton formánsa eloszlásunknak, ha a csúcsmagasság nem csökken, ha $\lambda\downarrow 0$. Ez azonban a 2. lemma segítségével igazolható. Az eloszlás csúcsa ugyanis $\left[\frac{R\lambda-1}{1-\lambda}\right]+1$-nél van. Másrészt

$$\frac{d}{d\lambda}\binom{R-1+n}{R-1}(1-\lambda)^R\lambda^n\begin{cases} >0 \\ =0, \\ <0 \end{cases} \text{ha} \quad \lambda\begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases}\frac{n}{R+n};$$

így tehát az eloszlás tagjai növekednek $\lambda$ csökkenésekor, ha $n \leqq \frac{R\lambda}{1-\lambda}$. Ezen

$n$-értékek legfeljebb akkorák, mint a csúcshely abszcisszája; ebből állításunk már következik.

3. *A binomiális eloszlás.* Legyen alakja

$$\left\{\binom{R}{n} e^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda})^{R-n}\right\} \quad (n=0, 1, \ldots, R; \quad R=1, 2, \ldots; \quad 0<\lambda<\log 2).$$

Tudjuk, hogy egycsúcsú és generátorfüggvénye $g(z, \lambda) = [e^{-\lambda}(z-1)+1]^R$. A 2. Tételt alkalmazzuk. A $\frac{g_\lambda'(z, \lambda)}{1-z} = e^{-\lambda}R[e^{-\lambda}(z-1)+1]^{R-1}$ hatványsor együtthatói pozitívak. Így tehát $\lambda$ (log 2, 0) monoton formánsa eloszlásunknak, ha diagramjának csúcsmagassága nem csökken, ha $\lambda \downarrow 0$. A 2. lemma alapján ez igazolható: a csúcshely $[(R+1)e^{-\lambda}]$-nál van, továbbá

$$\frac{d}{d\lambda}\binom{R}{n} e^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda})^{R-n} \begin{cases} >0 \\ =0, \\ <0 \end{cases} \text{ha} \quad \lambda \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \log\binom{R}{n},$$

következésképp $\lambda$ csökkenésekor eloszlásunk tagjai csökkennek, ha $n<Re^{-\lambda}$, egyébként növekednek. Ezen $n$-értékek legalább akkorák, mint a csúcshely abszcisszája; ebből állításunk már következik.

4. *A* $g(z, \lambda) = \left(\frac{1-p}{1-\lambda}\right)^R \left(\frac{1-\lambda z}{1-pz}\right)^R$ $(0<\lambda<p<1; R=1, 2, \ldots)$ *generátorfüggvényű eloszlás.* Ez a generátorfüggvény két, $(p, R)$, ill. $(\lambda, R)$ paraméterű negatív binomiális eloszlás generátorfüggvényének a hányadosa. A 8. §-ban igazoljuk majd, hogy $g(z, \lambda)$ egy korlátlanul osztható $\{q_n(p, \lambda)\}$ eloszlás generátorfüggvénye. — $\{q_n(p, \lambda)\}$ egycsúcsú. Ez így látható be: Mivel

$$\left(\frac{1-p}{1-\lambda}\right)^R \left(\frac{1-\lambda z}{1-pz}\right)^R = \left(\frac{1-p}{1-\lambda}\right)^R \left(\frac{\lambda}{p}\right)^R \left[1+\sum_{\nu=1}^{R}\binom{R}{\nu}\left(\frac{(p/\lambda)-1}{1-p}\right)^\nu \left(\frac{1-p}{1-pz}\right)^\nu\right], \quad \{q_n(p, \lambda)\}$$

különböző rendű negatív binomiális eloszlások keveréke, azaz

$$\{q_n(p, \lambda)\} = \left\{\left(\frac{1-p}{1-\lambda}\right)^R \left(\frac{\lambda}{p}\right)^R \left[1+p^n \sum_{\nu=1}^{R}\binom{R}{\nu}\left(\frac{p}{\lambda}-1\right)^\nu \binom{\nu-1+n}{\nu-1}\right]\right\}.$$

$\sum_{\nu=1}^{R}\binom{R}{\nu}\left(\frac{p}{\lambda}-1\right)^\nu \binom{\nu-1+n}{\nu-1} = P_{R-1}(n)$ $n$-nek egy $(R-1)$-ed fokú polinomja, melynek együtthatói *pozitívak.* Ha $n$-et folytonos változónak tekintjük, $P_{R-1}(n)$ konvex függvény és $p^nP_{R-1}(n)$ deriváltja vagy negatív vagy egyetlen zérushellyel rendelkezik, azaz a $p^nP_{R-1}(n)$ függvénynek egyetlen extremuma van. Diszkrét $n$-ekre térve vissza, ebből már következik $\{q_n(p, \lambda)\}$ egycsúcsúsága. — Az 1. Tételt alkalmazva, a $\frac{q_\lambda'(z, \lambda)}{1-z} = \frac{R}{(1-\lambda)^2}\left(\frac{1-p}{1-\lambda}\right)^{R-1}\left(\frac{1-\lambda z}{1-pz}\right)^{R-1}\left(\frac{1-p}{1-pz}\right)$ függvényről látható, hogy hatványsora együtthatói pozitívak — hiszen csupa generátorfüggvény szorzata; így tehát $\lambda(0, p)$ monoton formánsa lesz $\{q_n(p, \lambda)\}$ diagramjának, ha ennek csúcsmagassága nem csökken, amidőn $\lambda \uparrow p$. Analitikus nehézségek folytán ez már nem bizonyítható a 2. lemma segítségével, így tehát csak az ottani megállapodáshoz folyamodhatunk, mely szerint elég megmutatni, hogy *a csúcsmagasság valamilyen alsó korlátja növekedik, ha* $\lambda \uparrow p$. — A $\max\limits_{0 \leqq n < \infty} q_n(p, \lambda)$ csúcs- magasságra fennáll:

$$\max_{0 \leqq n < \infty} q_n(p, \lambda) \geqq \sum_{n=0}^{\infty}{}' [q_n(p, \lambda)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(e^{it}, \lambda)|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-p}{1-\lambda}\right)^{2R} \left(\frac{1-2\lambda\cos t+\lambda^2}{1-2p\cos t+p^2}\right)^R dt.$$

A jobboldal $\lambda$ szerinti deriváltja

$$\frac{R}{\pi} \frac{(1-p)^{2R}(1+\lambda)}{(1-\lambda)^{2R+1}} \int_0^{2\pi} \frac{(1-2\lambda\cos t+\lambda^2)^{R-1}}{(1-2p\cos t+p^2)^R} (1-\cos t)\,dt.$$

Mivel az integrandus nemnegatív, ez $>0$, vagyis a csúcsmagasság ezen alsó korlátja növekedik, ha $\lambda \uparrow p$, — amit bizonyítani kellett.

### Kiegészítések és problémák a II. 5. §-hoz

1. A „keskenyebb" fogalom *nem* $(A_2)$ $((A_3))$ eloszlás vagy $(A_2)$ $((A_3))$ kumulatív eloszlás esetében nincs értelmezve; az itteniek nem terjeszthetők ki erre az esetre.

2. Világos, hogy ha $\lambda$ egy $\{h_n(\lambda)\}$ $(A_2)$ $((A_3))$ kumulatív eloszlás monoton formánsa, és helyette bevezetünk egy $\lambda^*$ paramétert, mely $\lambda$ szigorúan monoton függvénye és $\lambda^* > \lambda$, $\lambda^*$monoton formánsa lesz a $\{h_n^*(\lambda^*)\}$ $(A_2)$ $((A_3))$ kumulatív eloszlásnak.

3. Monoton formáns *csak* diszkrét értékeket felvevő paraméter is lehet, de ezzel itt nem foglalkozunk. (Vö. *Kiegészítések és problémák IV.1.* §-*hoz*, 21.)

4. A monoton formáns itteni fogalma *nem* azonos a szerző által korábban bevezetettel (MEDGYESSY *(1961a)* p. 122.). Ott monoton formánsnak neveztük egy $\{p_n(c)\}$ $(c_1 \leqq c \leqq c_2)$ diszkrét eloszlás $\varphi(t, c)$ karakterisztikus függvénye $c$ paraméterét, ha $\varphi(t, c) \to e^{iMt}$, ha $c \downarrow c_1$ vagy $c \uparrow c_2$ ($M$ egész szám). $\{p_n(c)\}$ diagramja eközben azonban nem válik olyan értelemben „keskenyebbé", ahogy azt jelen munkánkban értelmeztük. Azt mondhatjuk csupán, hogy a $\{p_n(c)\}$ eloszláshoz tartozó eloszlásfüggvény és valamilyen degenerált eloszlásfüggvény *Lévy*-féle távolsága (GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* p. 33) zérushoz tart, ha $c \downarrow c_1$, vagy $c \downarrow c_2$. Olykor a két definíció megegyezik, — pl. ha $\varphi(t, c) = e^{iMt}[\Phi(t)]^c$, ahol $c$ a jelenlegi értelemben $(c_2, 0)$ monoton formánsa $\{p_n(c)\}$ diagramjának. A *Poisson*-eloszlás $\left(\varphi(t,c) = [e^{(e^{it}-1)}]^c\right)$ és még más korlátlanul osztható diszkrét eloszlások is ebbe az osztályba tartoznak. — Megegyezik ezenkívül a két definíció a binomiális eloszlás esetében, ha $\varphi(t, c) = [e^{-c}(e^{it}-1)+1]^R$ és $c \downarrow 0$, valamint a negatív binomiális eloszlás esetében, mikor is $\varphi(t, c) = \dfrac{1-c}{1-ce^{it}}$ és $c \downarrow 0$.

5. A keskenység jelen definíciója független momentumok létezésétől. Olykor azonban a *szórásnégyzet* — ha létezik — kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban van a $\lambda$ monoton formánssal és így átveheti annak szerepét.

6. Az 1. tétel bizonyítása: az $\{f_n(\lambda)\}$-hoz tartozó $\{h_n(\lambda)\}$ kumulatív eloszlás generátorfüggvénye $\frac{g(z,\lambda)}{1-z}$ és így $\frac{g'_\lambda(z,\lambda)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}h_n(\lambda)\right)z^n$. Ebből és az 1. Lemmából az állítás már következik.

A 2. Tétel bizonyítása: A $w(z)=e^{B(H(z)-1)}$ $(B>0)$ kanonikus előállítás bizonyítása FELLER *(1957)* p. 271-en található, az pedig, hogy $w(z)^\lambda=g(z,\lambda)$ $(\lambda>0)$ generátorfüggvény, GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)*§ 17-ből következik. — Az 1. Tétel folytán elég bizonyítani, hogy $\frac{g'_\lambda(z,\lambda)}{1-z}$ együtthatói negatívak. Nyilván $\frac{g'_\lambda(z,\lambda)}{1-z} =$ $= -e^{B\lambda[H(z)-1]}\cdot\frac{B[1-H(z)]}{1-z}$. Az első tényező egy generátorfüggvény, a második egy hatványsor: $B\left[1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\sum_{r=1}^{\nu}H_r\right)z^\nu\right]$, melynek együtthatói nemnegatívak. Következésképpen a szorzat együtthatói negatívak; amit bizonyítani kellett.

7. Természetesen egyéb monoton formáns-definíciók is megadhatók. Egyes esetekben a szórásnégyzet is lehet monoton formáns, ha egyetlen paramétert tartalmaz. Ez az észrevétel támpont ahhoz, hogy $(A_2)$ $((A_3))$ kumulatív diszkrét eloszlások valamilyen $\{h_n(\lambda)\}$ $(A_1\leq\lambda\leq A_2)$ családja esetében bevezessük „monoton formáns" ill. „keskenység" fogalmát, tökéletesen ugyanolyan módon, ahogy azt a *Kiegészítések és problémák* a II. 4. §-*hoz* 13. alatt leírtuk, mert az ottaniak diszkrét eloszlás eloszlásfüggvényének görbéjére is alkalmazhatók. Az ottani példák, momentumoknak vagy a szórásnégyzetnek a *Csebüsev*-egyenlőtlenség stb. segítségével történő felhasználása monoton formánsként és í. t. itt is érvényesek. — Az ez úton bevezethető újabb monoton formáns-típusokkal azonban nem foglalkozunk itt.

## 6. §. Sűrűségfüggvények egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltjai

1. DEFINÍCIÓ. Egy $f(x)$ szigorúan egycsúcsú $(A_1)$ vagy $(A_2)$ vagy $(A_3)$ sűrűségfüggvény *egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltjának* nevezünk egy $g(y)$ szigorúan egycsúcsú $(A_1)$ vagy $(A_2)$ vagy $(A_3)$ sűrűségfüggvényt, ha $g(y)$ és $f(x)$ közt jól definiált összefüggés áll fenn, emellett kimondható a $\mathcal{G}g(y) \prec \mathcal{G}f(x)$ vagy a $\mathcal{G}g(y)\overset{w}{\prec}\mathcal{G}f(x)$ keskenységi reláció (vö.4. §.) (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

Gyakran $f(x)$ karakterisztikus függvényéből kiindulva találhatunk könnyen egy leírt $g(y)$ függvényt.

## 7. §. Diszkrét eloszlások egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltjai

1. DEFINÍCIÓ. Egy $\{f_n\}$ $(n=0, 1, \ldots; f_\nu=0$, ha $\nu<0)$ (egycsúcsú) $(A_2)$ vagy $(A_3)$ eloszlás *egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltjának* nevezünk egy $\{g_m\}$ $(m=0, 1, \ldots; g_\mu=0$, ha $\mu<0)$ (egycsúcsú) $(A_2)$ vagy $(A_3)$ eloszlást, ha $\{g_m\}$

és $\{f_n\}$ közt jól definiált összefüggés áll fenn, emellett kimondható a $\mathscr{G}\{g_m\} \overset{w}{\prec} \mathscr{G}\{f_n\}$ keskenységi reláció (vö. 5. §.) (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

Gyakran $\{f_n\}$ generátorfüggvényéből kiindulva találhatunk könnyen egy leírt $\{g_m\}$ eloszlást.

## 8. §. Néhány speciális tétel sűrűségfüggvényekről és diszkrét eloszlásokról

E paragrafusban tételeket sorolunk fel, melyekre szükség van munkánkban, de nem tartoznak a korábbi paragrafusokba.

1. *Két karakterisztikus függvény hányadosa.* Legyen egy nemdegenerált, korlátlanul osztható eloszlásfüggvény $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényének *Lévy* és *Hincsin*-féle kanonikus előállítása

$$\varphi(t) = \exp\left[i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} K(t, u)dG(u)\right],$$

ahol $\gamma$ valós konstans, $G(u)$, a „spektrális függvény" egy korlátos változású, nemcsökkenő függvény,

$$K(t, u) = \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}, \quad \lim_{u\to 0} K(t, u) = 0$$

(GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* § 18).

1. TÉTEL. *Legyenek $\varphi_1(t)$ és $\varphi_2(t)$ nemdegenerált, korlátlanul osztható eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei, $\gamma_1$, $G_1(u)$, illetve $\gamma_2$, $G_2(u)$ paraméter és spektrális függvénnyel a kanonikus előállításban. Ha $G_1(u) - G_2(u)$ korlátos változású nemcsökkenő függvény, akkor $\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$ egy nemdegenerált, korlátlanul osztható eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye. E feltétel szükséges és elégséges* (MEDGYESSY *(1961a)* pp. 168—171).

A bizonyítás a szereplő karakterisztikus függvények kanonikus előállításának nyilvánvaló következménye.

PÉLDA. Legyen $\varphi_1(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_1 t}$, $\varphi_2(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_2 t}$ $(0<\beta_2<\beta_1)$; a hozzájuk tartozó ch-sűrűségfüggvények $f_1(x) = \frac{1}{2\beta_1 \operatorname{ch}(\pi x/2\beta_1)}$, $f_2(x) = \frac{1}{2\beta_2 \operatorname{ch}(\pi x/2\beta_2)}$. Ezek korlátlanul oszthatók, mert $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2)$ kanonikus előállításban felírható,

$$\gamma_i = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{2(1+y^2)\operatorname{sh}(\pi y/2\beta_i)}dy, \quad G_i(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{y}{2(1+y^2)\operatorname{sh}(\pi y/2\beta_i)}dy \text{ konstans, ill.}$$

spektrális függvénnyel, továbbá $G_1(u) - G_2(u)$ nemcsökkenő, korlátos változású függvény és a tétel egyéb feltételei is teljesülnek (MEDGYESSY *(1961a)* pp. 64—66).

Így tehát $\varphi(t)=\dfrac{\operatorname{ch}\beta_1 t}{\operatorname{ch}\beta_1 t}$ egy korlátlanul osztható $f(x)$ sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye; könnyen kiszámítható, hogy

$$f(x)=\frac{1}{\beta_1}\,\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi x}{2\beta_1}\cdot\cos\dfrac{\pi\beta_2}{2\beta_1}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi x}{\beta_1}+\cos\dfrac{\pi\beta_2}{\beta_1}}.$$

2. *Két generátorfüggvény hányadosa.* Bár az előző tétel elvileg alkalmazható, érdemes megfelelőbb megfogalmazást adni az ide tartozó eredménynek. — Emlékeztetünk arra, hogy annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $g(z)$ generátorfüggvény egy korlátlanul osztható diszkrét eloszláshoz tartozzék, az, hogy $g(z)$

$$g(z)=e^{\lambda[h(z)-1]}$$

alakú legyen, ahol $\lambda>0$ és $h(z)$ valamilyen generátorfüggvény (FELLER *(1957)* p. 271). — Majdnem triviális a

2. TÉTEL. *Legyenek $g_1(z)$, $g_2(z)$ nemdegenerált korlátlanul osztható diszkrét eloszlások generátorfüggvényei,*

$$g_1(z)=e^{\lambda_1[h_1(z)-1]},\quad g_2(z)=e^{\lambda_2[h_2(z)-1]}$$

*kanonikus előállítással* $(\lambda_1,\lambda_2>0,$ $h_1(z), h_2(z)$ *generátorfüggvények*$)$. — *Ha* $\dfrac{\lambda_1 h_1(z)-\lambda_2 h_2(z)}{\lambda_1-\lambda_2}$ *generátorfüggvény, akkor* $\dfrac{g_1(z)}{g_2(z)}$ *egy korlátlanul osztható diszkrét eloszlás generátorfüggvénye. — A feltétel szükséges és elégséges* (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

A bizonyítás $\dfrac{g_1(z)}{g_2(z)}$ explicit alakjából és a kanonikus előállítás egyértelműségéből következik.

A $g_1(z)$, $g_2(z)$-hez tartozó eloszlások egész értékű eltolása nem befolyásolja a tétel érvényességét.

PÉLDA. Legyen $g_1(z)=\left(\dfrac{1-p_1}{1-p_1 z}\right)^R$ ill. $g_2(z)=\left(\dfrac{1-p_2}{1-p_2 z}\right)^R$ $R(R=1,2,\ldots)$ rendű, (R, $p_1$), ill. $(R,p_2)$ paraméterpárú negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye, ahol $0<p_2<p_1<1$. Mivel

$$g_i(z)=\exp\left[\log\left(\frac{1}{1-p_i}\right)\cdot\left\{\frac{\log\left(\dfrac{1}{1-p_i z}\right)}{\log\left(\dfrac{1}{1-p_i}\right)}-1\right\}\right]\qquad(i=1,2),$$

$$\lambda_i=\log\left(\frac{1}{1-p_i}\right),\quad h_i(z)=\frac{\log\left(\dfrac{1}{1-p_i z}\right)}{\log\left(\dfrac{1}{1-p_i}\right)}$$

és

$$\frac{\lambda_1 h_1(z) - \lambda_2 h_2(z)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p_1^n - p_2^n) z^n}{\log\left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)}.$$

ez a

$$\{q_n\} \equiv \left\{\frac{p_1^n - p_2^n}{n \cdot \log\left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)}\right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

diszkrét eloszlás generátorfüggvénye. Így tehát $\frac{g_1(z)}{g_2(z)} = \left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^R \left(\frac{1-p_2 z}{1-p_1 z}\right)^R$ a $\{q_n\}$ korlátlanul osztható diszkrét eloszlás generátorfüggvénye.

3. *Stabilis sűrűségfüggvényekre fennálló parciális differenciálegyenletek.* Legyen $s_A(x, B, c)$ stabilis sűrűségfüggvény (vö. II. 1. §), melynek karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = e^{-c|t|^A\{1+iB\cdot \operatorname{sgn} t \cdot \Omega(A)\}},$$

ahol

$c > 0$, $0 < A \leqq 2$, $|B| \leqq 1$, $\Omega(A) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi A}{2} & (A \neq 1) \\ 0 & (A = 1) \end{cases}$ és $A = \frac{m}{n}$, $m$ és $n$ relatív prímek. Ezek nyilván csak egy részhalmazát képezik a stabilis sűrűségfüggvények családjának. — Fennáll a

3. TÉTEL. *Ha az előzőekben adott A és B paraméterértékek és valamilyen $\varkappa$ és M ($\varkappa = 0$; $\pm 1, \ldots$; $M = 1, 2, \ldots$) számokra teljesülnek a*

$$\frac{\pi}{2}\frac{2\varkappa - Mm}{Mn} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\left(B \operatorname{tg}\frac{\pi m}{2n}\right) & (A \neq 1) \\ 0 & (A = 1) \end{cases}, \qquad \left|\frac{2\varkappa - Mm}{Mn}\right| \leqq 1$$

*feltételek, akkor $s_A(x, B, c) \equiv f(x, c)$ kielégíti a*

$$(-1)^{Mn}(1+P^2)^{\frac{Mn}{2}} \frac{\partial^{Mn} f}{\partial x^{Mn}} - (-1)^{\varkappa} \frac{\partial^{Mn} f}{\partial c^{Mn}} = 0 \quad (c > 0)$$

*parciális differenciálegyenletet, ahol*

$$P = \begin{cases} B \operatorname{tg}\frac{\pi A}{2} = B \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi m}{2n} & (A \neq 1) \\ 0 & (A = 1) \end{cases}$$

(MEDGYESSY *(1956)*).

A bizonyítás — stabilis sűrűségfüggvényekre fennálló parciális differenciálegyenletekre vonatkozó egyéb tételekével együtt — megtalálható MEDGYESSY *(1956)*, *(1961a)* pp. 188—199 munkáiban.

A tétel és az alábbiak nyilván igazak akkor is, ha a szereplő stabilis sűrűségfüggvényeket konstans értékkel eltoljuk.

Hangsúlyozzuk, hogy itt *A racionális* szám és $A = 1$ esetében egyedül a *Cauchy*-sűrűségfüggvény szerepel.

PÉLDÁK. a) A 3. tételből következik, hogy ha $Mn=1$-et veszünk, parciális differenciálegyenletünk egyetlen megoldása az $f(x, c)=\frac{e^{-\frac{x^2}{4c}}}{\sqrt{4\pi c}}$ *normális sűrűségfüggvény*. Ekkor $\varphi(t)=e^{-ct^2}$, $A=2$, $B$ tetszőleges, $\Omega(A)=0$ és így $m=2$, $n=1$, $P=0$, $M=1$, $\varkappa=1$ és az egyenlet átmegy a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial c}=0 \quad (c>0)$$

„hővezetési" egyenletbe.

b) A 3. tételből következik, hogy ha $Mn=2$-t veszünk, parciális differenciálegyenletünknek csak a következő sűrűségfüggvények lehetnek megoldásai:

1. Az $f(x, c)=\frac{1}{\pi c}\frac{1}{1+x^2/c^2}$ *Cauchy-sűrűségfüggvény*. Ekkor $\varphi(t)=e^{-c|t|}$, $A=1$, $B=0$, $\Omega(A)=0$ és így $m=1$, $n=1$, $P=0$, $M=2$, $\varkappa=1$, és az egyenlet átmegy a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}=0 \quad (c>0)$$

*Laplace*-féle egyenletbe.

2. Az

$$f(x, c)=\begin{cases}\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{c^2}{2x}}}{x^{3/2}} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases} \quad (c>0)$$

*Pearson-féle V. típusú sűrűségfüggvény*. Itt

$\varphi(t)=e^{-c|t|^{1/2}\{1-i\,\mathrm{sgn}\,t\}}$, $A=1/2$, $B=-1$, $\Omega(A)=1$, $m=1$, $n=2$, $P=-1$, $M=1$, $\varkappa=0$; parciális differenciálegyenletünk ekkor

$$2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}=0 \quad (c>0).$$

3. Az

$$f(x, c)=\begin{cases}\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{\frac{c^2}{2x}}}{(-x)^{3/2}} & (x<0)\\ 0 & (x\geqq 0)\end{cases} \quad (c>0)$$

*sűrűségfüggvény*. Ez a 2. alatti tükörképe. Itt

$$\varphi(t)=e^{-c|t|^{1/2}\{1+i\,\mathrm{sgn}\,t\}},\quad A=1/2,\quad B=1,$$

$$\Omega(A)=1,\quad m=1,\quad n=2,\quad P=1,\quad M=1,\quad \varkappa=1;$$

parciális differenciálegyenletünk ekkor

$$2\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}=0 \quad (c>0).$$

4. Az
$$f(x,c)=\frac{1}{2\sqrt{3}\pi}\frac{e^{\frac{x^3}{2c^2}}}{x}W_{-\frac{1}{2},\frac{1}{6}}\left[\frac{2x^3}{27c^2}\right]\quad (c>0)$$
*sűrűségfüggvény.* Itt $W_{\nu,\mu}(x)$ a *Whittaker*-féle függvény (vö. ZOLOTAREV *(1954)*). Most
$$\varphi(t)=e^{-c|t|^{3/2}\{1+i\operatorname{sgn} t\}},\quad A=3/2,\quad B=-1,$$
$$\Omega(A)=-1,\quad m=3,\quad n=2,\quad P=1,\quad M=1,\quad \varkappa=2.$$
Parciális differenciálegyenletünk ekkor
$$2\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}=0\quad (c>0).$$
5. Az
$$f(x,c)=-\frac{1}{2\sqrt{3}\pi}\frac{e^{-\frac{x^3}{2c^2}}}{x}W_{-\frac{1}{2},\frac{1}{6}}\left[\frac{-2x^3}{27c^2}\right]\quad (c>0)$$
*sűrűségfüggvény.* Ez a 4. alatti tükörképe. Itt
$$\varphi(t)=e^{-c|t|^{3/2}\{1-i\operatorname{sgn} t\}},\quad A=3/2,\quad B=1,$$
$$\Omega(A)=1,\quad m=3,\quad n=2,\quad P=-1,\quad M=1,\quad \varkappa=1.$$
Parciális differenciálegyenletünk ekkor
$$2\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}=0\quad (c>0).$$

4. *Stabilis sűrűségfüggvények bizonyos sorbafejtései és rokon eredmények.*

A 3. alatti parciális differenciálegyenletek révén sorbafejtéseket kaphatunk stabilis sűrűségfüggvényekre. Alapjuk a

4. TÉTEL. *Legyen $s_A(x,B,c)$ stabilis sűrűségfüggvény, melynek karakterisztikus függvénye*
$$\varphi(t)=e^{-c|t|^A\{1+iB\operatorname{sgn} t\cdot\Omega(A)\}}$$
*ahol* $c>0$, $0<A\leqq 2$, $|B|\leqq 1$, $\Omega(A)=\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{\pi A}{2} & (A\neq 1)\\ 0 & (A=1)\end{cases}$. *Akkor* $s_A(x,B,c-y)$ $(y<c)$ *bármely $x$ mellett $y$ analitikus függvénye, ha* $y<\dfrac{c}{\sqrt{1+B^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi A}{2}}}$

(MEDGYESSY *(1956)*).

A bizonyítás megtalálható MEDGYESSY (*(1956)*, *(1961a)* pp. 204—207 munkáiban.

A tétel folytán
$$s_A(x,B,c-y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-y)^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n}{\partial c^n}s_A(x,B,c)\quad\left(y<\frac{c}{\sqrt{1+B^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi A}{2}}}\right).$$

A sorbafejtés egy szelete felírásakor kapott maradéktag, valamint bizonyos általánosítások megtalálhatók MEDGYESSY *(1956)*, *(1961a)* pp. 204—207 munkáiban.

Legyen $A=2$; ekkor $s_2(x, B, c) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4c}}}{\sqrt{4\pi c}}$. 3. a) példája alapján $s_2(x, B, c)$ kielégíti a

$$\frac{\partial s_2}{\partial c} - \frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} = 0 \quad (c>0;\ -\infty<x<\infty)$$

paraciális differenciálegyenletet. Fennáll az

5. TÉTEL.

$$s_2(x, B, c-y) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4(c-y)}}}{\sqrt{4\pi(c-y)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} s_2(x, B, c) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4c}}}{\sqrt{4\pi c}} \qquad (y<c)$$

(MEDGYESSY *(1961a)* pp. 93—101, 213—216).

A *bizonyítás* az előző tételen és a stabilis sűrűségfüggvények akárhányszori differenciálhatóságán alapszik, a részletek: MEDGYESSY *(1961a)*, pp. 93—101, 213—216; az utóbbi helyen $s_2(x, B, c)$ helyett bizonyos analitikus függvényre és $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ helyett általánosabb — de ezt magába foglaló — operátor felhasználásával van kimondva a tétel. Eredményünk közvetlenül is megkapható és igaz $x$ helyett $(x-y)$-t írva is (vö. az V. 3. §. 1. tétellel).

Az 5. tétel hátterében álló parciális differenciálegyenlet vizsgálata megmutatja, hogy a *normálison* kívül nincs más $s_A(x, B, c)$ stabilis sűrűségfüggvény, mely kielégít egy $\frac{\partial s_A}{\partial c} - A_1 \frac{\partial^r s_A}{\partial s_A^r} = 0$ ($c>0$, $-\infty<x<\infty$, $A_1$ konstans, $r=1, 2, \ldots$) típusú parciális differenciálegyenletet, és amelyre ily módon fennáll egy a tételbelihez hasonló sorfejtés.

6. TÉTEL. *Ha $s_A(x, B, c)$ kielégíti a*

$$\frac{\partial^2 s_A}{\partial c^2} - A_2 \frac{\partial^m s_A}{\partial x^m} = 0 \quad (c>0, \quad -\infty<x<\infty)$$

*parciális differenciálegyenletet, ahol $A_2$ egy konstans, akkor*

$$\frac{1}{2}[s_A(x, B, c-y)+s_A(x, B, c+y)] = G(x,y) =$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} A_2^n \frac{\partial^{mn}}{\partial x^{mn}} s_A(x, B, c) \qquad \left( y = \frac{c}{\sqrt{1+B^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi A}{2}}} \right)$$

(MEDGYESSY *(1961a)*, pp. 213—216).

A bizonyítás, mely az 5. tételhez hasonló, $s_A(x, B, c)$ helyett bizonyos analitikus függvényre és a $\frac{\partial^m}{\partial x^m}$ operátor helyett ezt is magába foglaló általánosabb operátor-típusra kimondva megtalálható MEDGYESSY *(1961a)* pp. 213—216 munkájában.

PÉLDÁK. 1. Legyen $A=1$, $B=0$, és így $s_1(x, 0, c) = \frac{1}{\pi c}\frac{1}{1+x^2/c^2}$. 3. b) 1. példája alapján $\frac{\partial^2 s_1}{\partial c^2}+\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} = 0$ $(c>0)$. A tétel alapján ekkor

$$\frac{1}{2}[s_1(x, 0, c-y)+s_1(x, 0, c+y)] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi(c-y)}\cdot\frac{1}{1+x^2/(c-y)^2}+\frac{1}{\pi(c+y)}\cdot\frac{1}{1+x^2/(c+y)^2}\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}(-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}s_1(x, 0, c) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}(-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\left(\frac{1}{\pi c}\frac{1}{1+x^2/c^2}\right).$$

Ez $x$ helyett $x-y$-t írva is igaz.

2. Legyen $A=1/2$, $B=-1$ és

$$s_{1/2}(x, -1, c) = \begin{cases}\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{c^2}{2x}}}{x^{3/2}} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases} \quad (c>0).$$

3. b) 2. példájában láttuk, hogy $\frac{\partial^2 s_{1/2}}{\partial c^2}-2\frac{\partial s_{1/2}}{\partial x} = 0$ $(c>0)$. Ekkor tételünk alapján

$$\frac{1}{2}[s_{1/2}(x, -1, c-y)+s_{1/2}(x, -1, c+y)] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(c-y)}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{(c-y)^2}{2x}}}{x^{3/2}}+\frac{(c+y)}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{(c+y)^2}{2x}}}{x^{3/2}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}2^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}s_{1/2}(x, -1, c) =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}2^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{c^2}{2x}}}{x^{3/2}}\right) \quad \left(y<\frac{c}{\sqrt{2}}\right),$$

ha $x>0$, egyébként zérus. (MEDGYESSY *(1961a)*, pp. 110—121, 213—216.)

5. *Stabilis sűrűségfüggvényekre fennálló parciális integro-differenciálegyenletek.* Legyen $s_A(x, B, c)$ az előbbi. Míg 3.-ban $A$ racionális volt, itt $A$ *irracionális* is lehet.

7. TÉTEL. *Ha* $0<A<1$, *illetve* $1<A<2$, $|B|\leqq 1$, $c>0$, *akkor* $s_A(x, B, c)$ *kielégíti a*

$$\frac{\partial s_A}{\partial c}=\frac{1}{2\Gamma(1-A)\cos\frac{A\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B-\operatorname{sgn}(x-y)}{|x-y|^A}\frac{\partial s_A}{\partial y}\,dy \quad (0<A<1),$$

$$\frac{\partial s_A}{\partial c}=\frac{1}{2\Gamma(2-A)\cos\frac{A\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B\operatorname{sgn}(x-y)-1}{|x-y|^{A-1}}\frac{\partial^2 s_A}{\partial y^2}\,dy \quad (1<A<2)$$

*parciális integro-differenciálegyenletek egyikét* (MEDGYESSY *(1958)*).

A bizonyítás FELLER *(1952)* dolgozatának egy megjegyzésén alapul és megtalálható MEDGYESSY *(1958)*, *(1961 a)* pp. 199—203 munkáiban.

6. *Gamma-sűrűségfüggvényekre fennálló parciális differenciálegyenlet.* Legyen

$$f(x,c)=\begin{cases}\dfrac{x^{\gamma-1}e^{-\frac{x}{c}}}{c^{\gamma}\Gamma(\gamma)} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases} \quad (\gamma>0,\ c>0)$$

$\gamma$-rendű Gamma-sűrűségfüggvény. Fennáll a

8. TÉTEL. *Az* $f(x, c)$ *$\gamma$-rendű Gamma-sűrűségfüggvény kielégíti a*

$$\frac{\partial f}{\partial c}=x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-(\gamma-2)\frac{\partial f}{\partial x} \quad (c>0)$$

*parciális differenciálegyenletet* (MEDGYESSY *(1961 a)* pp. 139—143).

Bizonyítás és kiegészítő megállapítások: MEDGYESSY *(1961a)* pp. 139—142.

7. *A Gamma-sűrűségfüggvény egy sorbafejtése.* A 6. alatti parciális differenciálegyenlet segítségével bizonyítható a

9. TÉTEL. *Ha* $f(x, c)$ *a fenti $\gamma$-rendű Gamma-sűrűségfüggvény, akkor*

$$f(x, c-y)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(x,y)\frac{d^m}{dx^m}f(x,c) \quad (x>0,\quad 0<y<c),$$

*ahol*

$$C_m(x,y)=\sum_{r=m-[m/2]}^{m}\frac{y^r}{r!}E_r^{(m+1-r)}x^{m-r}$$

*és az* $E_r^{(\nu)}$ *mennyiségeket az*

$$E_r^{(\nu)}=-E_{r-1}^{(\nu-1)}+(\gamma-2\nu)E_{r-1}^{(\nu)}+\nu(\gamma-\nu-1)E_{r-1}^{(\nu+1)} \quad (\nu=1,2,\dots,r-1;\ r=0,1,2,\dots)$$

$$(E_r^{(0)}\equiv 0,\quad E_r^{(r+k)}\equiv 0\quad (k>1),\quad E_0^{(1)}=1)$$

*rekurzív összefüggés definiálja* (MEDGYESSY *(1961a)* pp. 140—141).

Bizonyítás: MEDGYESSY *(1961a)* pp. 140—141.

$C_m(x, y)$ explicit alakja $m=0, 1, \ldots, 5$-re a következő:

$$C_0(x, y) = 1;$$

$$C_1(x, y) = (\gamma-2)y;$$

$$C_2(x, y) = -xy+(\gamma^2-5\gamma+12)\frac{y^2}{2!};$$

$$C_3(x, y) = -(\gamma-3)xy^2+(\gamma^3-7\gamma^2+22\gamma-24)\frac{y^3}{3!};$$

$$C_4(x, y) = \frac{x^2y^2}{2!}-(\gamma^2-5\gamma+12)\frac{xy^3}{2!}+(\gamma^4-12\gamma^3+57\gamma^2-134\gamma+120)\frac{y^4}{4!};$$

$$C_5(x, y) = (\gamma-4)\frac{x^2y^3}{2!}-(\gamma^3-10\gamma^2+40\gamma-60)\frac{xy^4}{3!}+$$

$$+(\gamma^5-15\gamma^4+129\gamma^3-488\gamma^2+948\gamma-720)\frac{y^5}{5!}.$$

8. *Pólya-féle sűrűségfüggvényt képviselő magfüggvényű konvolúciós transzformálttal előállított függvények előjelváltás-száma.*

A II. 1. §-ban definiált *Pólya*-féle sűrűségfüggvények egy tulajdonságán alapszik a

10. TÉTEL. *Ha $\Lambda(x)$ Pólya-féle sűrűségfüggvény és $f(x)$ egy korlátos függvény, akkor a*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(x-t)f(t)dt$$

*konvolúciós transzformált előjelváltás-száma legfeljebb akkora, mint $f(x)$ előjelváltás-száma* (SCHOENBERG *(1951)*).

A bizonyítás megtalálható SCHOENBERG *(1951)*, *(1953)* munkáiban.

## Kiegészítések és problémák a II. 8. §-hoz

1. Az 1. tétellel kapcsolatban megjegyezzük, hogy ha $\varphi_1(t)$, ill. $\varphi_2(t)$ *nem* korlátlanul osztható eloszlásfüggvényhez tartozik, akkor az a kérdés, hogy $\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$ mikor karakterisztikus függvény, csak az erre vonatkozó pár kritérium segítségével vizsgálható; ezek megtalálhatók tk. PÓLYA *(1949)*; GIRAULT *(1955)*; LINNIK *(1960)*; LUKÁCS *(1964)* munkájában.

2. Egyes stabilis sűrűségfüggvények bizonyos transzformációval egy a *Laplace*-féle egyenlettel kapcsolatos kerületiérték-feladat megoldásával is azonosíthatók (ZOLOTAREV *(1956)*; IBRAGIMOV, LINNIK *(1965)* p. 57). — Stabilis sűrűségfüggvényekre nemcsak parciális, hanem közönséges differenciálegyenletek is fennállnak; lásd LINNIK *(1954)*; ZOLOTAREV *(1954)*; IBRAGIMOV, LINNIK *(1965)* p. 54.

3. A 4. pontban felsoroltakon kívül stabilis sűrűségfüggvények más sorbafejtései is ismertek; l. POLLARD *(1946)*; BERGSTRÖM *(1952)*, *(1953)*; IBRAGIMOV, LINNIK *(1965)* pp. 60—63.

4. A 4. tétel könnyen kiterjeszthető *komplex* y értékekre is (MEDGYESSY *(1956)*).

5. A 6. tétellel kapcsolatban megjegyezzük, hogy a hátterében álló parciális differenciálegyenlet vizsgálata megmutatja, hogy *a Cauchy-sűrűségfüggvény és a Pearson-féle V. típusú sűrűségfüggvényen kívül még három másik stabilis sűrűségfüggvény van* (l. 3.b) 3.—5.), melyre igaz a tételben szereplő sorbafejtés. — A stabilis sűrűségfüggvényekre fennálló általános parciális differenciálegyenlet is kombinálható volna a 4. tételbeli sorfejtéssel, de az eredmény nehezen tekinthető át. — Mindezek bizonyítása stb. megtalálható MEDGYESSY *(1956)*, *(1961a)* pp. 110—121 munkáiban.

6. Megjegyezzük, hogy a 8. §. 3.—6. tételei a bennük szereplő stabilis sűrűségfüggvényeknek egy másik, a *c* paramétertől független sűrűségfüggvénnyel való *konvolúciójára* is érvényesek.

7. A 7. tétel eredményeinek egy kiterjesztését közli IBRAGIMOV, LINNIK *(1965)* pp. 54—56.

8. Érdekes, hogy az $A=1$, $B\neq 0$ paraméterértékekkel jellemzett stabilis sűrűségfüggvények mind a 3. tétel, mind pedig a 7. tétel hatásköréből egyaránt *kiesnek*. Megoldatlan probléma, eleget tesznek-e egyáltalán valamilyen differenciál- stb. egyenletnek (mint tudjuk, integrálegyenletnek eleget tesznek; l. II. 1. § 1.1.1.).

## HIVATKOZÁSOK

AISSEN, M.—SCHOENBERG, I. J.—WHITNEY, A. M.:
1952 On the generating functions of totally positive sequences. I. *J. Analyse Math.* **2** (1952) 93—103.

AITCHISON, J.—BROWN, J. A. C.:
1957 *The lognormal distribution with special reference to its uses in economics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1957.

ALEKSZANDROV, L.:
1970 Reguljarizovannüj vücsiszlitel'nüj proceszsz dlja analiza ekszponencial'nüh zaviszimosztej. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **10** (1970) 1285—1287.

ARCANGELI, R.:
1968 Un problème de résolution retrograde de l' équation de la chaleur. *Rev. Française Informat. Recherche Opérationelle* **2** (1968) No 13, 61—78.

ARMSTRONG, B. H.:
1967 Spectrum line profiles: The Voigt function. *J. Quant. Spectrosc. Radiative Transfer* **7** (1967) 61—88.

ARSZENIN, V. JA.—IVANOV, V. V.
1968 O resenii nekotorüh integral'nüh uravnenij I roda tipa szvertki metodom reguljarizacii. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **8** (1968) 310—321.

DE BALBINE, G.—FRANKLIN, J. N.:
1966 The calculation of Fourier integrals. *Math. Comp.* **20** (1966) 570—589.

BARNDORFF—NIELSEN, O.:
1965 Identifiability of mixtures of exponential families. *J. Math. Anal. Appl.* **12** (1965) 115—121.

BELLMAN, R.:
1960 On the separation of exponentials. *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) **15** (1960) 38—39.
1969 A new method for the identification of systems. *Math. Biosci.* **5** (1969) 201—204.

BELLMAN, R. E.—KAGIWADA, H. H.—KALABA, R. E.:
1965 On the identification of systems and the unscrambling of data, I. Hidden periodicities. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **53** (1965) 907—910.

BELLMAN, R. E.—KALABA, R. E.:
1965 *Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems.* American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1965.

BELLMAN, R.—KALABA, R. E.—LOCKETT, J.:
1965*a* Dynamic programming and ill-conditioned linear systems. *J. Math. Anal. Appl.* **10** (1965) 206—215.
1965*b* Dunamic programming and ill-conditioned linear systems — II. *J. Math. Anal. Appl.* **12** (1965) 393—400.
1966 Dynamic programming and ill-conditioned systems. *Numerical inversion of the Laplace-transform: Applicaitons to biology, economics, engineering and physics.* American Elsevier Publ. Co., Inc., New York, 1966; pp. 135—173.

BERENCZ FERENC:
1955*a* Megjegyzések az abszorpciós görbék analiziséhez. *Magyar Fizikai Folyóirat* **3** (1955) 271—278.
1955*b* Bemerkungen zur Analyse der Absorptionskurven. *Acta Phys. Acad. Sci. Hungar.* **4** (1955) 317—326.

BERGSTRÖM, H.:
1952 On some expansions of stable distribution functions. *Ark. Mat.* **2** (1952) 375—378.
1953 Eine Theorie der stabilen Verteilungsfunktionen. *Arch. Math.* **4** (1953) 380—391.

BERNSTEIN, F.:
1932 Verallgemeinertes Galtonbrett zur Durchführung von Funktionaltransformationen. *Z. Physik* **77** (1932) 104—113.

BÉKÉSI GÁBOR:
1967 A Gauss-analízis. Tudományos diákköri szakdolgozat (1966—1967). Budapest, 1967.

BHATTACHARYA, C. G.:
1967 A simple method of resolution of a distribution into Gaussian components. *Biometrics* **23** (1967) 115—135.

BIRNBAUM, Z. W.:
1948 On random variables with comparable peakedness. *Ann. Math. Statist.* **19** (1948) 76—81.

BLISCHKE, W. R.:
1962 Moment estimations for the parameters of a mixture of two binomial distributions. *Ann. Math. Statist.* **33** (1962) 444—454.
1964 Estimating the parameters of mixtures of binomial distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **59** (1964) 510—528.
1965 Mixtures of discrete distributions. *Classical and Contagious Discrete Distributions.* Proceedings of the International Symposium held at McGill University, Montreal, Que., Canada, August 15—August 20, 1963. (Ed. by Ganapati P. Patil). Statistical Publishing Society, Calcutta, 1965; 351—372.

BRACEWELL, R. N.:
1955*a* Correcting for Gaussian aerial smoothing. *Austral. J. Phys.* **8** (1955) 54—60.
1955*b* A method of correcting the broadening of *X*-ray line profiles. *Austral. J. Phys.* **8** (1955) 61—67.

BRACEWELL, R. N.—ROBERTS, J. A.:
1954 Aerial smoothing in radio astronomy. *Austral. J. Phys.* **7** (1954) 615—640.

BROWN, G. M.
1933 On sampling from compound populations. *Ann. Math. Statist.* **4** (1933) 288—342.

BROWNELL, G. L.—CALLAHAN, A. B.:
1963 Transform methods for tracer data analysis. *Ann. New York Acad. Sci.* **108** (1963) Article 1: Multicompartment analysis of tracer experiments; pp. 172—181.

BRUNK, H. D.:
1953 Approximate solution of an initial value problem by generalized cardinal series. *Quart. Appl. Math.* **11** (1953) 285—294.

BUCHANAN-WOLLASTON, H. G.—HODGESON, W. C.:
1929 A new method of treating frequency curves in fishery statistics, with some results. *J. Cons.* **4** (1929) 207—225.

BUCKINGHAM, R. A.:
1957 *Numerical methods.* Pitman and Sons, Ltd., London, 1957.

BURGER, H. C.—van CITTERT, P. H.:
1932 Wahre und scheinbare Intensitätsverteilung in Spektrallinien. *Z. Physik* **79** (1932) 722—730.
1933 Wahre und scheinbare Intensitätsverteilung in Spektrallinien. II. *Z. Physik* **81** (1933) 428—434.

BURRAU, C.:
1934 The half-invariants of two typical laws of errors, with an application to the problem of dissecting a frequency curve into components. *Skand. Aktuarietidskr.* **17** (1934) 1—6.

CARNAHAN, C. L.:
1964 A method for the analysis of complex peaks occurring in gamma ray pulse height distributions. *Nuclear Instrum. Methods* **30** (1964) 165—183.

CARVER, J. H.—LOKAN, K. H.:
1957 Determination of photonuclear cross sections. *Austral. J. Phys.* **10** (1957) 312—319.

CASSIE, R. M.:
1954 Some uses of probability paper for the graphical analysis of polymodal frequency distributions. *Austral J. Mar. Freshw. Res.* **5** (1954) 513—522.

CHARLIER, C. V. L.:
1905 Researches into the theory of probability. *Acta Univ. Lund.* Neue Folge. Abt. 2. **1** (1905) No. 5, 33—38.

CHARLIER, C. V. L.—WICKSELL, S. D.:
1925 On the dissection of frequency functions. *Ark. Mat. Astr. Fys.* **18** (1924/25) No. 6, 1—64.

CHILDERS, H. M.:
1959 Analysis of single crystal pulse-height distribution. *Rev. Sci. Instrum.* **30** (1959) 810—814.

CHUNG, K. L.:
1953 Sur les distributions unimodales. *C. R. Acad. Sci. Paris* **236** (1953) 583—584.

van CITTERT, P. H.:
1931 Zum Einfluss der Spektralbreite auf die Intensitätsverteilung in Spektrallinien. *Z. Physik* **69** (1931) 298—308.

COHEN, A. C. jr.:
9167 Estimation in mixtures of two normal distributions. *Technometrics* **9** (1967) 15—28.

CRAIG, L. C.:
1944 Identification of small amounts of organic compounds by distribution studies. II. Separation by counter-current distribution. *J. Biol. Chem.* **155** (1944) 519—534.
1951 Automatic counter-current distribution equipment. *Analyt. Chem.* **23** (1951) 1236—1244.

CRAMÉR, H.:
1925 On some classes of series used in mathematical statistics. *Matematiker Kongressen i København 31. August—4. September* 1925 (Den sjette Skandinaviske Matematikerkongres). København, 1925; pp. 399—426.
1946 *Mathematical methods of statistics.* Princeton University Press, Princeton, 1946; Pp. 226—227.

CROUT, P. D.:
1940 An application of polynomial approximation to the solution of integral equations arising in physical problems. *J. Math. and Phys.* **19** (1940) 34—92.

CRUM, W. L.:
1923 The use of the median in determining seasonal variation. *J. Amer. Statist. Assoc.* **1923**, March, 607—614.

CSUDOV, L. A.:
1967 Raznosztnüe szhemü i nekorrektnüe zadacsi dlja uravnenij sz csasztnimi proizvodnimi. *Vyčisliteľnye metody i programmirovanie.* VIII. Izd. Moszkov. Univ., Moszkva, 1967; pp. 34—62.

DAEVES, K.:
1933 *Praktische Grosszahl-Forschung.* VDI-Verlag GMBH, Berlin, 1933.
1951 *Vorausbestimmungen im Wirtschaftsleben.* W. Girardet, Essen, 1951.

DAEVES, K.—BECKEL, A.:
1948 *Grosszahlforschung und Häufigkeitsanalyse.* Verlag Chemie, Weinheim/Bergstr., 1948.
1958 *Grosszahl-Methodik und Häufigkeitsanalyse.* 2. Aufl. Verlag Chemie, Weinheim/Bergstr., 1958.

DEFARES, J. G.—SNEDDON, I. N.:
1960 *An introduction to the mathematics of medicine and biology.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1960; pp. 582—586.

DOBOZY, O. K.—VOLLY, T.:
1970 The anomalous properties of cystine and their effect on keratine. (Előadás: Fourth International Wool Textile Research Conference, Berkeley, California, 18—27. August 1970.) Kézirat. Budapest, 1970.

DOETSCH, G.:
1926 Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. III. Mitteilung. Der lineare Wärmeleiter mit beliebiger Anfangstemperatur. Die zeitliche Fortsetzung des Wärmezustandes. *Math. Z.* **25** (1926) 608—626.
1928 Die Elimination des Dopplereffekts bei spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten. *Z. Physik* **49** (1928) 705—730.
1936 Zerlegung einer Funktion in Gauss'sche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. *Math. Z.* **41** (1936) 283—318.
1950 *Handbuch der Laplace-Transformation.* Band I. Theorie der Laplace-Transformation. Birkhäuser, Basel, 1950.

DOLGOPOLOVA, T. F.—IVANOV, V. K.:
1966 O csiszlennom differencirovanii. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **6** (1966) 570—576.

DOMBROVSZKAJA, I. N.—IVANOV, V. K.:
1965 K teorii nekotorüh linejnüh uravnenij v absztraktnüh prosztransztvah. *Sibirsk. Mat. Ž.* **6** (1965) 499—508.

DOUGLAS, J. jr.:
1960 Mathematical programming and integral equations. *Symposium on the Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations, Integral and Integro-Differential Equations* (Rome, 1960). Birkhäuser, Basel, 1960; pp. 269—274.

DUGUÉ, D.—GIRAULT, M.:
1955 Fonctions convexes de Pólya. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **4** (1955) 3—10.

DYSON, F.:
1926 A method tor correcting series of parallax abservations. *Monthly Notices Roy, Astronom. Soc.* **86** (1926) 686—706.

EDDIGTON, A. S.:
1913 On a formula for correcting statistics for the effects of a known probable error of observations. *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* **73** (1913) 359—360.

EDREI, A.:
1952 On the generating function of totally positive sequences. II. *J. Analyse Math.* **2** (1952) 104—109.
1953*a* Proof of a conjecture of Schoenberg on the generating function of a totally positive sequence. *Canad. J. Math.* **5** (1953) 86—94.
1953*b* On the generating function of a doubly infinite, totally positive sequence. *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953) 367—383.

ELSTE, G.:
1953 Die Entzerrung von Spektrallinien unter Verwendung von Voigtfunktionen. *Z. Astrophys* **33** (1953—1954) Heft 1, 39—73.

EMSLIE, L.A.J.—KING, G. W.:
1953 Spectroscopy from the point of view of the communication theory, II. Line-width. *J. Opt. Soc. Amer.* **43** (1953) 658—663.

FADDEEVA, V. N.—TERENT'EV, N. M.:
1954 Tablicü znacsenij funkcii

$$w(z)=e^{-z^2}\left(1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{t^2}dt\right)$$

*ot komplekssznogo argumenta.* Gosztehizdat, Moszkva, 1954.

FEJÉR, L.:
1914 Nombre des changements de signe d'une fonction dans un intervalle et ses moments. *C. R. Acad. Sci. Paris* **158** (1914) 1328—1331.

FEKETE, M.—PÓLYA, G.:
1912 Über ein Problem von Laguerre. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **34** (1912) 89—120.

FELLER, W.:
1957 *An introduction to probability theory and its applications.* Volume I. Second edition. J. Wiley and Sons, Inc., New York, 1957.
1966 *An introduction to probability theory and its applications.* Volume II. J. Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.

de FINETTI, B.:
1930 Le funzioni caratteristiche di legge instantanea. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* Ser. 6. **12** (1930) 278—282.

FISZ, M.:
1962 Infinitely divisible distributions. Recent results and applications. *Ann. Math. Statist.* **33** (1962) 68—84.

FLYNN, C. P.—SEYMOUR, E.F.W.:
1960 The correction of spectral line shapes for instrumental and other broadening. *Proc. London Phys. Soc.* **75** (1960) 337—344.

FRANKLIN, J. N.:
1970 Well-posed stochastic extensions of ill-posed linear problems. *J. Math. Anal. Appl.* **31** (1970) 682—716.

FRÉCHET, M.:
1939 Sur les formules de répartition des revenus. *Rev. Inst. Internat. Statist.* **7** (1939) 32—38.
1945 Nouveaux essais d'explication de la répartition des revenues. *Rev. Inst. Internat. Statist.* **13** (1945) 16—32.

FRIDRIK, F.:
1967 Ob odnom ekszperimente po reseniju integral'nüh uravnenij I. roda. *Metody Vyčisl.* Vyp. 4. Izd. Leningrad. Univ., Leningrad, 1967; pp. 102—109.

GARDNER, D. G.:
1963 Resolution of multi-component exponential decay curves using Fourier transforms. *Ann. New York Acad. Sci.* **108** (1963) Article 1: Multi-compartment analysis of tracer experiments; pp. 195—203.

GARDNER, D. G.—GARDNER, J. C.—LAUSH, G.—MEINKE, W. W.:
1959 Method for the analysis of multi-component exponential decay curves. *J. Chem. Phys.* **31** (1959) 978—896.

GAUSS. C. F.:
1866 Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. *Werke,* Band 3. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1866; pp. 165—196.

GAVURIN, M. K.:
1967 O metode A. N. Tihonova resenija nekorrektnüh zadacs. *Metody Vyčisl.* Vyp. 4. Izd. Leningr. Univ., Leningrad, 1967; pp. 21—25.

GIACCARDI, F.:
1939 Di un tentativo di rappresentazione analitica dello sviluppo in peso dell' organismo umano. *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **74** (1939) 459—469.

GIRAULT, M.:
1955 Les fonctions caractéristiques et leurs transformations. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **4** (1955) 223—299.

GLASZKO, V. B.—ZAIKIN, P. N.:
1966 O programme reguljarizirujuscsego algoritma dlja uravnenija Fredgol'ma pervogo roda. *Vyčislitel'naja matematika i programmirovanie.* V. Izd. Moskov. Univ., Moszkva, 1966; pp. 61—73.

GNEDENKO, B. V.:
1954 *Kursz teorii verojatnostej.* Izdanie vtoroe. Gosztehizdat. Moszkva, 1954.

GNEDENKO, B. V.—KOLMOGOROV, A. N.:
1954 *Limit distributions for sums of independent random variables.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Cambridge, Mass., 1954.

GODWIN, H. J.:
1964 *Inequalities on distribution functions.* Griffin, London, 1964.

GORBUNOV, A. D.:
1967 O resenii nelinejnüh kraevüh zadacs dlja szisztemü obüknovennüh differencial'nüh uravnenij. *Vyčislitel'nye metody i programmirovanie.* VIII. Izd. Moszkov. Univ., Moszkva, 1967; pp. 186—199.

GOTTSCHALK, V.H.:
1948 Symmetrical bimodal frequency curves. *J. Franklin Inst.* **245** (1948) 245—252.

GRABAR, L.P.:
1967*a* Primenenie polinomov Csebüseva, ortonormirovannüh na sziszteme ravnootsztojascsih tocsek, dlja resenija integral'nüh uravnenij pervogo roda. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **172** (1967) 767—770.
1967*b* Primenenie polinomov Csebüseva, ortonormirovannüh na sziszteme ravnootsztojascsih tocsek, dlja csiszlennogo differencirovanija. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **7** (1967) 1375—1379.

GRAF, U.—HENNING, H.-J.:
1960 *Statistische Methoden bei textilen Untersuchungen.* III. ber. Neudruck. Springer. Berlin, 1960

GREGOR, J.:
1969 An algorithm for the decomposition of a distribution into Gaussian components. *Biometrics* **22** (1969) 79—93.

GUMBEL, E. J.:
1939 La dissection d'une répartition. *Ann. Univ. Lyon Sect. A.* **11** (1939) 39—51.

HADAMARD, J.:
1902 Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Bull. Univ. Princeton* **13** (1902) 49—52.
1932 *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Hermann, Paris, 1932.

HALD, A.:
1953 *Statistical theory with engineering applications.* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1952.

HAMMING, R. W.:
1962 Numerical methods for scientists and engineers. McGraw—Hill Book Co. Inc., New York, 1962.

HARDING, J. F.:
1949 The use of probability paper for the graphical analysis of polymodal frequency distributions. *J. Mar. Biol. Assoc. U. K.* **28** (1949) 141—153.

HÄMMERLIN, G.:
1963 Über ableitungsfreie Schranken für Quadraturfehler. *Numer. Math.* **5** (1963) 226—233.

HILDEBRAND, F. B.:
1956 *Introduction to numerical analysis.* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1956.

HILDEBRAND, F. B.—CROUT, P. D.:
1941 A least square procedure for solving integral equations by polynomial approximation. *J. Math. and Phys.* **20** (1941) 310—335.

HINCSIN, A. Ja.:
1937 Ob arifmetike zakonov raszpredelenija. *Bjull. Mosk. Gos. Univ. Math. Meh.* **1** (1937) No. 1, 6—17.
1938a *Predel'nüe teoremü dlja szumm nezaviszimüh szlucsajnüh velicsin.* GONTI, Moszkva, 1938.
1938b Ob unimodal'nüh raszpredelenijah. *Izv. Nauč.-Issled. Inst. Mat. Meh. Tomsk. Gos. Univ.* **2** (1938) No. 2, 1—7.

HINCSIN, A. Ja. (KHINTCHINE, A. Ya.) — LÉVY, P.:
1937 Sur les lois stables. *C. R. Acad. Sci. Paris* **202** (1937) 374—376.

HIRSCHMAN, I. I.:
1950 Proof of a conjecture of I. J. Schoenberg. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950) 63—65.

HIRSCHMAN, I. I.—WIDDER, D. W.:
1949 The inversion of a general class of convolution transforms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **66** (1949) 135—201.
1955 *The convolution transform.* Princeton University Press, Princeton, 1955.

HOLGATE, P.:
1970 The modality of some compound Poisson distributions. *Biometrika* **57** (1970) 666—667.

HOUSEHOLDER, A. S.:
1950 Analyzing exponential decay curves. *Proceedings of the Seminar on Scientific Computation, November,* 1949. International Business Machines Corp., New York, 1950; pp. 28—32.

van de HULST, H. C.:
1941 The determination of the true profile of a spectral line. *Bull. Astronom. Inst. Netherlands* **9** (1941) 225—228.
1946a Generalization of some methods for solving an integral equation of the first kind. *Bull. Astronom. Inst. Netherlands* **10** (1946) 75—79.
1946b Instrumental distortion of weak spectral lines. *Bull. Astronom. Inst. Netherlands* **10** (1946) 79.

HUNT, B. R.:
1970 The inverse problem of radiography. *Math. Biosci.* **8** (1970) 161—179.

HUSUNG, E.:
1938 Untersuchung über die Titerungleichmässigkeit von Zellwollen und über deren praktische zahlenmässige und zeichnerische Auswertung. *Melliand Textilber.* **19** (1938) 886, 956.

IBRAGIMOV, I. A.:
1956 O kompozicii odnoversinnüh raszpredelenij. *Teor. Verojatnost. i Primenen.* **1** (1956) 283—288.

IBRAGIMOV, I. A.—CSERNIN, K. E.:
1959 Ob odnoversinnoszti usztojcsivüh zakonov. *Teor. Verojatnost. i Primenen.* **4** (1959) 453—456.

IBRAGIMOV, I. A.—LINNIK, Ju. V.:
1965 *Nezaviszimüe i sztacionarno szvjazannüe velicsinü.* Nauka, Moszkva, 1965.

IDU, S. M.—CUCU, N.B.:
1959 Zur Auswertung von Elektrophorese — Diagrammen. *Hoppe-Seyler's Zeitschrift für physiologische Chemie* **314** (1959) 284—288.

INOUYE, T.:
1964 The super resolution of gamma-ray spectrum. *Nuclear Instrum. Methods* **30** (1964) 224—228.

ISII, K.:
1958 Note on a characterization of unimodal distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.* **9** (1958) 173—184.

ITO, K.:
1960 *Verojatnosztnüe proceszszü.* Vüpuszk I. Izd. Inosztrannoj Literaturü, Moszkva, 1960.

IVANOV, V. K.:
1962*a* Integral'nüe uravnenija pervogo roda i priblizsennoe resenie obratnoj zadacsi potenciala. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **142** (1962) 998—1000.
1962*b* O linejnüh nekorrektnüh zadacsah. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **145** (1962) 270—272.
1963 O nekorrektno posztavlennüh zadacsah. *Mat. Sb.* **61** (1963) 211—222.
1966*a* O ravnomernoj reguljarizacii neusztojcsivüh zadacs. *Sibirsk. Mat. Ž.* 7 (1966) 546—558.
1966*b* O priblizsennom resenii operatornüh uravnenij pervogo roda. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* 6 (1966) 1089—1094.
1967 Ob integral'nüh uravnenijah Fredgol'ma pervogo roda. *Differencial'nye Uravnenija* **3** (1967) 410—421.

JANTZEN, E.:
1932 *Das fraktionierte Destillieren und das fraktionierte Verteilen als Methoden zur Trennung von Stoffgemischen.* Verl. Chemie, Weinheim, 1932.

JOHN, F.:
1955*a* Numerical solution of the equation of heat conduction for preceding times. *Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 4.* **40** (1955) 129—142.
1955*b* Differential equations with approximate and improper data. Lecture notes. New York. 1955.

JONES, J. G.:
1961 On the numerical solution of convolution integral equations. *Math. Comp.* **15** (1961) 131—142.

JORDAN KÁROLY:
1927 *Matematikai statisztika.* Athenaeum, Budapest, 1927.

KAHN, F. D.:
1955 The correction of observational data for instrumental band width. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **51** (1955) 519—525.

KAPLAN, B. G.—GURVICS, K. E.:
1963 Kompleksznoe primenenie matematicseszkih metodov k élektroforeticseszkomu iszszledovaniju belkovogo szosztava krovi v norme i patologii. *Primenenie matematicseszkih metodov v biologii.* II. Izd. Leningr. Univ., Leningrad, 1963; pp. 183—190.

KARLIN, S.:
1968 *Total positivity.* Volume I. Stanford University Press, Stanford, California, 1968.

KEATING, D. T.—WARREN, B. E.:
1952 The effect of a low absorption coefficient on X-ray spectrometer measurements. *Rev. Sci. Instrum.* **23** (1952) 519—522.

KEILSON, J.—GERBER, H.:
1971 Some results for discrete unimodality. *J. Amer. Statist. Assoc.* **66** (1971) 386—389.

KIRILLOVA, L. S.—PIONTKOVSZKIJ, A. A.:
1968 Nekorrektnüe zadacsi v teorii optimal'nogo upravlenija (obzor). *Avtomat. i Telemeh.* **1968**, 10, 5—17.

KISS, A.—SÁNDORFY, C.:
1948 Sur les méthodes d'analyse des courbes d'absorption. *Acta Universitatis Szegediensis. Acta Chemica et Physica* **2** (1948) Fasc. 3, 71—76.

KNOLL, F.:
1942 Zur Grosszahlforschung: Über die Zerspaltung einer Mischverteilung in Normalverteilungen. *Arch. Math. Wirtschafts- und Sozialforsch.* **8** (1942) Heft 1, 36—49.

KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA:
1963 Kvázi-konkáv programozási feladat megoldása gradiens vetítési módszerrel. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **13** (1963) 157—178.

KREISEL, G.:
1949 Some remarks on integral equations with kernels $L(\xi_1-x_1, \dots, \xi_n-x_n; \alpha)$. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **197** (1949) 160—183.

KREMER, P.:
1941 An apparatus for facilitating the elimination of the instrumental curve from observed Fraunhofer line profiles. *Bull. Astronom. Inst. Netherlands* **9** (1941) 229.

KUBIK, L.:
1966 On the class of infinitely divisible distributions and on its subclasses. *Studia Math.* **27** (1966) 203—211.

KURTH, R.:
1965 On Eddington's solution of the convolution integral equation. *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) **14** (1965) 76—84.

KÜHNEN, F.:
1909 Methode zur Aufsuchung periodischer Erscheinungen in Reihen equidistanter Beobachtungen. *Astronom. Nachr.* **182** (1909) 1—11.

LABHART, H.:
1947 Ein Auswertegerät für Elektrophoresediagramme. *Experientia* **3** (1947) 36—37.

LANCZOS, C.:
1957 *Applied analysis.* Pitman and Sons, Ltd., London, 1957.

LANDAHL, H. D.:
1963 Some mathematical aspects of multi-compartment analysis of tracer experiments. *Ann. New York Acad. Sci.* **108** (1963) Article 1: Multi-compartment analysis of tracer experiments; pp. 331—335.

LAPIN, A. I.:
1947 O nekotorüh szvojsztvah usztojcsivüh zakonov raszpredelenija. Diplomnaja rabota. Kézirat. Moszkva, 1947.

LARSON, H. P.—KENNETH, L. A.:
1967 A least squares deconvolution technique for the photoelectric Fabry-Perot spectrometer. *Appl. Opt.* **6** (1967) 1701—1705.

LATTÈS, R.—LIONS, J. L.:
1967 *Méthode de quasi-réversibilité et applications.* Dunod, Paris, 1967.

LAVRENT'EV, M. M.:
1962 *O nekotorüh nekorrektnüh zadacsah matematicseszkoj fiziki.* Izd. Szibirszk. Otdel. ANSZSZSZR, Novoszibirszk, 1962.
1966 O posztanovke nekotorüh nekorrektnüh zadacs matematicseszkoj fiziki. *Nekotorye voprosy vyčislitel'noĭ i prikladnoĭ matematiki, Novosibirsk.* Nauka, Moszkva, 1966.

LAVRENT'EV, M. M.—VASZIL'EV, V. G.:
1966 O posztanovke nekotorüh nekorrektnüh zadacs matematicseszkoj fiziki. *Sibirsk. Mat. Ž.* **7** (1966) 559—576.

LEVITIN, E. Sz.—POLJAK, B. T.:
1966 Metodü minimizacii pri nalicsii ogranicsenij. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **6** (1966)787—823.

LÉVY, P.:
1924 Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles. *Bull. Soc. Math. France* **52** (1924) 49—85.
1925 *Calcul des probabilités.* Gauthier-Villars, Paris, 1925.
1937 *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Gauthier-Villars, Paris, 1937.

LINNIK, Ju. V.:
1954 Ob usztojcsivüh verojatnosztnüh zakonah sz pokazatelem men'sim edinicü. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **94** (1954) 619—621.
1960 *Razlozsenija verojatnosztnüh zakonov.* Izd. Leningrad. Univ., Leningrad, 1960.

LINZ, P.:
1969 Numerical methods for Volterra integral equations of the first kind. *Comput. J.* **12** (1969) 393—397.

LIPKA, I.
1938 A Descartes-féle jelszabály kiterjesztéseiről. *Matematikai és Fizikai Lapok* **45** (1938) 78—93.
1942 Über die Abzählung der reellen Wurzeln von algebraischen Gleichungen. *Math. Z.* **47** (1942) 343—351.

LISZKOVEC, O. A.
1966 Reguljarizacija nekorrektnüh zadacs dlja uravnenij matematicseszkoj fiziki. *Differencial'nye Uravnenija* **2** (1966) 1128—1131.
1968 Csiszlennoe resenie nekotorüh nekorrektnüh zadacs metodom kvazi-resenij. *Differencial'nye Uravnenija* **4** (1968) 735—742.
LOEB, J.
1960 La „déconvolution" en calcul numérique. *Ann. Télécommun.* **15** (1960) 84—91.
LONN, E.
1932 Beweis der Eindeutigkeit der Zerlegung einer Intensitätskurve in ihre Komponenten. *Z. Physik* **75** (1932) 348—349.
LUKÁCS, E.
1957 Remarks concerning characteristic functions. *Ann. Math. Statist.* **28** (1957) 717—723.
1961 Recent developments in the theory of characteristic functions. *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.* Volume II. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1961; pp. 307—335.
1964 *Fonctions caractéristiques.* Dunod, Paris, 1964.
1968 Contributions to a problem of D. van Dantzig. *Teor. Verojatnost. i Primenen.* **13** (1968) 114—125.
MACNEE, A. B.:
1953 A high speed product integrator. *Rev. Sci. Instrum.* **24** (1953) 207—211.
MAGOS LÁSZLÓ—MEDGYESSY PÁL:
1954 Elektroforetikus diagrammok matematikai kiértékelése. *Kísérletes Orvostudomány* (Budapest) **6** (1954) 367—369.
MAJOROV, L. V.:
1965 O nekorrektnoszti odnoj obratnoj zadacsi. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **5** (1965) 363—365.
MARTON, K.—VARGA, L.:
1971 Regularization of certain operator equations by filters. *Studia Sci. Math. Hungar.*, **6** (1971) 457—465.
MCPHEE, W. N.:
1963 *Formal theories of mass behaviour.* The Free Press, Glencoe, Ill., 1963.
MEDGYESSY PÁL:
1953 Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetetvőire. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* **2** (1953) 165—177.
1954*a* Diszkrét valószínűség-eloszlások keverékének felbontása összetevőire. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* **3** (1954) 139—153.
1954*b* Újabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* **6** (1954) 155—169.
1954*c* Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire. Disszertáció. Budapest, 1954.
1954*d* Szorzatintegrálás, Fourier-szintézis és hasonló feladatok elvégzése kvadrátplaniméter és egy új készülék kombinációjának segítségével. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* **3** (1954) 129—137.
1955*a* Közelítő eljárás Cauchy-sűrűségfüggvények keverékének összetevőkre bontására. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* **3** (1955) 321—329.
1955*b* Kiegészítés az „Újabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban" című dolgozathoz. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* **3** (1955) 331—341.
1956 Stabilis valószínűség-sűrűségfüggvényekre fennálló parciális differenciálegyenletek és alkalmazásaik. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **1** (1956) 489—518.
1957*a* Anwendungsmöglichkeiten der Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bei der Auswertung von Messungsergebnissen. *Z. Angew. Math. Mech.* **37** (1957) 128—139.
1957*b* A mechanical functional synthesizer. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **2** (1957) 33—42.
1958 Partial integro-differential equations for stable density functions and their applications. *Publ. Math. Debrecen* **5** (1958) 288—293.
1961*a* *Decomposition of superpositions of distribution functions.* Akadémiai Kiadó. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1961.

1961*b* Diszkrét valószínűség-eloszlások áttranszformálása sűrűségfüggvénnyé. (Előadás: A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézeté Valószínűségszámítási Osztályának szemináriuma, 1961. február 9.) Kivonat: *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **6** (1961) 528.
1961*c* On some unsolved problems in the theory of the decomposition of superpositions of distribution functions. II*e Congrès Mathématique Hongrois* Budapest, 24.—31. August 1960. Vol. II. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961; Section IV, pp. 16—18.
1962 Karakterisztikus függvények előállítása keverék formájában. Kézirat. Budapest, 1962.
1963 On the interconnection between the representation theorems of characteristic functions of unimodal distribution functions and of convex characteristic functions. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **8** (1963) 425—430.
1964 Eloszlás- és sűrűségfüggvény-grafikonok alakjának jellemzéséről, I. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **14** (1964) 279—292.
1966*a* Egy konvoluciós típusú integrálegyenlet numerikus megoldása és ennek felhasználása Gauss-függvény szuperpozíciók felbontására. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **16** (1966) 47—64.
1966*b* Remarks on the paper „On the separation of exponentials" of *R. Bellman* [1]. Kézirat. Budapest, 1966.
1966*c* Valószínűség-eloszlások általánosítása és ezzel kapcsolatos faktorizációs problémák. (Előadás: Matematikai Statisztikai Kollokvium, Debrecen. 1966 október 13—15. A Bolyai János Matematikai Társulat és a Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézete szervezésében.) Kivonat: *Matematikai Statisztikai Kollokvium. Debrecen,* 1966. *október* 13—15. *Előadás kivonatok.* Debrecen, 1966; pp. 3—4.
1967*a* Sűrűségfüggvény szuperpozíciók felbontásának egy lényegileg új módszeréről. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **17** (1967) 383—390. (Angol fordítása: An essentially new method for the decomposition of density functions. *Selected translations in mathematical statistics and probability.* Volume 10. American Mathematical Society, Providence, 1972; pp. 170—178.)
1967*b* Szilárd anyagok keverék-voltának megállapítása matematikai módszerekkel. *Tiz példa a matematika gyakorlati alkalmazására.* (Szerkesztette VINCZE ISTVÁN.) Gondolat, Budapest, 1967; pp. 203—223.
1967*c* Eloszlás- és sűrűségfüggvény-grafikonok alakjának jellemzéséről, II. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **17** (1967) 101—108.
1967*d* On a new class of unimodal infinitely divisible distribution functions and related topics. *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967) 441—446.
1968 Valószínűség-eloszlásfüggvények és diszkrét valószínűségeloszlások egycsúcsúságával kapcsolatos problémákról. Kézirat. Budapest, 1967—1968.
1971*a* Inkorrekt matematikai problémák vizsgálatának jelen állásáról, különös tekintettel I. fajú operátoregyenletek megoldására. (Áttekintés.) *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **20** (1971) 97—131.
1971*b* On the unimodality of discrete distributions. *Periodica Mathematica Hungarica;* **2** (1—4) (1972) 245—257.
1971*c* Sűrűségfüggvények és diszkrét eloszlások szuperpozícióinak felbontása. Disszertáció. Budapest, 1971.
1971*d* *Decomposition of superpositions of density functions and discrete distributions.* Akadémiai Kiadó, Budapest; megjelenőben.
MEDGYESSY PÁL—RÉNYI ALFRÉD—TETTAMANTI KÁROLY—VINCZE ISTVÁN:
1954 A kémiai frakcionáló megosztás matematikai tárgyalása nem teljes diffúzió esetében. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* **3** (1954) 81—97.
MEDGYESSY PÁL—VARGA LÁSZLÓ:
1968 Gauss-függvény keverékek numerikus felbontására szolgáló egyik eljárás javításáról. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **18** (1968) 31—39.
MESZÉNA GYÖRGY:
1968 Valószínűségeloszlások és idősorok felbontása. *Szigma* (Budapest) **1** (1968) 60—75.
MESZÉNA GYÖRGY—SCHERF EMIL:
1960 Matematikai-statisztikai vizsgálatok a természetes vizek uránban való feldúsulásának fizikai feltételeiről. *ATOMKI Közl.* (Debrecen) **2** (1960) 190—143.
MILLER, K.:
1964 Theree circle theorems in partial differential equations and applications to improperly posed problems. *Arch. Rational Mech. Anal.* **16** (1964) 126—154.

MORISON SMITH, D.—BARTLET, J. C.:
1961 Calculation of the areas of isolated or overlapping normal probability curves. *Nature* **191** (1961) 688—689.

MOROZOV, C. A.—IVANISCSEV, V. F.:
1966 Primenenie metoda reguljarizacii k raszcsetu arocsnüh plotin. *Vyčislitel'nye metody i programmirovanie*. V. Izd. Moszkov. Univ., Moszkva, 1966; pp. 171—186.

NOBLE, W.—HAYES, J. E. jr.—EDEN, M.:
1959 Repetitive analog computer for analysis of sums of distribution functions. *Proc. IRE* **47** (1959) 1952—1956.

OETTLI, W.—PRAGER, W.:
1964 Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides. *Numer. Math.* **6** (1964) 405—409.

OKA, M.:
1954 Ecological studies on the kidai by the statistical method II. On the growth of kidai. (*Taius tumifrons*). *Bull. Fac. Fish. Nagasaki* **2** (1954) 8—25.

OLSHEN, R. A.—SAVAGE, L. J.:
1970 A generalized unimodality. *J. Appl. Prob.* **7** (1970) 21—34.

ORNSTEIN, L. S.—van WYK, W. R.:
1932 Optische Untersuchung des Akkomodationskoeffizienten der Molekulartranslation und dessen Verteilungsfunktion in einem verdünnten Gase. *Z. Physik* **78** (1932) 734—743.

OVSZEEVICS, I. A.—JAGLOM, A. M.:
1954 Monotonnüe perehodnüe proceszszü v odnorodnüh dlinnüh linijah. *Izv. Akad. Nauk SSSR Otdel. Tehn. Nauk* **1954**, No. 7, 13—20.

PAPOULIS, A.:
1955 Method of correction for the $\alpha_1\alpha_2$ Doublet in the X-ray diffraction lines. *Rev. Sci. Instrum.* **26** (1955) 423—426.

PARSONS, D. H.:
1968 Biological problem involving sums of exponential functions of time: A mathematical analysis that reduces experimental time. *Math. Biosci.* **2** (1968) 123—128.
1970 Biological problems involving sums of exponential functions of time: An improved method of calculation. *Math. Biosci.* **9** (1970) 37—47.

PEARSON, K.:
1894 Contributions to the mathematical theory of evolution. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **185** (1894) 71—110.
1915 On the problem of sexing osteometric material. *Biometrika* **40** (1915) 479—487.

PEARSON, K.—LEE, A.:
1909 On the generalized probable error in multiple normal correlation. *Biometrika* **6** (1908—09) 59—68.

PETER, L.—PETER, W.:
1960 Abkling- und Sättigungsfunktion bei Radionukliden. *Praxis Math.* **2** (1960) 57—61.

PETROV, A. P.:
1967 Ocenki linejnüh funkcionalov dlja resenija nekotorüh obratnüh zadacs. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **7** (1967) 648—654.

PHILLIPS, D. L.:
1962 A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. *J. Assoc. Comput. Mach.* **9** (1962) 84—97.

POLLARD, H. S.:
1934 On the relative stability of the median and arithmetic mean, with particular reference to certain frequency distributions which can be dissected into normal distributions. *Ann. Math. Statist.* **5** (1934) 227—262.

POLLARD, H.:
1946 The representation of $e^{-x^\lambda}$ as a Laplace integral. *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946) 908—910.
1953 Distribution functions containing a Gaussian factor. *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953) 578—582.

PÓLYA, G.:
1915 Algebraische Untersuchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte Null und Eins. *J. Reine Angew. Math.* **145** (1915) 224—249.

1949 Remarks on characteristic functions. *Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.* University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1949; pp. 115—122.

POULIK, M. D.—PINTERIC, L.:
1955 An electronic computer for the evaluation of results of filterpaper electrophoresis. *Nature* **176** (1955) 1226—1227.

PRESTON, E. J.:
1953 A graphical method for the analysis of statistical distributions into two normal components. *Biometrika* **40** (1953) 460—464.

de PRONY, G. C. F. M. R.:
1795 Essai expérimentale et analytique.... *Journal de l'École Polytechnique* (Paris) **1** (2) (1795) 24—76.

RALSTON, A.:
1965 *A first course in numerical analysis.* McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1965.

RAMM, A. G.:
1968 O csiszlennom differencirovanii. *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika* **11** (1968) 131—134.

RAMSTHALER, K.:
1949 Analyse der Faserfestigkeitsverteilung einer Zellwollmischung durch statistische Verfahren und Grosszahlforschung. *Textil-Praxis* **4** (1949) 358, 438.

RAO, C. R.:
1948 The utilisation of multiple measurements in problems of biological classification. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **10** (1948) 159—193.
1952 *Advanced statistical methods in biometric research.* J. Wiley and Sons, Inc., New York, 1952.

REIZ, A.:
1943 On the numerical solution of certain types of integral equations. *Ark. Mat. Astr. Fys.* Band **29** A N:o 29. 1943. 21 pp.

RIDER, P. R.:
1961 The method of moments applied to a mixture of two exponential distributions. *Ann. Math. Statist.* **32** (1961) 143—147.
1962 Estimating the parameters of mixed Poisson, binomial and Weibull distributions by the Method of Moments (1). *Bull. Inst. Internat. Statist.* **39** (1962) 2e Livraison, 225—232.

RIGHINI, G.:
1941 Integratore ottica per la determinazione de profilo vero delle righe spettrali. *Osserv. e. Mem. Arcetri* **60** (1941) 27.

ROSENSTIEHL, P.—GHOUILA-HOURI, A.:
1960 *Les choix économiques, décisions séquentielles et simulation.* Dunod, Paris, 1960.

RUNGE, C.:
1914 Über eine besondere Art von Integralgleichungen. *Math. Ann.* **75** (1914) 130—132.

RUNGE, C.—KÖNIG, R.:
1924 *Vorlesungen über numerisches Rechnen.* Springer, Berlin, 1924.

RUST, B. W.—BURRUS. W. R.:
1972 *Mathematical programming and the numerical solution of linear equations.* American Elsevier Publ. Co., Inc., New York, 1972; chapter 1.

SCHELLENBERG, O.:
1932 Zur Analyse der ultravioletten Emissionen der Erdalkaliphosphore. *Ann. Physik* **5/13** (1932) 249—264.

SCHILLING, W.:
1947 A frequency distribution represented as the sum of two Poisson distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **42** (1947) 407—424.

SCHMAEDEKE, W. W.:
1968 Approximate solutions for Volterra integral equations of the first kind. *J. Math. Anal. Appl.* **23** (1968) 604—613.
1969 A new approach to unstable problems using variational techniques. *J. Math. Anal. Appl.* **25** (1969) 272—275.

SCHMEIDLER, W.:
1950 *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik I. Lineare Integralgleichungen.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1950.

SCHOENBERG, I. J.:
1947 On totally positive functions, Laplace integrals and entire functions of the Laguerre-Polya-Schur type. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 33 (1947) 11—17.
1948 Some analytical aspects of the problem of smoothing. *Studes and essays presented to R. Courant.* Interscience Publishers, Inc., New York, 1948; pp. 351—370.
1951 On Pólya frequency functions. I. The totally positive functions and their Laplace transforms. *J. Analyse Math.* **1** (Deuxième Partie) (1951) 331—374.
1953 On smoothing operations and their generating functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **59** (1953) 199—230.
1954 On multiply positive sequences and functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **60** (1954) 160—161.
1955 On the zeros of the generating functions of multiply positive sequences and functions. *Ann. of Math.* **62** (1955) 447—471.

SCHULZ, G.:
1934 Umkehrung von Integraltransformationen. *Z. Angew. Math. Mech.* **14** (1934) 373—374.

SCSIGOLEV, B. M.:
1924 O razlozsenii aszimmetricseszkoj krivoj raszpredelenija na dve krivüe Gauszsza. *Russkiĭ Astronom. Ž.* **1** (1924): 3—4, 76—89.

SEN, N.:
1922 Über den Einfluss des Dopplereffekts auf spektroskopische Feinstrukturen und seine Elimination. *Physikalische Zeitschrift* **23** (1922) 397—399.

STALLMAN, F. W.:
1970 Numerical solution of integral equations. *Numer. Math.* **15** (1970) 297—305.

STENE, S.:
1945 A contribution to the theory of systematic extraction and other related convection problems. *Ark. Kem. Miner. Geol.* **18**/A (1945) 1—121.

STICKER, B.:
1930*a* Untersuchungen über Sternfarben. II. Analyse der Farbenhäufigkeitsfunktion. *Veröffentlichungen der Universitäts-Sternwarte Bonn* Nr. 23 (1930) 20—32.
1930*b* Über die Farbenhäufigkeitsfunktion in Sternhaufen. *Z. Astrophys.* **1** (1930) 174—191.

STOKES, A. R.:
1948 A numerical Fourier-analysis method for the correction of widths and shapes of lines on X-ray powder photographs. *Proc. London Phys. Soc.* **61** (1948) 382—391.

STONE, M. H.:
1927 The normal probability function and general frequency functions. *Amer. J. Math.* **49** (1927) 543—552.

STRAND, O. N.—WESTWATER, (E.) R.
1968*a* Statistical estimation of the numerical solution of a Fredholm integral equation of the first kind. *J. Assoc. Comput. Mach.* **15** (1968) 100—114.
1968*b* Minimum-RMS estimation of the numerical solution of a Fredholmintegral equation of the first kind. *SIAM J. Numer. Anal.* **5** (1968) 287—295.

STRÖMGREN, B.:
1934 Tables and diagrams for dissecting a frequency curve into components by the half-invariant method. *Skand. Aktuarietidskr.* **17** (1934) 7—54.

SVEDBERG, TH—PEDERSEN, K. D.:
1940 *Die Ultracentrifuge.* Th. Steinkopf, Dresden, 1940.

SYDOW, A.—DITTMANN, H.:
1963 Statistische Analysen mittels elektronischer Analogrechner. *Messen, Steuern, Regeln* **6** (1963) 501—504.

SZEREBRENNIKOV, M. G.:
1948 *Garmonicseszkij analiz.* Ogiz-Gosztehizdat, Moszkva-Leningrad, 1948.

SZEREBRENNIKOV, M. G.—PERVOZVANSZKIJ, A. A.:
1965 *Vüjavlenie szkrütüh periodicsnosztej.* Nauka, Moszkva, 1965.

SZIGETI GYÖRGY:
1947 Lumineszkáló anyagok. *Elektrotechnika* (Budapest) **39** (1947) 70—73; 81—86.

SZKOROHOD, A. V.:
1954 Aszimptoticseszkie formulü dlja usztojcsivüh zakonov raszpredelenija. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **98** (1954) 731—734.

SZOLODOVNIKOV, V. V.:
1952 *Vvedenie v sztatiszticseszkoju dinamiku szisztem avtomaticseszkogo upravlenija.* Gosztehizdat, Moszkva, 1952.

SZTRAHOV, V. N.:
1963 Ob odnom csiszlennom metode resenija linejnüh integral'nüh uravnenij tipa szvertki. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **153** (1963) 533—536.
1964 Ob odnom novom metode vücsiszlenija integralov tipa szvertki. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Geofiz.* **1964,** No. 12, 1819—1822.
1968 O csiszlennom resenii nekorrektnüh zadacs, predsztavljaemüh integral'nümi uravnenijami tipa szvertki. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **178** (1968) 299—302.

SZUDAKOV, V. N.—HALFIN, L. A.:
1964 Sztatiszticseszkij podhod k korrektnoszti zadacs matematicseszkoj fiziki. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **157** (1964) 1058—1060.

TALLIS, G. M.:
1969 The identifiability of mixtures of distributions. *J. Appl. Probability* **6** (1969) 389—398.

TANAKA, S.:
1962 A method of analysing of polymodal frequency distribution and its application to the length distribution of the Porgy, *Taius tumifrons* (J. and S.) *J. Fish. Res. Bd. Can.* **19** (1962) 1143—1159.

TEICHER, H.:
1960 On the mixture of distributions. *Ann. Math. Statist.* **31** (1960) 55—73.
1961 Identifiability of mixtures. *Ann. Math. Statist.* **32** (1961) 244—248.
1963 Identifiability of finite mixtures. *Ann. Math. Statist.* **34** (1963) 1265—1269.

THIES, H. H.:
1961 Resolution of Bremsstrahlung experiments. *Austral. J. Phys.* **14** (1961) 174—187.

THIONET, P.:
1966 Note sur les mélanges de certaines distributions de probabilités. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **15** (1966) 61—80.

TIHONOV, A. N.:
1944 Ob usztojcsivoszti obratnüh zadacs. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **39** (1944) 195—198.
1963*a* O resenii nekorrektno posztavlennüh zadacs i metode reguljarizacii. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **151** (1963) 501—504.
1963*b* O reguljarizacii nekorrektno posztavlennüh zadacs. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **153** (1963) 49—52.
1963*c* O resenii nekorrektno posztavlennüh zadacs i metode reguljarizacii. *Materialü k Szovmesztnomu szovetszko-amerikanszkomu szimpoziumu po uravnenijam sz csasztnümi proizvodnümi* (Novoszibirsk, avg. 1963). Izd. Szibirszk. Otdel. ANSZSZSZR, Novoszibirszk, 1963; pp. 261—265.
1965*a* O nelinejnüh uravnenijah pervogo roda. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **161** (1965) 1023—1026.
1965*b* O metodah reguljarizacii zadacs optimal'nogo upravlenija. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **162** (1965) 763—765.
1965*c* O nekorrektnüh zadacsah linejnoj algebrü i usztojcsivüh metodah ih resenija. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **163** (1965) 591—595.
1965*d* O nekorrektnüh zadacsah optimal'nogo planirovanija i usztojcsivüh metodah ih resenija. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **164** (1965) 507—510.
1965*e* Ob usztojcsivoszti algoritmov dlja resenija vürozsdennüh szisztem linejnüh algebraicseszkih uravnenij. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **5** (1965) 718—722.
1967 O nekorrektno posztavlennüh zadacsah. *Vyčislitel'naja matematika i programmirovanie.* VIII. Izd. Moszkov. Univ., Moszkva, 1967; pp. 3—33.

TIHONOV, A. N.—GALKIN, V. Ja.—ZAIKIN, P. N.:
1967 O prjamüh metodah resenija zadacs optimal'nogo upravlenija. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **7** (1967) 416—423.

TIHONOV, A. N.—GLASZKO, V. B.:

1964 O priblizsennom resenii integral'nüh uravnenij Fredgol'ma pervogo roda. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **4** (1964) 564—571.

1965 Primenenie metoda reguljarizacii v nelinejnüh zadacsah. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **5** (1965) 463—473.

TRICOMI, F. (G.):

1935 Su la rappresentazione di una legge di probabilità mediante esponenziali di Gauss e la trasformazione di Laplace. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **6** (1935) 135—140.

1936 Ancora sulla rappresentazione di una legge di probabilità mediante esponenziali di Gauss. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **7** (1936) 42—44.

1938 Les transformations de Fourier, Laplace, Gauss et leurs applications au calcul des probabilités et à la statistique. *Ann. Ist. H. Poincaré* **8** (1938) 111—149.

1968 *Repertorium der Theorie der Differentialgleichungen.* Springer, Berlin, 1968; pp. 130—132.

TRUMPLER, R. J.:

1951 Correction of frequency functions for observational errors of the variables. *Proceeding of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.* University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951; pp. 437—440.

TRUMPLER, R. J.—WEAVER, H. F.:

1953 *Statistical astronomy.* University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1953.

TURCSIN, V. F.:

1967 Resenie uravnenija Fredgol'ma I. roda v sztatiszticseszkom anszamble gladkih funkcij. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* 7 (1967) 1270—1284.

1968 Vübor anszamblja gladkih funkcij pri resenii obratnoj zadacsi. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **8** (1968) 230—238.

TWOMEY, S.:

1963 On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature. *J. Assoc. Comput. Mach.* **10** (1963) 97—101.

UNSÖLD, A.:

1955 *Physik der Sternatmosphären.* II. Auflage. Springer, Berlin, 1955.

VARGA LÁSZLÓ:

1966*a* Gauss-függvények keverékének komponensekre bontásáról. *Magyar Tud. Akad. Közp. Fiz. Kutató Int. Közl.* **14** (1966) 383—389.

1966*b* Exponenciális bomlásgörbe paramétereinek egy egyszerű meghatározásáról. *Magyar Tud. Akad. Közp. Fiz. Kutató Int. Közl.* **14** (1966) 21—24.

1968 Nemlineáris becslési feladatok numerikus módszerei. Disszertáció. Budapest, 1968.

VASZIN, V. V.:

1968 Reguljarizacija nelinejnüh differencial'nüh uravnenij v csasztnüh proizvodnüh. *Differencial'nye Uravnenija* **4** (1968) 2268—2274.

1969 Reguljarizacija zadacsi csiszlennogo differencirovanija. *Urál. Gos. Univ. Mat. Zap.* **7** (1969) No. 2, 29—33.

WALLNER, A.—ULKE, R.

1952 Auswertung von Diagrammen aus Elektrophoreseversuchen. *Hoppe-Seyler's Zeitschrift für physiologische Chemie* **290** (1952) Heft 3—6, 81—91.

WEICHSELBERGER, K.:

1961 Über ein graphisches Verfahren zur Trennung von Mischverteilungen zur Identifikation kupierter Normalverteilungen bei grossem Stichprobenumfang. *Metrika* **4** (1961) 178—229.

WHITTAKER, E.—ROBINSON, G.:

1949 *The calculus of observations.* A treatise on numerical mathematics. Fourth edition. Blackie and Son Ltd., London and Glasgow, 1949.

WIEDEMANN, E.:

1947 Über die Auswertung von Elektrophorese-Diagrammen nach L. G. Longsworth und Philpot -Svensson. *Helv. Chim. Acta* **30**, Pars I (1947) 892—900.

WILLERS, Fr. A.:

1923 *Numerische Integration.* Walter de Gruyter und Co., Berlin, 1923.

1950 *Methoden der praktischen Analysis.* 2. Auflage. Walter de Gruyter und Co., Berlin, 1950.

WINTNER, A.:
1941 The singularities of Cauchy's distributions. *Duke Math. J.* **8** (1941) 678—681.
1956 Cauchy's stable distribution and an „explicit formula" of Mellin. *Amer. J. Math.* **78** (1956) 819—861.

WOLFE, S. J.:
1971 On the unimodality of $L$ functions[1]. *Ann. Math. Statist.* **42** (1971) 912—918.

WUHRMANN, F.—WUNDERLY, Ch.:
1957 *Die Bluteiweisskörper des Menschen.* Dritte, vollständig neu bearbeitete Auflage. B. Schwabe und Co. Verlag, Basel/Stuttgart, 1957.

YAKOWITZ, S. J.—SPRAGINS, J. D.:
1968 On the identifiability of finite mixtures. *Ann. Math. Statist.* **39** (1968) 209—214.

YOUNG, A.:
1954 The application of approximate product integration to the numerical solution of integral equations. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **224** (1954) 561—573.

ZOLOTAREV, V. M.:
1954 Vürazsenie plotnoszti usztojcsivogo raszpredelenija sz pokazatelem $\alpha$, bol'sim edinicü cserez plotnoszt' sz pokazatelem $\frac{1}{\alpha}$. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **98** (1954) 734—738.
1956 Ob analiticseszkih szvojsztvah usztojcsivüh zakonov raszpredelenij. *Vestnik Leningrad. Univ.* **11** (1956) No. 1, 49—52.

ZSIDKOV, N. P.—SCSEDRIN, B. M.—RAMBIDI, N. G.—EGOROVA, N. M.:
1968 Primenenie metoda reguljarizacii dlja resenija nekotorüh zadacs gazovoj élektronografii. *Vyčislitel'nye metody i programmirovanie.* X. Izd. Moszkov. Univ., Moszkva, 1968; pp. 215—222.

van ZWET, W. R.:
1964*a* *Convex transformations of random variables.* Mathematical Centre Tracts 7. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1964.
1964*b* Convex transformations. A new approach to skewness and kurtosis. *Statistica Nederlandica* **18** (1964) 433—441.

# KÖNYVSZEMLE

*Béla Sz.-Nagy—Ciprian Foiaş: Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*
(Masson et C[ie] — Akadémiai Kiadó, 1967).

Szőkefalvi-Nagy Béla egy 1953-ban közölt dolgozatában bebizonyította, hogy ha $T$ kontrakció (1-nél nem nagyobb normájú lineáris operátor) egy *Hilbert*-térben, akkor található egy tágabb *Hilbert*-tér és abban egy $U$ unitér operátor úgy, hogy az eredeti tér bármely $f$, $g$ elempárjára és minden $n$ természetes számra $(T^n f, g) = U^n f, g)$. Az $U$ operátort, amelyet $T$ dilatációjának neveznek, bizonyos minimalitási feltétel lényegében egyértelműen meghatározza.

Ez a tétel lehetővé tette az unitér operátorok spektrálelméletének felhasználását kontrakciók szerkezetének a felderítésére. A vizsgálatokat nagyrészt Szőkefalvi-Nagy Béla és a munkába hamarosan bekapcsolódó Ciprian Foiaş, román matematikus végezte el. Közösen írt hosszú cikksorozatukban megteremtették a kontrakciók általános elméletét, és ezzel a normális operátorok spektrálelmélete óta az egyik legnagyobb lépést tették meg az általános lineáris operátorok megismerése felé.

Monográfiájukban a szerzők továbbfejlesztik és mások eredményeivel kiegészítve egységes keretbe foglalják elméletüket. A fejezetvégi jegyzetek áttekintést adnak a vonatkozó irodalomról, a téma megközelítési módjairól.

Tartalmi áttekintés helyett megelégszünk két témakör kiemelésével. Az egyik: adott $T$ kontrakció és bizonyos, az egységkör belsejében analítikus $u(\lambda)$ függvények esetén az $u(T)$ operátor értelmezése és vizsgálata. A megengedett $u$ függvények osztálya bővebb, mint a korábbi elméletekben, és kiderül, hogy ez àz alkalmazások szempontjából lényeges. Például bizonyos $T$ kontrakcióhoz sikerül hozzárendelni egy $m_T(\lambda)$ minimálfüggvényt, amelynek hasonló tulajdonságai vannak, mint a matrixok minimálfüggvényének.

A másik fontos téma a matrixok karakterisztikus függvénye fogalmának általánosításával kapcsolatos. A szerzők minden T kontrakcióhoz hozzárendelnek egy, a komplex sík egységkörében értelmezett, operátor értékű analítikus függvényt, $T$ karakterisztikus függvényét. Ez felvilágosítást nyújt $T$ spektrumáról, invariáns altereiről, és lehetővé teszi $T$-nek alkalmas függvénytérben való realizációját.

A könyv Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla *Leçons d'analyse fonctionnelle* című világhírű, eddig 5 kiadást és több fordítást megért műve folytatásának tekinthető. Olvasásához ezen kívül szükség van bizonyos előismeretekre az analítikus függvények *Hardy*-féle osztályainak elméletéből, bár az innen felhasznált tételeket a szerzők idézik.

A könyv érdeme, hogy tárgyköre jól körülhatárolt, és azt igyekszik kimeríteni. A bizonyítások elegánsak, mélyebb segédeszközöket csak a szükséges mértékben használnak fel. Ez a korábbi módszerekhez képest számos egyszerűsítésre vezet.

A gondolatmeneteket a szerzők kellően részletezik. Sikeresen egyeztetik össze a szabatosság és a gördülékenység követelményét. Meg kell emlékezni a jól megválasztott jelölésekről, az igen szép és változatos stílusról, valamint az igényes nyomdai munkáról is.

Összefoglalva: a mű melegen ajánlható mindazoknak, akik a normális operátorok spektrálelméletének birtokában a Hilbert-térbeli lineáris operátok mai elméletét kívánják megismerni.

*Bognár János*

# TARTALOMJEGYZÉK



## KÖNYVSZEMLE



# INDEX



## BOOK REVIEWS

Technikai szerkesztő: Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Helle Mária

A kézirat nyomdába érkezett: 1972. VIII. 6. — Ívterjedelem: 17,85 (A/5) ív

72-3585 — Szegedi Nyomda

**Ára: 38,— Ft**

*Megjelent 1973. V. 31.*

Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

XXI. KÖTET
3—4. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1973

# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
## MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
# KÖZLEMÉNYEI





XXI. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest 1363 V., Alkotmány utca 21.


A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest V., Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest 1363 V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11488, külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest 1389 I., Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Mathematicarum Hungarica.

# AZ INVERZ FÉLCSOPORTOK JELLEMZÉSÉRŐL

Írta: SCHWAB EMIL*

Jelen cikkben áttekintést nyújtunk az inverz félcsoportok jellemzéseiről és a *Munn—Penrose*-csoport jellemzéséhez hasonló inverz félcsoport-jellemzést adunk.

$F$ legyen félcsoport, vagyis egy olyan nem üres halmaz, amelyben egy asszociatív, binér művelet (pl. szorzás) van értelmezve. Mint ismert, az $F$ félcsoport egy $g$ elemét regulárisnak nevezzük, ha létezik legalább egy olyan $x \in F$ elem, amelyre

$$gxg = g.$$

Az $F$ félcsoport $\bar{g}$ elemét a $g \in F$ elem reguláris konjugáltjának nevezzük, ha

$$g\bar{g}g = g \quad \text{és} \quad \bar{g}g\bar{g} = \bar{g}.$$

Bármely reguláris $g \in F$ elemnek van legalább egy reguláris konjugált eleme. Regulárisnak nevezzük az $F$ félcsoportot, ha összes elemei regulárisak.

Az olyan reguláris $F$ félcsoportot, amelyben a félcsoport idempotens elemei az $F$-ben értelmezett kétváltozós asszociatív műveletre vonatkozólag felcserélhetők V. V. WAGNER [12] nyomán *általánosított csoport*nak, vagy — ahogy az ma már a matematikai szakirodalomban jobban meghonosult elnevezésén — *inverz félcsoport*nak nevezzük. Az inverz félcsoportok fejezete a félcsoportok elméletében központi helyet foglal el. Ismert az inverz félcsoportoknak több egymással ekvivalens jellemzése. [11] alapján egy $F$ reguláris félcsoportban a következő egymással ekvivalens állítások definiálják az inverz félcsoportot:

($A_1$): $F$ bármely két idempotens eleme felcserélhető.

($A_2$): $F$ bármely $g$ elemére és annak tetszőleges $\bar{g} \in F$ reguláris konjugált elemére a $g\bar{g}$ és $\bar{g}g$ elemek felcserélhetők.

($A_3$): $F$ bármely elemének legfeljebb egy reguláris konjugált eleme van.

($A_4$): $F$ bármely idempotens elemének legfeljebb egy reguláris konjugált eleme van.

($A_5$): Két tetszőleges idempotens elemre: $i_1 \in F$, $i_2 \in F$, $i_1 i_2 = i_1 \Leftrightarrow i_2 i_1 = i_1$.

($A_6$): $F$ bármely idempotens eleme felcserélhető annak tetszőleges reguláris konjugált elemével.

($A_7$): $i\bar{i}$ és $\bar{i}i$ elemek felcserélhetők $F$ bármely $i$ idempotens elemére és annak tetszőleges $\bar{i}$ reguláris konjugált elemére.

($A_8$): $F$ bármely két $i_1$ és $i_2$ idempotens elemére, $i_1 i_2 = i_1$ és $i_2 i_1 = i_2$ feltételből mindig $i_1 = i_2$, valamint $i_1 i_2 = i_2$ és $i_2 i_1 = i_1$ feltételből mindig $i_1 = i_2$ folyik.

* Temesvár (Románia)

A fenti állítások ekvivalenciájának bizonyítása egy $F$ reguláris félcsoportban A. E. LIBER, W. D. MUNN, R. A. PENROSE, X. H. INASZARIDZE és B. M. SAIN nevéhez fűződnek. Ezekhez az állításokhoz hozzáírható W. D. MUNN és R. A. PENROSE [8] nyomán a következő — fent nem említett két — állítás:

($B_1$): $F$ reguláris félcsoport, $l$-ekvivalens idempotens elemei felcserélhetők és $r$-ekvivalens idempotens elemei felcserélhetők.

($B_2$): $F$ bármely főbalideálja és bármely főjobbideálja egy és csakis egy idempotens elem által generált főbalideál illetve főjobbideál.

Az itt szereplő ekvivalencia-relációk *Green* ekvivalencia-relációi, vagyis $g$ és $h$ az $F$ félcsoport elemei $l$-ekvivalensek, illetve $r$-ekvivalensek, ha általuk generált főbalideálok, illetve főjobbideálok egybeesnek. ($g$-elem által generált főbalideál $Fg\cup g$, a főjobbideál pedig $gF\cup g$.)

A következőkben az előbbi állításokkal ekvivalens új állítást fogunk bizonyítani:

1. TÉTEL: *Egy $F$ reguláris félcsoportban a következő állítás ekvivalens az* ($A_1$)—($B_2$) *állításokkal:*

(C): *$F$ bármely $i$ idempotens elemére az $ixi = i$ egyenletnek $i$-vel $l$-ekvivalens megoldása csak egy van és $i$-vel $r$-ekvivalens megoldása csak egy van.*

*Bizonyítás.* (C)-ből következik ($A_6$). Legyen $\bar{i}$ az $F$ reguláris félcsoport $i$ idempotens elemének tetszőleges reguláris konjugáltja. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $i$ és az $\bar{i}i$ elemek $l$-ekvivalensek, valamint az $i$ és az $i\bar{i}$ elemek $r$-ekvivalensek. Tekintettel, hogy az $\bar{i}i$ és $i\bar{i}$ elemek kielégítik az $ixi = i$ egyenletet, következik:

$$\bar{i}i = i = i\bar{i},$$

tehát ($A_6$).

$F$ inverz félcsoport, következik (C). Legyen $i$ az $F$ inverz félcsoport tetszőleges idempotens eleme és $x\in F$ az $i$ elemmel $l$-ekvivalens elem, amely kielégíti az $ixi = i$ egyenletet. Létezik akkor egy $y\in F$ úgy, hogy

$$x = yi.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$i = ixi = iyii = iyi,$$

tehát

$$x^2 = yiyi = yi = x.$$

($B_2$)-szerint $F$ bármely főbalideálja egy és csakis egy idempotens elem által generált főbalideál, tehát

$$x = i.$$

Hasonlóan bizonyítunk, ha $x$ $r$-ekvivalens az $i$ idempotens elemmel.

A fenti eredményt a következőképpen fogalmazhatjuk:

1. KOROLLÁRIUM: *Egy $F$ reguláris félcsoport akkor és csakis akkor inverz félcsoport, ha az $ixi = i$ egyenlet $F$ mindegyik $i$ idempotens elemére $i$-vel $l$-ekvivalens megoldása csak egy van és $i$-vel $r$-ekvivalens megoldása csak egy van.*

Az inverz félcsoportok fenti jellemzéséhez hasonló jellemzést ismerünk a csoportokra:

2. KOROLLÁRIUM: ([8]). *Egy $F$ reguláris félcsoport akkor és csakis akkor csoport, ha az $ixi=i$ egyenletnek $F$ mindegyik $i$ idempotens elemére csak egy megoldása van.*

Hasonló jellemzést adhatunk primitív inverz félcsoportokra és komplett $o$-egyszerű inverz félcsoportokra (*Brandt* félcsoportokra).

Legyen $F$ $o$-elemes reguláris félcsoport. REES [10] dolgozatában szerepel a következő fogalom. Az $F$ félcsoport $i$ $(i\neq 0)$ idempotens elemét *primitív*nek nevezzük, ha $i_1 i=ii_1=i_1$ $(i_1\neq 0,\ i_1^2=i)$ feltételből mindig $i_1=i$ folyik. Egy félcsoportot *primitív félcsoport*nak nevezünk, ha $o$-tól különböző idempotens elemei primitívek.

Ha az $ixi=i$ egyenletnek $F$ $o$-elemes reguláris félcsoport mindegyik $i$ $(i\neq o)$ idempotens elemére csak egy megoldása van, akkor az 1. korollárium szerint $F$ inverz félcsoport, tekintettel arra, hogy $o$-elemes reguláris félcsoportnak nincs $o$-tól különböző balannulátora és jobbannulátora. Egy inverz félcsoportban az idempotens elemek felcserélhetők és tehát az $ixi=i$ egyenlet $ix=i$ vagy $xi=i$ alakban írható. Következik $F$ primitív inverz félcsoport. Nyilvánvaló, hogy $o$-elemes primitív inverz félcsoportban a félcsoport bármely $i$ $(i\neq o)$ idempotens elemére az $ixi=i$ egyenletnek csak egy megoldása van. Ezek szerint (lásd [13] 2. tételt is):

3. KOROLLÁRIUM: *Egy $Fo$-elemes reguláris félcsoport akkor és csakis akkor primitív inverz félcsoport, ha az $ixi=i$ egyenletnek $F$ mindegyik $i$ $(i\neq 0)$ idempotens elemére csak egy megoldása van.*

Ismert, hogy $F$ $o$-elemes félcsoport $o$-egyszerű, ha $F^2\neq o$ és $F$-nek nincs valódi ($o$-tól és $F$-től különböző) kétoldali ideálja. REES [10] szerint az $F$ $o$-egyszerű félcsoport komplett $o$-egyszerű, ha $F$ tartalmaz primitív idempotens elemet. Nyilvánvaló akkor a

4. KOROLLÁRIUM: *Egy $F$ $o$-egyszerű reguláris félcsoport, akkor és csakis akkor komplett $o$-egyszerű inverz félcsoport (Brandt félcsoport) ha az $ixi=i$ egyenletnek $F$ mindegyik $i$ $(i\neq o)$ idempotens elemére csak egy megoldása van.*

Itt az $F$ reguláris félcsoportra az $o$-egyszerű feltétel szükséges. Ez R. MC. FADDEN és H. SCHNEIDER [2] példájából tűnik ki.

## IRODALOMJEGYZÉK

[1] Ляпин, Е. С.: *Полугруппы*, М. Физматгиз, 1960.
[2] R. Mc. FADDEN and H. SCHNEIDER: Completely simple and inverse semigroups, *Proc. Camb. Phil. Soc,* 57 (1961) 234—236.
[3] Инасаридзе, Х. Н.: О некоторых вопросах теории полугруппа, *Труды Тбилисск.* гос. ун. — та, 76 (1959) 247—260.
[4] S. LAJOS: A note on completely regular semigroups, *Acta Sci. Math. Szeged,* 28 (1967) 261—265.
[5] S. LAJOS: On semilattices of groups, *Proc. Japan Acad,* 45 (1969) 383—384.
[6] S. LAJOS: Completely regular inverse semigroups, *Acta Sci. Math. Szeged,* 31: 3—4 (1970) 229—231.
[7] Либер, А. Е.: К теории обобщенных групп, Д. А. Н. СССР., 97 (1954) Но 1, 25—28.
[8] W. D. MUNN and R. PENROSE: A note on inverse semigroups, *Proc. Camb. Phil. Soc,* 51 (1955) 396—399.
[9] G. B. PRESTON: Inverse semi-groups, *J. London Math. Soc,* 29 (1954), No 4, 396—403.
[10] D. REES: On semigroups, *Proc. Camb. Phil. Soc,* 36 (1940) 387—400.
[11] Шайн, Б. М.: К теории обобщенных групп и обобщенных груд, в теория полугрупп и ее приложения, Издательство Саратовского Университета, 1965, 286—324.
[12] Вагнер, В. В.: *Обобщеные групы,* Д. А. Н. СССР, 84 (1952) 6.
[13] P. S. VENKATESAN: On a class of inverse semigroups, *Am. J. Math,* 84 (1962) 4, 578—582.

(Beérkezett: 1970 II. 3.)

# ON CHARACTERIZATIONS OF INVERSE SEMIGROUPS

by

E. SCHWAB

Summary

In the present note we give a characterization of inverse semigroups similar with W. D. MUNN's and R. PENROSE's characterization of groups: "A regular semigroup is an inverse semigroup if and only if for any idempotent $i$ the equation $ixi=i$ has no $l$ equivalent solution with $i$ other then $i$ and has no $r$-equivalent solution with $i$ other then $i$." (The elements $g$, $h$, of $S$ are 1-equivalent or $r$-equivalent according as $g$ and $h$ generate the same left or right ideal of $S$ respectively.)

# SZÁMÍTÁSTECHNIKAI MÓDSZEREK A SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK ELMÉLETÉBEN ÉS STATISZTIKÁJÁBAN, BIOLÓGIAI ALKALMAZÁSOKKAL*

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

## 1. § Bevezetés

Sztochasztikus folyamatok vizsgálatára éppen a valóság teljesebb leírása érdekében került sor, abból a felismerésből kiindulva, hogy a független valószínűségi változók sorozatai túlzott idealizálást jelentenek természeti jelenségek leírásánál, hiszen szemléletünk alapján is világos, hogy a jelenségeket leíró véletlen mennyiségek időbeni egymásutánjai az esetek zömében nem lehetnek statisztikailag függetlenek. Érdemes megemlíteni, hogy a sztochasztikus folyamatok legjobban kimunkált fejezetei eredetüket a botanikából, nyelvészetből s a híradástechnikából származtatják: A *Brown*-mozgás matematikai leírása vezetett a *diffúziós folyamatok* tanulmányozásához; az élő nyelv betűi egymásutánjainak statisztikai vizsgálata a *Markov-láncok elméletéhez*, míg a *hírközlő csatornák* sztochasztikus leírásának legjobban a stacionárius folyamatok felelnek meg. Természetesen a fenti megjegyzés csak a folyamattípusok keletkezésére vonatkozólag igaz. A *diffúziós Markov-folyamatok* elméletének fejlődésében kiemelkedő hatása volt a fizikának, különösen azon körülmény felismerésének, hogy a diffúziós folyamatok *sztochasztikus differenciálegyenlet*tel írhatók le.

A természetben lejátszódó események nagy része differenciálegyenletekkel írható le — ha csak az átlagokat vesszük figyelembe. Amennyiben szükségünk van a véletlenszerű viselkedés megmagyarázására is, akkor differenciálegyenleteink sztochasztikusakká válnak.

Legegyszerűbb esetben a konstans együtthatós homogén differenciálegyenlet

$$x^{(k)}(t)+a_{k-1}x^{(k-1)}(t)+\cdots+a_0x(t)=0 \tag{1.1}$$

helyett a

$$d\xi^{(k-1)}(t)+[a_{k-1}\xi^{(k-1)}(t)+\cdots+a_0\xi(t)]\,dt=dw(t) \tag{1.2}$$

(ahol $w(t)$ a *Brown*-mozgás folyamata) sztochasztikus egyenletet vizsgáljuk, melynek realizációi véletlen függvények s $\xi(t)$ kovariancia függvénye $B(t)=M\xi(s)\xi(s+t)$ az (1.1) egyenletet elégíti ki. Az (1.2) leírásnak előnye, hogy mindössze néhány paraméter segítségével (az $a_i$ együtthatók és a $w(t)$ *Brown*-mozgás folyamat lokális szórásnégyzete) igen bonyolult működésű rendszerek sztochasztikus viselkedése megadható.

A gyakorlatban két igen fontos kérdés merül fel:

a) Ismert a „fizikai" jelenséget leíró folyamat jellege, meg kell határozni —

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia 1970. évi Tudományos Ülésszakán, a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának és a Műszaki Tudományok Osztályának „A számológéptudomány kérdései" című közös vitaülésén.

megfigyelések alapján — a benne szereplő paramétereket, azok minden valószínűségszámítási jellemzőjével (eloszlás, momentumok stb.) .

b) Vizsgálatot kell végezni — megfigyelési eredményekkel történő összehasonlítás útján — a folyamatot leíró differenciálegyenlet jellegére vonatkozóan. (Nem kívánok kitérni más problémákra, mint pl. a sztochasztikus rendszerek vezérlése, irányítása stb.)

Mindkét — ilyen egyszerűen feltehető — kérdésre a válaszadás nemcsak szigorúan vett valószínűségelméleti és statisztikai vizsgálatokat igényel. A megoldásokat ugyanis a legegyszerűbb esetekben is csak számológépek igénybevételével tudjuk megkapni. A továbbiakban éppen azokra az eredményekre szeretném a figyelmet felhívni, amelyek a számológép alkalmazásának jelentőségére mutatnak, így a levezetésekkel bizonyítható eredményekre csak hivatkozni fogok.

Az időben folytonos folyamatok statisztikai jellemzőinek leírására nem mindig elegendő véges sok paraméter, másrészt a folyamat nem pontos ismerete szükségessé teszi esetleges felesleges információk tárolását is. A folyamatok spektrális jellemzése a korrelációs függvény, ill. spektrál eloszlásfüggvény alapján történik. Stacionárius esetben a $B(t)$ kovariancia függvény definícióját és a spektrál eloszlással való kapcsolatát az

$$M\xi(s)\xi(s+t) = B(t) = \int e^{i\lambda t}\, dF(\lambda)$$

összefüggés adja meg (ahol az integrálás a $(-\pi, \pi)$ intervallumon ill. $(-\infty, \infty)$-ben történik attól függően, hogy diszkrét vagy folytonos idejű a folyamat).

A korrelációs. ill. spektrál eloszlásfüggvény empirikus úton történő meghatározása elképzelhetetlen elektronikus számológépek nélkül. Matematikai statisztikai vizsgálatokon túl ennek a speciális problémakörnek igen kiterjedt számítástechnikai irodalma (lásd pl. ROBINSON (1968) könyvét s az ott felsorolt irodalmat) és ma már klasszikus eredményei is vannak (vö. TUKEY (1965)) kimondottan számológépes vonatkozásokkal. A modern nagyteljesítményű számológépek programkönyvtárának tekintélyes részét alkotják az idősor elemzéssel foglalkozó programok.

Ebben a vonatkozásban a *Magyar Tudományos Akadémia* CDC 3300-as új gépe megfelelő lehetőségeket biztosít mind a matematikai kutatások továbbfejlesztéséhez, mind az alkalmazások kiterjesztéséhez. Az Akadémia intézményei kutatóinak rendelkezésére álló programkönyvtár elég gazdag ahhoz, hogy standard feladatok megoldását könnyen megkapják, másrészt a *Számítástechnikai Központ Valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztályán* már most is folyik az idekerülő programkönyvtár kipróbálása és bővítése.

Nem kívánok teljes és átfogó képet nyújtani a sztochasztikus folyamatok elmélete és statisztikája számológépi vonatkozásairól, csak azokat a kutatásokat említem, melyekhez hazai eredmények és kísérletezések kapcsolódnak, itt is elsősorban szeretnék néhány szerény — de véleményünk szerint előremutató — kezdeményezésről beszámolni, melyet az MTA *Számítástechnikai Központ*ban kezdtünk el.

## 2. § Néhány statisztikai feladat

Tekintsük a konstans együtthatós (1.2) egyenletnek eleget tevő $\xi(t)$ *Gauss*-folyamatot és tegyük fel, hogy az ismeretlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ együtthatókat $\xi(t)$ egy $0 \leq t \leq T$ realizációja alapján kívánjuk becsülni. A maximum likelihood becslések meghatározásához szükség van a likelihood függvény (*Radon—Nikodym* derivált) meghatározására. Ismeretes (vö. ARATÓ (1970), [2]), hogy

$$\frac{dP_A}{d(L^k \times W_x^1)}(\xi(t)) = \tag{2.1}$$

$$= (2\pi)^{-k/2}|B(0)|^{-1/2}\exp\Bigg\{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=-i}^{i}(-1)^l a_{i-l}a_{i+l}\int_0^T[\xi^{(i)}(t)]^2\,dt +$$

$$+\frac{a_{k-1}a_k}{2}T-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{i,j=0}^{k-1}\Big(\sum_{l=0}(-1)^l a_{i-l}a_{j+1+l}\Big)[\xi^{(i)}(T)\xi^{(j)}(T)+(-1)^{j-i}\xi^{(i)}(0)\xi^{(j)}(0)]\Bigg\},$$

ahol $P_A$ a $\xi(t)$ folyamathoz tartozó mértéket $L_x^k \times W_x^1$ pedig a *Lebesgue-* és feltételes *Wiener*-mérték szorzatát jelölik. A $B(0)$ mátrix az $a_i$ együtthatók ismert függvénye (vö. ARATÓ (1970) [2]). A (2.1) összefüggésből látható, hogy az $a_i$ együtthatók maximum likelihood becsléseiben lényeges szerepet játszanak az

$$s_i^2 = \int_0^T (\xi^{(i)}(s))^2\,ds, \quad \left(s_i^2(t) = \int_t^T (\xi^{(i)}(s))^2\,ds\right), \quad i = \overline{0,k-1},$$

statisztikák. A

$$v(t,\alpha,x) = M\{\exp i(\alpha_0 s_0^2(t)+\dots+\alpha_{k-1}s_{k-1}^2(t))\,|\,\xi(t)=x\}$$

feltételes karakterisztikus függvény kielégíti a

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_{k-1}^2}+\sum_{i=0}^{k-2}x_{i+1}\frac{\partial v}{\partial x_i}-(a_{k-1}x_{k-1}+\dots+a_0x_0)\frac{\partial v}{\partial x_{k-1}}+ \tag{2.2}$$

$$+i(\alpha_{k-1}x_{k-1}^2+\dots+\alpha_0x_0^2)v = 0; \quad v(T,\alpha,x) = 1,$$

(lásd ARATÓ (1970) [1] disszertáció) differenciálegyenletet. A (2.2) egyenlet megoldását általános alakban nem sikerült megkapni annak ellenére, hogy a fenti $s_i^2$ valószínűségi változók eloszlásainak vizsgálata kapcsolatban áll a többdimenziós *Schrödinger* egyenlet megoldásának vizsgálatával (vö. GELFAND—JAGLOM (1956) cikkét). A $k=1$ (PISZARENKÓ (1961), ARATÓ (1962)) és a megfelelő kétdimenziós (ARATÓ (1962)) esetekben sikerült a megoldást előállítani, azonban a karakterisztikus függvények ismerete alapján még igen keveset tudunk mondani a nekik megfelelő eloszlásokról. Az eloszlások meghatározása olyan numerikus munkát igényelt még, mely nagyteljesítményű számológépen is több órás gépidőt használ fel (lásd ARATÓ (1968), ARATÓ—BENCZUR (1970)). Érdemes itt megemlíteni, azt a tapasztalatot, hogy az URAL-2 gépi kódban írt programok gépidőigénye megegyezik az ICT gépre ALGOL nyelven írt azonos programokéval. Természetesen a programozási munka az előbbi esetben jóval nagyobb.

Gyakorlati szempontok figyelembevételével a (2.2) egyenlet tetszőleges $k$-ra numerikus úton való megoldását csak abban az esetben érdemes elvégezni, ha egyben a megfelelő eloszlások meghatározása is lehetséges. Ezen út helyett a következő eljárást választottuk, annak az újabb szempontnak kielégítésére is, hogy megvizsgálhassuk a diszkrét és folytonos idejű folyamatok „közelségének" problémáját is. A folytonos idejű folyamatot diszkrét idejűvel közelítjük s ez utóbbinak *Monte-Carlo* módszerrel előállított megfelelő számú realizációjából határozzuk meg a kívánt eloszlásokat. Egy ilyen típusú feladat gépi programja — még igen jól szervezett program esetén is — százas nagyságrendű gépórát igényel az Akadémia új gépén. A csak diszkrét idejű folyamatokra vonatkozó vizsgálatok száma igen nagy (lásd pl. COX (1966), ORCUTT—WINOKUR (1969)), azonban nem mutatják meg a folytonos folyamatokkal való kapcsolatot. A mi vizsgálataink alapja a folytonos leírás, melynek segítségével általánosabb eredményeket is kapunk.

Ennek a problémakörnek pontos matematikai megfogalmazásával foglalkozunk a következő pontban.

Az eddigiekben nem szóltunk sztohasztikus folyamatok regressziós feladatairól, melyek megoldása ugyancsak gépi módszerekkel történhet. Legyen a megfigyelési eredmény

$$\eta(t) = b_0 f_0(t) + \dots + b_n f_n(t) + \xi(t), \qquad 0 \leqq t \leqq T,$$

ahol $\xi(t)$ ismert struktúrájú (adott spektrál függvénnyel, $M\xi(t)=0$ várható értékű) folyamat, $f_i(t)$ $(0 \leqq i \leqq n)$ ismert függvénnyel s becsülni kívánjuk az ismeretlen $b_i$ paramétereket. A legismertebb becslési eljárás — általános spektrum esetén — a legkisebb négyzetek módszere. A $\xi(t)$ folyamat spektrál sűrűségének autoregressziós folyamat spektrál sűrűségével való közelítése alapján adódó becslésének aszimptotikus viselkedése (lásd pl. IBRAHIMOV—ROZANOV (1970)) azt mutatja, hogy a módszerrel jobb eredmények várhatók korlátos megfigyelési időtartam ($T$) esetén is. Az ennek megfelelő program megvalósítása a közeli jövő egyik fontos feladata.

Hasonlóan szükség van a spektrál sűrűségfüggvény autoregressziós közelítéséből adódó becslések tulajdonságainak vizsgálatára korlátos megfigyelési idő esetén. Az ilyen típusú becslések előnyben részesítendők a standard becslésekkel szemben (lásd ARATÓ 1970, [1]). Az utóbbi két feladat részbeni megoldása is csak számológéppel valósítható meg.

## 3. § Sztochasztikus folyamatok imitálásával kapcsolatos problémák

Időben és állapotban diszkrét sztochasztikus folyamatok számológépen történő realizálásának ma már kialakult módszerei vannak (lásd. pl. GOLENKÓ (1965), NAYLOR, BÁLINTFY (1966)). Ezzel szemben az időben és állapotban folytonos folyamatok szimulációs problémája megoldásának csak kezdeti lépéseire került sor. A *Wiener*-(*Brown*-mozgás) folyamatot független eloszlású változó sorozatok részletösszegeivel szoktuk helyettesíteni.

Vizsgáljuk a legegyszerűbb típusú folyamatokat — az ún. diffúziós *Markov*-típusúakat. Az egyszerűség kedvéért maradjunk az egydimenziós esetnél. Az $\eta(t)$ Markov folyamat szimulációjánál a következő tételből indulunk ki (lásd GIHMAN—SZKOROHOD (1969)): ha $\eta(t)$ kielégíti a

$$d\eta(t) = a(t, \eta(t))dt + \sigma(t, \eta(t))dw(t) \tag{3.1}$$

sztochasztikus differenciálegyenletet, akkor $\eta(t)$ *Markov*-folyamat, melynek átmenetvalószínűségei egyszerűen megadhatóak (a tétel megfordítása is igaz).

A (3.1) összefüggés alakjából kaphatjuk — a kezdeti eloszlás megválasztása után — az $\eta(t)$ folyamat diszkrét realizációját. Ennek az eljárásnak a megvalósításához csak a $w(t)$ *Wiener*-folyamat realizálására van szükség. A $dt$ véges intervallumhossz megválasztásakor még nem tudunk semmit mondani a diszkrét (jelöljük ezt $\tilde{\eta}(t)$-vel) folyamat és a folytonos folyamat távolságáról. Sőt még az sem bizonyított, hogy $\tilde{\eta}(t)$ azonos *Markov*-típusú lesz.

Stacionárius Markov-folyamatoknál — többdimenziós folyamatot feltételezve — (ha még azt is feltesszük, hogy a folyamat *Gauss*-típusú) a realizálás feladata pontosan elvégezhető, ugyanis ebben az esetben a diszkrét stacionárius, *Gauss*-, *Markov*-folyamat a

$$\xi(t+1) = Q\xi(t)+\varepsilon(t+1), \tag{3.2}$$

míg a folytonos folyamat a

$$d\xi(t) = A\xi(t)\,dt+d\mathbf{w}(t) \tag{3.3}$$

egyenletet elégíti ki, ahol az $A$ és a $Q$ mátrixok közötti kapcsolat a következő:

$$Q=e^{A\,dt}. \tag{3.4}$$

Az $\varepsilon(t)$ sorozat kovariancia mátrixára fennáll, hogy

$$B_\varepsilon = B(0)-e^{A\,dt}B(0)e^{A^*dt} \tag{3.5}$$

és

$$AB(0)+B(0)A^* = -B_w. \tag{3.6}$$

$(M(d\mathbf{w})(d\mathbf{w})^*=B_w\,dt)$. A $Q$ és $B_\varepsilon$ mátrixok egyértelműen meghatározzák a diszkrét, míg $A$ és $B_w$ a folytonos folyamatot. A (3.2)—(3.6) összefüggések alapján az 1. pontban említett autóregressziós folyamatok szimulációja elvégezhető a kezdeti $\xi(0)$ megadásával és független normális eloszlású $\varepsilon(t)$ változók generálásával. A diszkrét folyamat általában már nem lesz autoregressziós típusú. A (3.6) egyenlet megoldása $B(0)$-ra (ill. $B^{-1}(0)$-re) a kezdeti eloszláshoz szükséges. Általános esetben numerikus módszerekkel adódik (3.6) megoldása, autoregressziós esetben egzakt alakban is nyerhető (lásd ARATÓ (1970), [2]).

Az előző pontban említettük, hogy az egydimenziós stacionárius $\xi(t)$ *Gauss*-, *Markov*-folyamat $\lambda$ csillapodási paramétere maximum likelihood becslésének karakterisztikus függvényéből még hosszas numerikus számolással lehet csak meghatározni az eloszlást (ARATÓ—BENCZUR (1970)). Ha a $\xi(t)$ folyamat helyett, mely a

$$d\xi(t) = -\lambda\xi(t)dt+dw(t)$$

egyenletnek tesz eleget, az

$$\eta(t)=\xi(t)+m, \qquad (0\leqq t\leqq T),$$

folyamat realizációja áll rendelkezésünkre, ahol a $\lambda$ paraméteren kívül $m$ is becsülendő, a számítások még bonyolultabbá válnak. Ismeretes a probléma elégséges statisztikáinak feltételes karakterisztikus függvénye az $m=0$ esetben (ARATÓ (1970), [2]), azonban — a legegyszerűbb becsléseket használva — a $\int_0^T \xi(s)ds$ és $\int_0^T \xi^2(s)ds-$ $-(\int_0^T \xi(s)ds)^2$ változók együttes karakterisztikus függvényét már nem sikerült meghatározni. A CDC 3300-as gépre írt szimulációs program — mely az időben folytonos folyamat fent leírt átírása útján készült — nemcsak a $\lambda$ és $m$ paraméterek becsléseinek viselkedéséről ad felvilágosítást, hanem arról is, hogy adott $m$ esetén mennyire felelnek meg a diszkrét eredmények az elméletileg korábban kapottaknak. További felvilágosítást kaptunk a diszkrét és folytonos folyamatok közelségéről, valamint a megfelelő becslések eltéréséről is. Ez utóbbi kérdésre szigorú matematikai vizsgálatok és megfontolások útján semmilyen felvilágosítást nem kaptunk eddig.

A fenti programot BENCZUR ANDRÁSsal közösen készítettük. Hasonló probléma — a másodrendű egyenlet, az ún. *Langevin* egyenlet — megoldásával foglalkozik H. GAUDI ISTVÁN és GY. NÉMETH TERÉZ programja.

## 4. § Példák sztochasztikus folyamatok alkalmazására a modell alkotásban

**4.1.** A *Bush—Mosteller*-féle (lásd BUSH—MOSTELLER (1955), ATKINSON (1965)) sztochasztikus tanulási modell feltételezése esetén, amikor is az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ reakciók $(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \mathbf{p}$ bekövetkezési valószínűségei minden lépésben egy a véletlentől, a kísérleti alanytól és a kísérletezőtől is függő $Q$ sztochasztikus mátrix lineáris leképezése útján változnak (jelölje $\tilde{\mathbf{p}}$ az új bekövetkezés valószínűségi vektort, akkor $\tilde{\mathbf{p}} = Q\mathbf{p}$), a következő problémák vetődnek fel. Kísérleti eredmények értékelésekor — a legegyszerűbb *Markov*-típusú függés feltételezése esetén is — a modellben szereplő paraméterek becslése nemlineáris egyenletrendszerek megoldására vezet, így azt csak számológép felhasználásával tudjuk konkrét esetekben elvégezni. A becslések megbízhatóságára (eloszlásaikra, momentumaikra) vonatkozóan csak aszimptotikus eredmények ismertek. A becslések pontos eloszlásainak meghatározása legtöbbször csak szimulációval végezhető el. A feladatoknak szimulációval történő megoldása lehetőséget nyújt annak a problémának a vizsgálatára is — melyet matematikai apparátussal alig tudunk kezelni — hogy mennyiben felel meg a valóságnak a linearitás feltevése, a markovitás feltételezése az eseménysorozat változásában és i.t. Szimulációs úton lehetőségünk van különböző hipotézisek hatásának összehasonlítására és ily módon a reális kísérleti eredményekkel való összevetésre. A megfelelő — lehetőleg optimális — generálási módokkal foglalkoztunk s a CDC gépen rendelkezésre állnak ilyen típusú feladatok megoldására a programok.

**4.2.** A motorikus neuronok s az izomműködés közötti kapcsolatok *Cetlin—Kotov*-féle modelljében (vö. CETLIN—KOTOV (1968)) választ kaphatunk arra a kérdésre, hogy a természetes állapotban milyen kapcsolattal (függvényszerű — és sztochasztikus) írható le a mozgató egység (izomszálak meghatározott összessége, ahol az izomszál hossza, $x(t)$ változik), az őket gerjesztő motorikus neuronok, valamint az ugyancsak a motorikus neuronok által gerjesztett, de azokra impulzus sorozat formájában visszaható RENSHAW sejtek között. CETLIN és KOTOV szerint a megfeszített izom dinamikáját az

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F(t) - mg$$

egyenlet írja le, ahol az $m$, $k$, $\mu$ együtthatókat fiziológiai mérések alapján lehet megadni, $mg$ az izom terhelése, $F(t)$ pedig a mozgató egységekből adódó feszítés értéke.

A mozgató egység működését az $f(t)$ feszítési függvény írja le, ahol első közelítésben $f(t)$ — a gerjesztés után — lineárisan változik maximális értékének eléréséig, majd exponenciálisan csökken.

Egy motorikus neuront két függvénnyel: a $\varphi_M(t)$ állapotfüggvénnyel, és a $P_M(t)$ küszöbértékfüggvénnyel írjuk le. A $\varphi_M(t)$ állapotfüggvényt könnyítő (amikor is

$\varphi_M(t)$ növekszik) és fékező (amikor is $\varphi_M(t)$ csökken) külső hatások érhetik. Külső hatás hiánya esetén $\varphi_M(t)$ exponenciálisan csökken. A neuron gerjesztődik $t_0$-ban ha $\varphi_M(t_0) \geqq P_M(t_0)$. Gerjesztés után impulzust küld a mozgató egységbe ($t_2$ időkéséssel), az állapotfüggvény 0-vá válik ($\varphi_M(t_0+\varepsilon) = 0$) míg $P_M(t)$ a $P_{Mi}$ értékkel növekszik és exponenciálisan csökkenni kezd ($P_{M_0}$-ig).

A motorikus neuronok $\varphi_M(t)$ állapotfüggvényeit az izom hosszától függő konstans érték s $\xi(t)$ fehér zaj folyamat összege adja meg (vigyázva arra, hogy $\varphi_M(t)$ értéke nagy valószínűséggel pozitív legyen). Az egyes neuronok fehér zaj folyamatait függetleneknek tételezik fel. A *Renshaw* sejteket $\varphi_R(t)$ állapotfüggvényük, $P_R(t)$ küszöbérték-függvényük és $\vartheta_R(t)$ az utolsó gerjesztésük óta eltelt időfüggvénye jellemzi. E három függvényt elemi függvények segítségével szokás megadni.

A motorikus neuronok számát, kapcsolatukat a mozgató egységekkel, valamint a *Renshaw*-sejtekkel, táblázatban szokás megadni (esetleg véletlenszerűen is) imitálás esetén.

Ezzel a modellel sikerült megmagyarázni — elsősorban a *Renshaw*-sejtek deszinkronizáló hatását hangsúlyozva — normális viszonyok között a motorikus neuron kötegek aszinkron működését. A rendszert jellemző paraméterek változtatásával nem sikerült választ kapni patológikus jelenségekre, ami arra utal, hogy a fenti modell túl erős egyszerűsítéseket tartalmaz.

Már CETLIN—KOTOV cikkében szerepel utalás arra, hogy a motorikus neuronok véletlen pulzációja jellegének megváltoztatása megoldhatná ezeket a kérdéseket. Ha az előbb ismertetett modellben a $\varphi_M(t)$ állapotfüggvényt megadó $\xi(t)$ független fehér zaj folyamatok helyett függő és stacionárius *Markov*-típusú folyamatokat tételezünk fel — ahol a

$$\xi(t) = Q\xi(t-1)+\varepsilon(t)$$

összefüggéssel leírt $\xi(t)$ folyamat $Q$ mátrixát tekintjük a *Renshaw*-sejtek működésétől függőnek — az aszinkron és szinkron működésre $Q$ karakterisztikus gyökeinek valós ill. komplex volta ad felvilágosítást. Komplex karakterisztikus gyökű $Q$ mátrix esetén $\xi(t)$ véletlen periódussal működő folyamatot ír le, melynek alapján a motorikus neuron kötegek szinkron működése megmagyarázhatóvá válik. Egy ilyen típusú program elkészítése még nagyteljesítményű gép figyelembe vétele esetén is mintegy egyéves munkát vesz igénybe.

## IDÉZETT IRODALOM

АРАТО, М. (1962): Оценка параметров стационарного марковского процесса, Д. А. Н. **145**, Но 1, 13—16.

(1968): Вычисление доверительных границ для параметра „затухания" комплексного сгационарного гауссовского макковского просесса, *Теория вероятностей и ее прим.*, 13, Но, 3, 328—333.

(1970) [1]: *Elemi Gauss-folyamatok statisztikai problémái,* Doktori disszertáció.

[2]: Тонные формулы для плотностей мер элементарные гауссовских процессов, *Studia Sci Math. Hung.* 5, No. 1—2. 17—27.

Арато М.—Бенцзур А. (1970): Фуннкци распределения оценки параметра затухания стационарного гауссовского Макковского процесса, *Studia Sci. Math. Hung.* 5, №. 3—4 445—456.

ATKINSON, R.—BOWER, G.—CROTHERS, E. (1965): *An introduction to mathematical learning theory,* Wiley.

BUSH, R.—MOSTELLER, F. (1955): *Stochastic models for learning,* Wiley.

Cox, D. (1966): The null distribution of the first serial correlation coefficient, *Biometrika,* **53**,623—626.

Гелфанд, И. —Йаглом, А. (1956): Интегрирование в функциональных пространствах и его применение к квантовой физике, *Успехи мат. наук* **11** (67) Но 1, 77—114.

Гихман, Й.—Скороход, А. (1968): *Стохастические дифференциальные равнения,* Киев, Наукова Думка.

Голенко, Д. (1965): Моделирование и статистический анализ псевдослучйных чисел, На З. В. М., Москва, Наука.

Ибрахимов, Й.—Розанов, Ju. (1970): *Гауссовские случайные процессы,* Москва, Наука.

NAYLOR, T.—BÁLINTFY, J.—BÜRDICH, D.—CHU KONG (1966): *Computer Simulation techniques* Wiley,

ORCUTT, G.—WINOKUR, H. (1969): First order autoregression, inference, estimation and prediction, *Econometrica,* 1—14.

ROBINSON, E. (1967): *Multichannel time series analysis with digital computer programs.* Holdan Day.

ROSENBLATT, F. (1962): *Principles of neurodinamics,* Washington, Spartan.

TUKEY, J.—COOLEY, F. (1965): *Math. of Compt.* **19**, 297.

Цетлин, М. Л.—Котов, Й. Б. (1968): Моделирование работы пула мотонейронов, НаЗ.Ц. В.М. *Проблемы кибернетики,* Но 20.

# A CONTROL DATA 3300 SZÁMOLÓGÉP KONFIGURÁCIÓJA ÉS ÜZEMELTETÉSI RENDSZERE*

Írta: BÉKÉSSY ANDRÁS

## 1. Bevezetés. Nagyteljesítményű elektronikus számológépek struktúrája

A belső tárolású programmal vezérelt, digitális, elektronikus számológépek műszaki kivitelezésének ismeretes változásai — a generációváltozások — mellett szervezésük logikai struktúrája is változáson esett át az elmúlt húsz év során, legalábbis, ami a közepes és nagyteljesítményű gépeket illeti. A hagyományosnak nevezhető koncepció szerint a gép középpontjában az *aritmetikai egység* áll, amely az effektív munkát, a szorosabb és tágabb értelemben vett számolást végzi; ezt a munkát irányítja a *vezérlő egység*, amely a *központi tárolóban* levő program utasításainak megfelelően irányítja az információáramlást az aritmetikai egység és a tár között, míg a külső kommunikációt *bemeneti* és *kimeneti periferiális egységek* biztosítják ugyancsak a központi vezérlő egység irányítása alatt, az aritmetikai egység felhasználásával. Ez az aritmetikai egységre összpontosított koncepció logikailag kifogástalan — hiszen minden más fő egység csupán adminisztrálja a gép információátalakító tevékenységét —, mégis az idők során előállt változások miatt a modern, nagyteljesítményű számológépek működésmódját jobban megérthetjük, ha a fentebb vázolt hagyományos kép helyett a következőt vesszük alapul:

A gép központjában egy nagykapacitású, elég gyors központi *tároló* áll, amely mindazt az információt tartalmazza, amelyre a gépnek pillanatnyilag szüksége van. A tárat különböző rendeltetésű vezérlő és aritmetikai típusú egységek veszik körül; ezek működési üteme általában gyorsabb, mint a központi táré, azzal a következménnyel, hogy általában *várnak* a tárhoz való hozzáférésre, *megosztoznak* rajta, és konfliktus esetén valamilyen célszerű prioritási elv alapján sorban állnak a tárolóhoz intézett követeléseikkel. Munkájuk nagymértékben *független egymástól*, párhuzamosan dolgozhatnak, és együttműködésük műszaki alapjai azáltal vannak biztosítva, hogy vezérlő jelekkel informálják egymást állapotukról. E jelek egy része csupán informatív jellegű: a fogadó egység szükség szerint felhasználja vagy nem használja fel őket, más részük indító parancs a fogadó egység számára, végül egy részük *megszakító* (interrupt) jel, amely a fogadó egység munkáját félbeszakítja. A vezérlő jelek rendszere az egyes egységek együttműködésének csupán alapját és lehetőségét teremti meg, az együttműködés tényleges szervezését egy állandóan jelen levő üzemeltetési program, az ún. *operációs* vagy *operatív rendszer* (operating system, operating software) végzi. A hagyományos gép központi vezérlő egysége általában csak *egyike* a tárhoz illeszkedő vezérlő egységeknek.

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia 1970. évi Tudományos Ülésszakán, a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának és a Műszaki Tudományok Osztályának „A számológép-tudomány kérdései" című közös vitaülésén.

Annak magyarázatát, hogy a nagyobb teljesítményű gépek struktúrája idők folyamán így alakult, több speciális körülményben találhatjuk; az alábbiakban röviden foglalkozom ezekkel az okokkal.

A tárnak — paradox módon — azért van központi szerepe a modern gépek struktúrájában, mert nem elég tökéletes: soha sem elég nagy és elég gyors. Már a gépépítés kezdeti szakaszában is a fő probléma nem túlságosan drága és főleg: elég nagy kapacitású és elég gyorsan elérhető központi tár műszaki megvalósítása volt. A mindenkori színvonalon mindig lehetett, nem túlságosan nagy költséggel, egy adott sebességű (elérési idejű) tárhoz olyan aritmetikai és vezérlő egységet illeszteni, amelynek regiszterei gyorsabbak voltak a tárnál, ugyanakkor a központi nagykapacitású tárat nem lehetett ugyanilyen típusú regiszterekből felépíteni az elviselhetetlen költségek vagy műszaki akadályok miatt. Így a fejlődés minden adott szakaszában a korszerűnek mondott számológép teljesítményét elsődlegesen központi tárolójának elérési ideje szabta meg, illetőleg korlátozta; így van ez ma is.

A párhuzamos működtetés lehetőségét elsősorban a periferiális berendezések kényszerítették ki. Ezek az író-olvasó berendezések, valamint a nagykapacitású tömegtárolók (mágneses szalagok, dobok, lemezek és kártyák) minden műszaki fejlődés és erőfeszítés ellenére, mechanikai mozgáshoz való kötöttségük miatt, teljesítmény tekintetében nagyságrendekkel maradtak el a központi, tisztán elektronikus felépítési egységekhez képest. Húsz év alatt a központi egységek sebessége több mint ezerszeresére, a periferiálisaké mintegy tízszeresére növekedett, pedig az utóbbiak már az „indulásnál" viszonylag lassúak voltak. A jövőben sem várható az arányok javulása, inkább romlásuk. Ezért a központi egységek potenciálisan nagy teljesítményének realizálására a géptervezők elvileg új megoldást kerestek, elkerülendő azt a kínos állapotot, hogy a drága gép minden üzemórájából csak néhány másodpercet foglalkozzék programvégrehajtással, a maradék időben pedig programbetöltésre várakozzék vagy eredménykiíratással, általában adatmozgatással töltse idejét. Igyekeztek tehát a periferiális egységek munkáját nagymértékben függetleníteni a központi egységekétől avégett, hogy a periferiális tevékenység a központi programfeldolgozással párhuzamosan folyhassék — legalábbis elvileg, vagyis, hogy ne legyen a műszaki konstrukcióban rejlő, áthághatatlan várakozási kényszer. A párhuzamos működtetés megvalósításához műszakilag a központi (programvégrehajtással foglalkozó) vezérlő egység mellé egy vagy több, ettől független, más rendeltetésű, nevezetesen a periferiális egységeket vezérlő egységet kellett állítani, olyat, amelynek saját regiszterei (vagyis gyors elérésű tárolói), esetleg külön kis aritmetikai egysége is van, hogy a központi aritmetikai egység ne legyen terhelve. A függetlenség egyes géptípusoknál odáig megy, hogy perifériamozgató berendezés egy teljes (kis) számológép.

Modern gép nem képzelhető el igen nagy kapacitású tömegtárak nélkül. Közös tulajdonsága e tárolótípusoknak, hogy egy-egy információblokk elérésére viszonylag nagyon hosszú ideig kell várakozni egy-egy olvasási vagy írási utasítás kiadása után, ha viszont a keresett blokk megvan, akkor az adatátvitel a központi tár és a tömegtár között gyorsan végbemegy, szinte függetlenül attól, hogy a blokk milyen hosszú. A nagy kapacitás, a tárolás ilyen módjának viszonylagos olcsósága és a központi tárral való gyors közlekedés indokolja, hogy ezek a tárolótípusok mint tömegtárak jelentős szerepet kapjanak a korszerű gépekben, és mintegy a központi tár „hátterét" alkossák, a nagy adatraktárat. A blokkok elérésének viszonylagos lassúsága viszont azt követeli, hogy ezeket a tárolótípusokat az előbbi, szűkebb értelemben vett periferiális egységek (kártyaolvasó, nyomtató stb.) közé sorolva függetlenítsék a központtól, vagyis saját, külön, autonóm vezérlést kapjanak.

Végül, ami az aritmetikai egységek megszaporodását illeti: tudományos és műszaki számítások során nélkülözhetetlen a lebegőpontos aritmetika, ügyviteli adatfeldolgoztatásnál pedig a direkt decimális (bináriskonverziókat megkerülő) aritmetika, valamint a nem-numerikus információn való közvetlen manipulálás lehetősége. Az ehhez szükséges berendezések állhatnak közvetlenül a központi vezérlő egység hatáskörében, de előnyös, vagy legalább is nem hátrányos, ha saját vezérlésük van és a központi aritmetikai egység adatcsatornáját, valamint regisztereit nem használják.

Így áll össze az előzőkben vázolt kép: a központi tárat körülálló vezérlő és aritmetikai típusú, egymással informatív, illetve fölé és alárendeltségi viszonyban álló, de egymástól nagymértékben függetlenített, időben párhuzamos tevékenységre képes egységek rendszere. Egy ilyen gép struktúrája közelebb áll együttműködő számológépek rendszerének fogalmához, mintsem a hagyományos fogalomhoz.

Az említett „eszmei" szempontok mellett a számológépeknek modulszervezésű komplex rendszerekké való átalakulását kereskedelmi szempontok is siettetik: a gyártó cégek az éles versenyben nem egyetlen géptípussal, hanem gépcsaládokkal, és egy-egy típuson belül különféle „konfigurációkkal" lépnek piacra, annak érdekében, hogy egyetlen átfogó fejlesztési terv megvalósításának költségei árán a keresletnek lehetőleg minél szélesebb spektrumát tudják versenyképesen lefedni, hogy az eltérő igények ne különböző tervű gépeket, hanem csak különböző összeállításokat jelentsenek, csak azt, hogy egy-egy modul megvan-e vagy nincs.

Természetesen hiába működhetnek például a periferiális egységek a központi aritmetikával párhuzamosan, egyetlen program szemszögéből nézve nem lehet megkerülni azt a logikai kényszert, hogy előbb kell egy programot a központi tárban elhelyezni, és csak azután lehet végrehajtani, vagy hogy előbb kell adatoknak a központi tárba kerülniök, és csak azután lehet számolni velük: e két részfeladat nem futhat párhuzamosan. Általában tehát — egyes speciális esetekben alkalmazható programozástechnikai fogásoktól eltekintve — egy meghatározott feladat elkészültének idejére nézve a periferiális egységeknek a központi egységekkel való párhuzamos működtetése nem jár előnnyel: a munka nem készül el hamarabb. Mialatt azonban egy feladat aritmetikai feldolgoztatását végzik a központi egységek, folyhat ezzel párhuzamosan egy *másik* program beolvastatása, vagy egy másik program adatbeolvastatása. Míg tehát egyetlen munka szempontjából ez a „periferiális időmegosztás"-nak nevezhető párhuzamosság általában nem jelent előnyt, annál inkább előnyt jelent a gép összteljesítménye szempontjából, és a független egységek rendszere, valamint a megszakító jelek rendszere megteremti annak lehetőségét, hogy a központi tárban egyidejűleg több, egymástól független program foglalhasson helyet, és hogy az egyik program kiadhassa a programfeldolgozó vezérlést egy másiknak arra az időre, amíg periferiális átvitelt végeztet a periferiális vezérléssel. Ezt a lehetőséget egy gép multiprogramozhatóságának nevezik, és csaknem minden modern géptípusnál valamilyen formában megtalálható.

Ha több programfeldolgozó vezérlés és aritmetikai egység illeszkedik egy közös tárhoz, akkor beszélhetünk valódi párhuzamos programfeldolgoztatásról (parallel processing), mert akkor lehetőség van két vagy több számításigényes program időben egyszerre való lefuttatására vagy akár arra, hogy egy és ugyanazon algoritmus párhuzamosítható ágait a gép valóban időben párhuzamosan kezelje. Egy ilyen géptípus és gépek összekapcsolt *rendszere* között a határ már meglehetősen elmosódott.[1]

Egyetlen aritmetikai egység esetén a „valódi" párhuzamos feldolgozást lehet imitálni „időszeleteléses" (time slicing) üzemeltetési rendszerrel. Ennek lényege, hogy a központi tárban levő programokkal a vezérlő egység egymás után foglalkozik, mindegyikkel egy meghatározott ideig, például 0,05 másodpercig (amely idő hosszú a központi egységek időskáláján, és lehetővé teszi például 50 000 utasítás végrehajtását, de rövid idő az emberi munka és a periferiális egységek szempontjából). Szemléletes szóhasználattal a programok ebben az üzemeltetési rendszerben nem sorban, hanem „körben állnak", és egymás után mindegyiküknek jut egy rövid idő. (Az előbb említett „periferiális időmegosztás" e mellett szintén be lehet építve az üzemeltetési rendszerbe.)

Az időszeletelés önmagában nem növeli a gép teljesítőképességét, de rövid és kis igényű munkáknak bizonyos mértékig előnyt biztosít. Tekintsünk egy egyszerű példát: tegyük fel, hogy a gépben pillanatnyilag három darab, egyenként 10 perc számolást igénylő munka van. Ha sorban állnak, akkor az első tíz perc végére az első, a második tíz perc végére a második, a harmadik tíz perc végére a harmadik munka készül el. Ha az üzemeltetési rendszer az előbb említett módon felszeleteli az időt, akkor mind a három munka körülbelül egyszerre, félóra múlva lesz készen. A rendszer tehát egyikük számára sem előnyös. Tegyük fel azonban, hogy időközben érkezik egy 1 perc időigényű munka is, és beáll a körbe. Most az eredeti három feladat 31 perc alatt lesz készen, szemben az előbbi 30 perccel, ami viszonylag nem sokat számít, az 1 perces munka viszont készen lesz az érkezésétől számított 4 perce múlva. Ez utóbbinak tehát nem kellett kivárnia a fél órát, amíg az előbb érkezett munkák elkészülnek, hanem a gép azonnal fogadta és feldolgozta. Ezért az üzemeltetési rendszernek ezt a fajtáját olyan gépeknél alkalmazzák előnyösen, amelyek hosszú lefutású munkák mellett sok, de kis időigényű munkát is kapnak, általában távoli, kihelyezett periferiális egységen keresztül. A kihelyezett periféria kezelője vagy programozója azt tapasztalja, hogy semmit sem kell várnia, a gép azonnal fogadja a munkát, kezd rajta dolgozni, és el is készül vele elfogadható idő alatt. Természetesen, ha ez a feladat tíz másikkal együtt áll a körben, akkor tízszer lassabban fog elkészülni, a kihelyezett periféria tulajdonosa tehát logikailag egy tízszer lassúbb gép birtokosa. Egy nagyteljesítményű, $10^6$ utasítás/sec feletti sebességű központi egység esetében azonban az effektív tízszeres lassulás kevéssé érinti azt a felhasználót, aki például egy 20 másodperces számolást igénylő munkát ad le. Őt inkább az bosszantaná, éppen mert csak 20 másodpercet kér (és mert nem tud tovább lépni, amíg eredményt nem kap), ha ki kellene várnia előbb érkezett hosszú munkák végét.

Periferiálisan vagy időszeleteléses üzemben multiprogramozott gép általában egymástól teljesen *idegen* programokon dolgozik. A feldolgozás rendjét egymás között megszervezni ilyen programok képtelenek, ezt csak egy, az egyes felhasználói programokon felül álló, őket vezérlő, *exekutívnak* vagy *supervisornak* nevezett, állandóan a tárban levő standard program képes, amely egyébként része — multiprogramozásnál elengedhetetlen része — az *operációs rendszernek.*

[1] A beszerzett konfiguráció ugyan egyetlen központi egységet tartalmaz, tehát a jelzett párhuzamos számoltatásra nincs mód, de általában a CDC rendszerei bővítési lehetőségeket tartalmaznak ebben az irányban; például 3300-as központi egységek összekapcsolhatók.

## 2. A konfiguráció

A Magyar Tudományos Akadémia által beszerzett számológép a Control Data cég 3000 jelzésű gépcsaládjának 3300 típusú tagja. A második generációhoz tartozik, tranzisztor-felépítésű, világviszonylatban közepes teljesítményű, hazai viszonylatban ez idő szerint a legnagyobb. A gép beszerzett konfigurációja a teljes kiépítési lehetőségekhez képest ugyancsak közepesnek mondható. Leírásában követem a modern elektronikus számológépek működési elveinek az előbbiekben vázolt sémáját.

A leírást tehát a tárral kezdem: a központi tár ferritgyűrűs rendszerű, kereken 1,5 millió bitnyi hasznos kapacitással. 24 bit érhető el egyidejűleg, az elérési idő effektív értéke 1,375 μsec. Az olvasás ellenőrzésére írásnál 6 bitenként egy párosságvizsgálat célját szolgáló hetedik bit képződik és olvasáskor ellenőrzésre kerül. A központi egységekben más belső ellenőrzés nincs. A tárolókapacitás maximálisan 6,4 millió bitre fejleszthető, és különböző szempontok indokolják, hogy a jelen kapacitás mihamarabb legalábbis 2 millió bitre egészüljön ki.

A gép általában szószervezésűnek mondható; 24 bit alkot egy szót; szóegységben mérve a tár kapacitása kb. 65 000 szó. Megtalálhatóak azonban a modernebbnek tartott byte-szervezés elemei is, amennyiben minden 6 bitből álló, „karakter" elnevezésű szórész külön címezhető, és az utasítások egy részében szó-címekkel, más részükben karakter-címekkel kell a tárhoz fordulni. A lebegőpontos ábrázolás 48 bitet (két egymásutáni című szót) igényel.

A programfeldolgozással foglalkozó „fő" vezérlő egység általában egyszavas, egycímű utasításokat hajt végre, de vannak két és három szónyi hosszúságú, többcímű utasítások is.

Egy másik vezérlő berendezés az ún. „blokkvezérlés", amely az előbb említett fő vezérlő egység indító jelére, a szükséges paraméterek megadása után, önállóan, saját gyorsregiszterei segítségével a háttértárolók és egyéb periferiális berendezések információátviteli csatornáit irányítja. A blokkvezérlés egyik oldalon a periferiális berendezések vezérlő egységeivel, a másik oldalon a központi tároló bemenetével áll vezérlő összeköttetésben. A jelen konfigurációban 6 adatátviteli csatorna van; 5 darab 12 bit, 1 pedig 24 bit párhuzamos átvitelére alkalmas. Minden csatornához legfeljebb 8 periferiális vezérlő egység lehet csatolva, és minden periferiális vezérlő egység is legfeljebb 8 (azonos típusú) periferiális egységet szolgálhat ki. A csatornák száma is legfeljebb 8 lehet. A periferiális egységek használatára szóló input-output utasításokat a fő vezérlés a blokkvezérlésnek adja ki önálló végrehajtásra, előzőleg azonban ugyancsak a blokkvezérlésnek szóló megfelelő utasításokkal, a megfelelő csatornát a periferiális vezérlő egységhez, ez utóbbit pedig a kért periferiális egységhez kell csatolni. Ennek részleteivel nem foglalkozom, csupán megjegyzem, hogy egy csatorna egyszerre csak egy periferiális vezérlő egységet, és ez utóbbi csak egy periferiális egységet tud kiszolgálni. Ha a kívánt csatorna foglalt lenne, akkor elutasító jelet ad és a rendszernek várnia kell, amíg felszabadul; egy másik, esetleg szabad csatorna nem használható, mert minden periferiális egység egy, a telepítésnél meghatározott csatornához tartozik egyszer s mindenkorra.

A blokkvezérlés hatáskörébe esik ezenfelül néhány olyan, nem input-output utasítás is, amelynek végrehajtása során sokszor kell a tárhoz fordulni; ilyenek a csoportos mozgató és kereső utasítások.

Mivel a periferiális egység munkája viszonylag lassú, a blokkvezérlésnek van prioritása a tár elérésére. A blokkvezérlés tehát egy-egy ütemnyi időre, amikor a csatorna és a tár között éppen átvitel megy végbe, feltartja a programfeldolgozó vezérlést.

Ha a blokkvezérlés végzett aktuális feladatával, megszakító jelet (és egyéb információkat) küld a fő vezérlésnek, amely ezt állapotától függően elfogadja vagy nem fogadja el. Mivel a megszakítást előbb-utóbb csak el kell fogadnia és fel kell dolgozgoznia, ha a megszakítás pillanatnyilag nem fogadható el (például azért, mert a vezérlés éppen egy korábbi megszakítást dolgoz fel), akkor a jel inaktív állapotban tárolódik, és tároló regiszterét később utasítások segítségével lehet kikérdezni.

Az előbbiekben is, és részletesebben most a CDC 3300 géppel kapcsolatban is említettem a megszakító jeleket. Megkísérlem ezek szerepét itt röviden megvilágítani.

A programfeldolgozó vezérlést elsősorban a program utasításai irányítják. Másodlagosan és *közvetve* irányítják azok az informatív jelzések, amelyek más egységektől érkeznek, regiszterekben tárolódnak, és programutasítások segítségével kikérdezhetők; így közvetve, a kikérdezés eredményétől függővé tett programágakkal, befolyásolják a munkáját. Hatásuk ilyen módon attól függ, hogy az adott programban van-e olyan utasítás, amely a megfelelő időpontban egy-egy ilyen regisztert kikérdez. Multiprogramozott gép esetében azonban kellenek olyan jelek is, amelyek *kényszerítő erejűek:* érkezésük ütemében megszakítják a vezérlő egység normális tevékenységét. Ezek a megszakító, interrupt jelek. Ilyen interrupt például az a blokkvezérléstől érkező jelzés, hogy egy periferiális átvitel befejeződött. Ennek elindítása után ugyanis a multiprogramozás keretében, a vezérlést egy másik program kapta meg. Most, a periferiális adatátvitel befejezése után, az eredeti programnak valahogyan vissza kell kapnia. A megszakító jel hatására a vezérlő egység eddigi munkáját abbahagyja, és a tár egy meghatározott, speciális címéhez fordul, onnan kezdve hajt végre utasításokat: ez a megszakítás *feldolgozása.* A megszakítás során az elektronika automatikusan is bizonyos információkat ad át; azokat az információkat helyezi el a tároló speciális rekeszeiben, amelyek a megszakítás feldolgozásához, majd később, a megszakítás feldolgozása után, a normális munkához való visszatéréshez kellenek. Egyik programról egy másikra való áttérés ugyanis egy sereg intézkedést kíván mind az abbahagyott, mint az átvett programra nézve: aritmetikai és egyéb regiszterek tartalmát ki kell menteni, illetőleg visszaállítani. A megszakításokat feldolgozó rutinok alkotják a már korábban említett, a multiprogramozott gépek üzemét rendben tartó exekutív részét. A megszakításokat feldolgozó rutinok szabályos, megírt és megváltoztatható programok, természetesen azonban ezekbe „belenyúlni", őket megváltoztatni, felhasználói programokból nem lehet. Sőt, annak ellenértékeképpen, hogy a felhasználóknak semmi gondja sincs a megszakításokkal, egyáltalán azzal, hogy saját programjukon kívül a gépben még más programok is vannak, a felhasználói programok egyáltalán nem is élhetnek olyan utasításokkal, amelyekkel zavarhatnák a multiprogramozott üzem rendjét. Így, hogy egy példát említsek, a felhasználóknak nincs joguk ahhoz, hogy *fizikailag megállítsák* a vezérlő egységet. Ezzel ugyanis nemcsak saját programjukat állítanák meg (mert pl. vége van), hanem minden egyebet is. Ezért a megállító utasítás valójában nem állít meg semmit, hanem maga is *megcsonkítást okoz,* hatására a vezérlés belép abba a rutinba, amely az ilyen természetű megszakítás feldolgozására hivatott: átvesz és elindít egy másik programot, de a megállítót — érthető módon — többé nem veszi vissza. A felhasználó továbbá nem írhat programjába olyan utasításokat, amelyekkel *közvetlenül* fordulna például a kártyaolvasóhoz adatbeolvastatás céljából, mert lehet, hogy az olvasó éppen egy másik program számára dolgozik. E helyett a programba az operációs rendszernek egy szubrutinját kell hívnia, ez megszakítást okoz, a vezérlés belép a feldolgozó rutinba, ez átveszi az átvitel megindításához szükséges paramétereket, megvizsgálja, hogy a kártyaolvasó szabad-e, elvégzi a csatolást vagy ha az lehetetlen, akkor kiváratja az igénylő programot; elindítja az átvitelt és a központi vezérlést egy másik programnak adja át.

Megszakítást okoznak még bizonyos programhibák (például túlcsordulás az aritmetikai egységben), műszaki hibák (például párossági hiba valamelyik adatcsatornán) és a gép *belső órájának* jelei. Minden megszakítástípus feldolgozására az exekutív speciális rutinokat tartalmaz.

Még annyit, hogy a megszakításokkal kapcsolatos első megállapítás, hogy ugyanis a megszakító jel elfogadása minden körülmények között kényszerítő erejű, nem teljesen igaz. Normális programfeldolgozási tevékenysége alatt a vezérlő egység minden megszakítást elfogad. Amikor elfogadta, speciális rutint kezd végrehajtani. A megszakítások azonban véletlenül jöhetnek sűrű egymásutánban is, és ezért gondoskodni kellett arról, hogy egy másodiknak érkező jel ne szakíthassa meg a vezérlést akkor, amikor éppen az elsőt dolgozza fel. Ilyen esetekre a megszakításnak *kikapcsolhatónak* kell lennie, és valóban ilyen is; a kikapcsolás mértékét utasítások szabályozzák (ezeket az utasításokat pedig az exekutív feldolgozó rutinjai használják). Ugyanakkor gondoskodni kell a kikapcsolt állapotban kapott megszakító jelek megőrzéséről, későbbi felhasználás céljából. Pontosabban véve tehát a megszakító jelek kényszerítőek a vezérlő egység normális, ún. programállapotában, de kikapcsolhatóak abban a „monitorállapotban", amelyben az exekutív rutinjait hajtja végre.

Az aritmetikai egység bináris és fixpontos, működése általában egy szónyi bitsorozatot érint.

Két, cím szerint egymás után következő szó alkothat egy standard ábrázolású lebegőpontos adatot. A lebegőpontos aritmetikai műveleteket egy opcionális modul hajtja végre, ha ilyen nem volna az operációs rendszer szubrutinnal szimulálja. A lebegőpontos modul nem független, hanem a fő vezérlő egység hatáskörébe esik, és a műveletek végrehajtását a központi vezérlés kivárja. Hiba (nullával való osztás, fix- vagy lebegőpontos túlcsordulás) esetén megszakító jel keletkezik. A lebegőpontos modul természetesen beszerzésre került.

Binárisan kódolt decimális jegyeket ábrázoló karaktersorozatokon egy külön vezérlő egységből és aritmetikai egységből álló modul képes direkt decimális összeadást és kivonást végrehajtani. Ugyanez a modul a programból vett speciális utasítások alapján, a fő vezérlő egység indító jelére, egy sereg más, karakterkezelő műveletre képes; ezek meggyorsítják az „üzleti adatfeldolgoztatás" jellegű feladatok elvégzését. E modul hatását azok a felhasználók, akik nem fognak gépi kód szinten programozni, COBOL forrásnyelvű programjaik viszonylag gyors lefutásán érezhetik. Hosszú karaktersorozatokon való műveletvégzés azzal jár, hogy e modul ismételten és sokszor fordul a tárhoz, ezt azonban olyan sűrűn teszi, hogy — ellentétben a blokkvezérléssel — nem tartották érdemesnek a fő vezérlő egységgel és aritmetikával párhuzamos működésre kiépíteni; a fő vezérlés tehát megvárja e hosszú műveletek befejezését. Hiba esetén itt is megszakító jel képződik.

Bár ez az „üzleti adatfeldolgozó segédgép" (Business Data Processor) neve szerint is elsősorban ipari, kereskedelmi, ügyviteli adatfeldolgozás céljait szolgálja, mígy a Magyar Tudományos Akadémia számítástechnikai igényei nagyrészt műszaki-tudományos jellegűek, mégis teljes mértékben indokoltnak tartom, hogy a lebegőpontos modul mellett ez a másik is beszerzésre került, mert látható, hogy éppen műszaki és tudományos jellegű és célú problémák egyre inkább igénylik nagytömegű adat kezelésének és feldolgoztatásának (például statisztikai feldolgoztatásának) részfeladatként való elvégeztetését. Nem ritka eset, és a jövőben bizonyára gyakran fog előfordulni például, hogy egy-egy felhasználó intézmény egy nagy adatrendszert (például mérési adatokat) a gép tömegtárolójában nem egy konkrét program számára, hanem távolabbi célkitűzéssel helyez el, nevezetesen azzal, hogy a továbbiakban különböző célú, esetleg egymás eredményeire is építő programokban használja fel őket, és az adattárat folyamatosan kibővíti vagy szelektálja. Az ehhez szükséges adatkezelési részfeladatok nem különböznek elvileg az üzleti adatfeldolgozás problémáitól, és általában nem is egyszerűbbek.

A központi egységek tárgyalásának befejezéséül szeretném a műveletvégzés átlagos sebességét néhány hozzávetőleges adattal jellemezni. Az egyes utasítások elvégzésének ideje ugyan ismeretes[2], de különböző, és az átlagszámításnál különböző szempontok különböző súlyozást indokolnak. Ezért az ilyen számokat túl komolyan venni nem szabad. Saját számításom szerint[3] a műveletvégzés átlagos sebessége 220 000 utasítás/sec.[4]

A központi egységekhez háttértárolóul mágneses lemezek, szalagok és dobok szolgálhatnak. A jelen konfigurációban 4 lemezegység (cserélhető lemezcsomagokhoz) és 3 szalagegység van, mindkét tárolótípus igen fontos a gép használhatósága szempontjából. A háttértárolók azt a célt szolgálják, hogy a felhasználók nagy adattömegeket és ismételten felhasználásra kerülő programokat helyezhessenek el, gyors elérhetőséggel. Az elhelyezés lehet átmeneti (egy feladatra szóló) vagy tartós. Átmeneti tárolásra a lemezeket célszerű használni, és természetesen tartós tárolásra is előnyösebbek a lemezek, csak éppen kérdés, — és a tapasztalat fogja kialakítani az elfogadható gyakorlatot —, hogy milyen mértékben engedhető meg lemezcsomagok állandó jelleggel való lefoglalása különböző felhasználók részéről. Mágneses szalagon való — összehasonlíthatatlanul olcsóbb — tárolásnál ilyen problémának nem szabad felmerülnie; kell, hogy elég szalag álljon rendelkezésre, csak — sajnos — a szalagok lassúbbak és általában kevésbé megbízhatóak.

Maga az üzemeltetési, operációs rendszer saját céljaira kizárólag mágneses lemezt használ (például lefordított programok átmeneti, futtatás előtti tárolására) és ehhez legalább két lemezegységet lefoglal; az így lefoglalt kapacitás jó részét azonban az egyes programoknak visszadja, amennyiben felhasználói programok munkaterületet kérhetnek ebből a tárkapacitásból is.

[2] Néhány illusztratív adat:

| | | |
|---|---|---|
| Egy szó kiolvasása a tárból: | 2,5 | μ sec |
| Feltételes ugrás: | 1,9 | μ sec |
| Lebegőpontos összeadás: | 10,0—12,0 | μ sec |
| Lebegőpontos szorzás: | 14,0—18,0 | μ sec |

(Compass Training Manual №. 60 184 200)

[3] Gibson-mix III.

[4] Csupán a nagyságrend jellemző. Összehasonlításul megjegyzem, hogy a Központi Fizikai Kutató Intézetnek számos akadémiai intézmény által ismert és használt ICL 1905 típusú gépére ugyanilyen számítás 106 000 utasítás/sec eredményt adott. Megjegyzem továbbá, hogy irodalmi adatok szerint a kereskedelmi forgalomban levő, kimondottan nagyteljesítményű gépekre ez a sebességadat már 1966—67-ben jóval 1,2 millió utasítás/sec felett volt.

Egy-egy lemezcsomag teljes kapacitása $5 \cdot 10^7$ bit $= 8 \cdot 10^6$ karakter; gyakorlatilag a lemez kihasználása sohasem teljes, a hasznos kapacitás kisebb. Egy-egy információblokk átlagos elérési ideje 0,175 sec (ha az író-olvasó karnak két blokk között mozognia kell).

A konfigurációt a szűkebb értelemben vett periferiális egységek: 1 kártyaolvasó, 1 kártyalyukasztó, 1 sornyomtató[5], 1 papírszalag-olvasó-lyukasztó, 1 vonalíró (plotter) és 1 optikai leolvasó (display) egészíti ki.

A gép erősen „kártyaorientált": az operációs rendszer vezérlésére kártyák — vezérkártyák — kellenek[6] és programok is lyukkártyákról olvashatók be egyszerűen. Ennélfogva új programok hibáinak javítása is legegyszerűbb módon a hibás kártyák kicserélésével végezhető el, involválva azt, hogy bejátszási stádiumban levő programokat fizikailag kártyakötegeken tartsunk.[7] A lyukszalag-bemenet adatbeolvastatás célját szolgálja.

A periferiális egységek száma a jelen konfigurációban feltűnően kevésnek látszik. Kritikus egység a kártyaolvasó és a nyomtató, ezeknek műszaki hiba folytán előálló időleges kiesése igen komoly fennakadást okozhat. Egyébként az operációs rendszer a kinyomtatásra váró eredmények számára mágneses lemezen puffert létesít, de ezzel hozzájárul ahhoz, hogy egyetlen nyomtató a gép normális terhelése mellett egyelőre elég legyen. Műszaki-tudományos, számolásigényes feladatokhoz az egyetlen kártyaolvasó terhelése nem látszik túl nagynak: nagytömegű adat beolvastatására feltehetőleg csak ritkán fog sor kerülni, és erre a célra a papírszalagolvasó is segítségül jöhet.

A konfigurációhoz tartozik még egy ún. multiplexor, külön csatornával. Ez az egység azt a célt szolgálja, hogy a későbbiekben kihelyezett, távoli állomásokról lehessen a géphez hozzáférést biztosítani. A távoli állomásokról érkező információ a multiplexoron keresztül juthat a központi tárba.

## 3. Az operációs rendszer

Azok a feladatok, amelyek nagy gépet igényelnek, általában két kategóriába sorolhatók. Az egyikbe tartoznak azok, amelyek a szó szoros értelmében azonnali választ igényelnek a géptől: nem várhatnak — nemcsak azért, mert a felhasználó sürgeti lefutásukat — hanem azért, mert értelmüket vesztik, megoldhatatlanokká válnak, ha a gép nem szolgálja ki őket azonnal.[8] Ilyen típusúak például az irányítástechnika egyes problémái. A másik kategóriába esnek olyan feladatok, amelyek egy bizonyos ideig várhatnak: ilyenek a hagyományos, például műszaki számítások.

Az üzemeltetési, operatív rendszerek szerkezete általában nagy mértékben függ attól, hogy csak az egyik, csak a másik, vagy mind a két problématípus kiszolgálá-

[5] A tanulmány megjelenése idején már 2 sornyomtató tartozik a konfigurációhoz. (A lektor megj.)

[6] Pontosabban: van lehetőség az operációs rendszernek mágneses szalagról való vezérlésére is.

[7] Végleges és kipróbált, lefordított állapotban tömegtárolón tartott állandó használatú programok, és a „nyers", kipróbálás alatt álló, forrásnyelven kártyacsomag formájában őrzött programok mellett van még egy harmadik típus: a fejlesztés alatt álló programok, amelyeket hosszabb perióduson keresztül állandóan módosítanak. Ezeket a programokat lehet tömegtárolón tartani forrásnyelvű változatban és módosításukra (egyáltalán: tömegtárolón tartott információ módosítására) egy speciális, COSY nevű program szolgál.

[8] Az angol terminussal: *real-time* feladatok.

sára készültek-e. Mivel az az operációs rendszer, amellyel a Számítástechnikai Központ gépe üzemel[9], lényegében csak a „várható” típusú feladatokat szolgálja ki, nem foglalkozom itt a „nem várható” típusú problémák operatív rendszereivel szemben támasztott követelményekkel.[10]

Már az ötvenes években, amikor kialakult a nagyteljesítményű gépek központi egységeinek sebessége és a periferiális egységek sebessége közötti kedvezőtlen arány, világossá vált, hogy igen rossz lesz a központi egységek kihasználtságának foka, ha a központi gép maga foglalkozik a periferiális egységek irányításával. Ehelyett, mint legegyszerűbb rendszert, segédgépeket állítottak be a nagy gép mellé az input-output kiszolgálására. A segédgépek lyukkártya-csomagról mágneses szalagra írták át a munkák programjait és adatait, továbbá mágneses szalagról eredményeket írtak ki sornyomtatóra, és a szükséges konverziókat vagy editálást is elvégezték. A „nagy” gép csak az előkészített mágneses szalagokról, illetőleg szalagokra dolgozott. A szalagegységeket ide-oda kellett kapcsolgatni, hol a segédgépekhez, hol a fő géphez.

Ez a rendszer több irányban fejlődött tovább. Az egyik az volt, hogy a segédgépeket úgyszólván beleépítették a fő gépbe, független vezérlésüket (amely azért továbbra is párhuzamos működésre képes maradt) alárendelve a központi vezérlő egységnek; egy másik irányzat a gép multiprogramozhatóságát használja ki olyan értelemben, hogy a segédgép és a fő gép tulajdonképpen ugyanaz a vezérlő és aritmetikai egység, amely multiprogramozott üzemmódban hol a programfeldolgozó fő gép, hol az előkészítő segédgépek funkcióját látja el. Ami a jelen CDC 3300 gépet illeti, itt a szituációt úgy írhatjuk le, hogy a beépített segédgép a „blokkvezérlés”, amely a periferiális csatornákat és a periferiális adatátviteleket önállóan intézi, és ehhez egy minimális kapacitású saját kis tárja is van, mivel azonban mégsem egy komplett, programozható számológép, az input-output műveletek időnként igénybe veszik a központi vezérlő egységet is (pl. decimális-bináris konverzióhoz).

A legegyszerűbb sorbanállásos rendszerben a munka a következő séma szerint folyhatna: A gép beolvassa az első munka kártyáit, és egy tömegtárolóba, jelen esetben egy mágneses lemezre teszi. Nekifog a feladat feldolgozásának, közben azonban már olvassa a következő munka kártyáit is; és egyáltalán, bármikor is a kártyaolvasó megszakító jelet ad, jelezve, hogy új munka csomagja vár beolvasásra, a gép azonnal lemezre teszi az új munkát. A mágneses lemezen tehát egy sorozat munka fog sorbanállni. A gép érkezésük sorrendjében foglalkozik velük. Ha az első feladat eredményei elkészültek, a gép ismét csak lemezre teszi őket, egyúttal azonban elindít egy multiprogramozás keretében harmadik tevékenységet is: eredmények halmazának kinyomtatását (vagy kártyára lyukasztását). E tevékenység keretében a lemezen sorbanálló eredmények egymás után kerülnek nyomtatásra, a nyomtató sebességétől függő gyorsasággal. Ha egyes munkák nagyon nagy tömegű nyomtatni valót hagynak maguk után, akkor torlódás állhat elő, és a „fő” tevékenység, a programfeldolgozás, átmenetileg szünetelni kénytelen. Általában azonban az említett három tevékenység: a munkák beolvasása, a programfeldolgozás és az eredménynyomtatás a multiprogramozás keretében mintegy „egyszerre”, folyamatosan fut.

[9] Mass Storage Operating System = MSOS (3. változat).

[10] A MASTER rendszer „eltűr” real-time működtetést is, de nem szolgálja ki. Pontosabban: a real-time feladat számára ki lehet jelölni egy külön csatornát, amelyet az operatív rendszer másra nem használ. Ha ez a csatorna jelentkezik, akkor a gép elfogadja a megszakítását, és az operatív rendszer azonnal kiadja a vezérlést, ezután azonban mintegy kilép, a real-time feladat megoldásához semmi további segítséget nem ad.

A multiprogramozhatóság lehetővé teszi ezen felül azt is, hogy a programfeldolgozás keretében az elsőnek érkezett munka átengedje a vezérlést a másodiknak érkezett munka számára, arra az időre, míg az első periferiális tevékenységet igényel, például mágneses szalagról kér adatokat. Általában olyan két munka tud nagymértékben párhuzamosan folyni, amely jellegében eltér: az egyik „perifériaigényes", a másik „számolásigényes".

Ennek megfelelően kézenfekvő volt a sorbaállítás rendszerét úgy fejleszteni, hogy a munkák logikailag ne egy, hanem két sorban álljanak: az egyikben perifériaigényes „B típusú", a másikban számolásigényes „C típusú" munkák, és a gép igyekezzék mindkét sorból egy-egy munkát párhuzamosan futtatni.

Ilyen és hasonló meggondolások alapján alakult ki végül is az a forma, amelyben a CDC 3300 MASTER operációs rendszere ténylegesen működik.

Minden munka kártyacsomagját vezérkártyák kell hogy bevezessék, ezeken a felhasználó jelzi a feladat számára kért időt, tárkapacitást, periferiális egységeket, továbbá jellemzi a feladat típusát. A gép az operációs rendszer segítségével az új munka kártyacsomagját azonnal mágneses lemezre olvassa, és a vezérkártyák alapján sorbaállítja. Itt a feladat vár, amíg el nem lehet indítani. Új munka elindítására akkor kerülhet sor, amikor egy korábbi befejeződött, és ezáltal tárkapacitás, illetőleg periferiális egység szabadult fel. A rendelkezésre álló teljes szabad kapacitás alapján ilyenkor dönt az operatív rendszer, hogy a sorbanálló feladatok közül melyiket indítsa el. A mérlegelés során igyekszik számolásigényesnek jelzett feladatot és perifériaigényesnek jelzettet párhuzamosan futtatni. Igyekszik kis időigényűnek jelzett munkákat (amelyek leggyakrabban programkipróbálással kapcsolatos „próbafuttatások") előre venni, de törődik azzal is, hogy hosszúnak ígérkező munka se várjon örökké azért, mert kisigényű munkák állandóan eléje tolakszanak.

Itt ismét hangsúlyozni szeretném, hogy a gép a mondott műveleteket egy programrendszer alapján végzi, ez éppen az operációs rendszer, illetőleg egy része az operációs rendszernek. Ami az elektronika részéről rendelkezésre áll, az csupán a megszakító és informatív jelek rendszere, a gép „viselkedésének" minden további mozzanatát az operációs rendszer programja szabályozza.

Az operációs rendszer e részének tevékenysége utánozza azt, amit egy ügyes gépkezelő tesz, illetőleg tenne, ha elég gyorsan tudna dönteni és intézkedéseit elég gyorsan végrehajtani, a pillanatnyilag szabad gépkapacitás és a várakozó munkák fölötti áttekintés alapján. Az operációs rendszer e része tehát automatizált gépkezelő, és ilyen minőségében egy meghatározott üzemeltetési módot valósít meg. Működése, döntései igen gyorsak és áttekintőképessége is van a munkákról, vezérkártyáik alapján. Operatív rendszer alatt működő gépnél a tényleges gépkezelő nem uralja a gépet; fordítva, az operatív rendszer adja ki parancsait a gépkezelőnek írógépen adott üzenetek formájában.

Tekintsünk most egy feladatot, amely nem a legegyszerűbb, de nem is túlságosan bonyolult, és kövessük végig elkészülésének útján, illusztrálva ezzel az operatív rendszer adminisztratív segítségét. A feladat legyen a következő: lyukkártyacsomagon van egy magasszintű programozási nyelven, pl. ALGOL, COBOL vagy FORTRAN nyelven írt program, amelyet le kell fordíttatni, összefűzni könyvtári szubrutinokkal, valamint a felhasználónak egy korábban készült szubprogramjával, amely már lefordított formában mágneses szalagon van. Az összefűzött programot le kell futtatni már korábban lemezcsomagra felvitt adatok, valamint lyukkártyákon levő aktuális paraméterek alapján. Egyes eredményeket ki kell nyomtatni, másokat pedig további feldolgozás céljából tartósan tárolni mágneses lemezen.

Ez a feladat az operatív rendszer számára egy „munkát" (job) jelent. A munkához tartozó összes kártyákat az operatív rendszer, mint már említettem, azonnal fogadja és lemeztárba teszi, mihelyt a kártyaolvasó jelentkezik. A csomag vezérkártyákból, a forrásprogram kártyáiból és adatkártyákból áll. Az elől álló vezérkártyák alapján az operatív rendszer a munka követelményeit tudomásul veszi, a munkát sorba állítja és alkalmas időben elindítja. Most a munkát az operatív rendszernek egy másik része veszi át, és először is, a további vezérkártyák alapján, egy vezérlő programot, ún. monitort készít a munka egyes fázisainak irányítására.

Az első részfeladat a jelen esetben a program lefordítása; a program kártyáit egy, a fordítást kérő vezérkártyának kell megelőznie. Ez jelzi, hogy melyik fordítóprogramra van szükség, valamint, hogy a fordítóprogram hol keresse a lefordítandó programot (a jelen esetben az ún. „standard input fileon") és hová tegye a lefordított programot, az ún. célprogramot. Az operatív rendszer a mágneses lemezen tárolt könyvtárból lehívja a kívánt fordítóprogramot és átadja neki a vezérlést. Ha nincs hiba, akkor a fordítás el is készül. Fordítás közben a vezérlés a fordítóprogramnál marad, hacsak magasabb prioritású munkák időről-időre el nem veszik.

A fordítás befejeztével a vezérlés a monitorhoz megy vissza, a monitor pedig a munka következő fázisát, az elkészült program összefűzését fogja elindítani. Mivel a jelen esetben a program egy része és az adatok egy része is a felhasználó intézmény privát területén van, mielőtt a program összefűzése megtörténhetne, vezérkártyák útján a hiányzó programrészt tartalmazó fileokat „meg kell nyittatni". A megnyitást az operációs rendszer végzi, és ez abban áll, hogy üzenetet ad a gépkezelőnek a szükséges lemezcsomag vagy szalag behelyezésére, ennek megtörténte után pedig egyezteti a file bevezető blokkjában levő azonosító jelzéseket a vezérkártyákban levőekkel. Ha minden rendben van, akkor a monitor tovább lép, és a program összefűzésére, betöltésére és elindítására hívja az operációs rendszer megfelelő rutinját.

Miután a munka befejeződött, a „nyitott" fileokat le kell záratni, vagy pedig, a munka hibás befejeződése esetén, az operációs rendszer maga lezárja őket. Amíg a file nyitott, addig más munkából érkező igény számára a file hozzáférhetetlen. A megnyitás tehát egyúttal védelem is.

Ha eredményeket vagy kész programot meg akarunk őrizni, akkor elhelyezésükre előzőleg egy filet kell létesíteni. File létesítését is az operatív rendszer végzi: kijelöli helyét, hosszát, azonosító blokkját, az ún. fejcímkét megírja és az új filet nyilvántartásba veszi. Az új file információjához csak megnyitással lehet hozzáférni, a filet megnyitni viszont csak az tudja, aki ismeri a fejcímke azonosító adatait. Ezek között titkosak is lehetnek.

A munka normális vagy hiba folytán abnormális befejeződését az operációs rendszer a konzolon jelzi. Hibajelzéseket (többszáz félét) egyébként nemcsak az operációs rendszer, hanem a fordítóprogramok, futó programok és minden, a rendszerbe tartozó rutin adhat. Hibáknak általában az a hatása, hogy a hibára utaló jelzés és a munka állapotának regisztrálása után az operációs rendszer a munkát elveti. Bizonyos mértékig a programozó írhatja elő, hogy a rendszer milyen mélységű hibajelzéseket adjon.

A CDC 3300 gép MASTER operációs rendszere magasszintű, minden követelményt teljesít, amit általában ilyen rendszerekkel szemben támasztani szoktak. Nagy segítséget jelent a gép felhasználóinak, és lehetőségeinek csak kis részét volt módomban ismertetni, azt is csupán vázlatszerűen. Nem hagyhatom megjegyzés nélkül azonban azt a tényt, hogy az operatív rendszerek használatának ára van; a gép programozóinak meg kell tanulniok az operatív rendszer nyelvét is: a vezérkártyák helyes kiállításának szabályait is. Ez újabb hatalmas adag tanulnivalót jelent, és a programozással kapcsolatos töménytelen hibaforráshoz egy újabbal járul hozzá. A programozók munkáját pedig egyébként is — egyebek mellett — a saját (és mások) hibáival való szakadatlan küszködés jellemzi. Szerencsére annak, aki nem akar nagyon bonyolult műveleteket végeztetni, hanem csak például egy FORTRAN programot lefuttatni, elég csupán néhány vezérkártya szerkezetét ismernie.

Üzemeltetési-operációs rendszer, fordítóprogramok (USASI FORTRAN, USASI COBOL, ALGOL 60) és kezelő (utility) programok tekintetében a gép ellátottsága jó, — amennyire ez tapasztalataink jelenlegi szintjén megítélhető.

A géppel szállított vagy egyéb módon hozzáférhető programanyag matematikai részének, az alkalmazási softwarenak ismertetése külön tanulmányt igényel, amelynek megírására a megfelelő áttekintés és tapasztalatszerzés után, később kerülhet sor.

(Beérkezett: 1970. XI. 29.)

# A SZÁMOLÓGÉPEK SZEREPE A TÖMEGKISZOLGÁLÁS-ELMÉLET ALKALMAZÁSAIBAN*

Írta: GERGELY JÓZSEF ÉS TOMKÓ JÓZSEF

Az utóbbi néhány évtized folyamán a gyakorlati élet különböző területein bizonyos sajátos jellegű problémák vetődtek fel, melyek a matematika egy új ágának, a tömegkiszolgálás elméletének a kialakulására vezettek. Az első lépések A. K. ERLANG nevéhez fűződnek, aki a Koppenhágai Telefon Társulat munkatársaként elsőnek tanulmányozta a telefonforgalommal kapcsolatos kérdéseket. Méltán viselik nevét a telefonforgalom legalapvetőbb formulái.

Kívánatosnak tartjuk már az első sorokban rámutatni arra, hogy a tömegkiszolgálás elmélete túlnyomórészt sztochasztikus törvényszerűségeket vizsgál. Például, Erlang problémái azzal kapcsolatosak, hogy a hívások érkezéseinek és a beszélgetéseknek a véletlenszerűségeiből kifolyólag hogyan ingadozik a telefonközpont foglalt csatornáinak száma, az esetek hányadában kénytelen a központ a beérkező hívást elutasítani avagy, hogy hogyan alakul a várakozó hívások sora.

Az elmondottakból könnyű észrevenni, hogy a gyakorlati élet számos más területén felvetődhetnek az Erlangéhoz hasonló problémák. Elegendő csak az áruházak árusító helyeire, pénztáraira gondolni, s már is egy igen fontos alkalmazási területtel találjuk magunkat szemben. Később részletesen kitérünk más alkalmazási területekre is, felsorolván a legfontosabb kérdéseket és megválaszolásuk lehetséges módjait.

Hangsúlyozni szeretnénk, hogy a gyakorlati élet igényei nemcsak az elmélet kialakulásában játszottak döntő szerepet, hanem az elmélet továbbfejlődésében is.

A matematika több más ágazatára jellemzően itt is felmerülnek nem elsősorban a gyakorlati élet szükségszerűségeiből fakadó, hanem az elmélet kikristályosodására irányuló, az elmélet logikai szerkezetéből s főként valószínűségelméleti vonatkozásaiból származó problémák. Bármennyire fontosak is ezek az elméleti vizsgálatok, melyek mint általában, úgy esetünkben is hasznosnak bizonyulhatnak gyakorlati kérdések megválaszolásakor, a tömegkiszolgálás elméletének alapvető meghatározói a gyakorlat által felvetett tevékenységekkel és erőfeszítésekkel kapcsolatosak.

A tömegkiszolgálás-elmélet és a gyakorlat kapcsolatát méginkább elmélyítették a gyorsműködésű számológépek. Korábban a gyakorlati feladatok bonyolultsága jelentősen korlátozta az elméleti vizsgálat lehetőségét. Igen sok esetben a valóságos felvételekhez való ragaszkodás eleve kizárta, hogy eredményekre vezető matematikai modellt alkossunk. Más esetekben, amikor sikerült ugyan megfelelő matematikai modellt találni, a gyakorlat számára fontos karakterisztikákat az egyenletek, a for-

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia 1970. évi Tudományos Ülésszakán, a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának és a Műszaki Tudományok Osztályának „A számológép-tudomány kérdései" című közös vitaülésén.

mulák bonyolultsága miatt vagy csak durva közelítéssel vagy egyáltalán nem lehetett meghatározni.

A korszerű gyorsműködésű digitális számológépek alkalmazásával az említett nehézségek egy részén úrrá tudunk lenni. Elmondhatjuk, hogy a tömegkiszolgálás-elmélet legbonyolultabb összefüggései, formulái a számológépek felhasználásával a gyakorlat számára szükséges pontossági feltételek mellett sikeresen alkalmazhatók. Emellett a számológépek megjelenése megteremtette annak a lehetőségét, hogy a matematikai modell-alkotás egy sajátos módjával, a *Monte-Carló*-módszerrel, s az ebből kifejlődött és napjainkban már jelentős fejlettségi szintet elért sztohasztikus szimuláció módszerével a legkülönbözőbb jellegű gyakorlati kérdéseket mélyrehatóan tanulmányozzuk.

Ismeretes, hogy a sztochasztikus szimuláció lényege — megfelelő sztochasztikus folyamat kapcsolatba állítása a szóban forgó feladattal úgy, hogy a keresendő mennyiségek a sztochasztikus folyamat bizonyos funkcionáljaiként adódjanak. A számológépek mármost abban játszanak fontos szerepet, hogy amíg korábban a tekintetbe veendő sztochasztikus folyamatoknak úgyszólván képtelenek voltunk kellő számú realizációját megfigyelni, előállítani, addig ez most a modern számológépekkel minden különösebb akadály nélkül megvalósítható. Így válik lehetővé, hogy a tömegkiszolgáló rendszerek modelljével kapcsolatba állítható feladatokat, melyek korábban analitikus úton nem voltak megoldhatók, a számológépek segítségével a gyakorlat számára szükséges pontossággal vizsgálni tudjunk.

A továbbiakban részletesen ki fogunk térni a tömegkiszolgáláselmélet alkalmazási területeire. Mindenekelőtt azonban megkíséreljük a tömegkiszolgáló rendszerek általános fogalmát közelítően leírni s jellemezni a velük kapcsolatos feladatok osztályait.

## Tömegkiszolgáló rendszerek

A tömegkiszolgáló rendszerek fogalmának körülírását mindenekelőtt az érkezési folyamat (beáramlás) meghatározásával kell kezdenünk. Az érkezési folyamat eseményfolyamat, pontfolyamat, melyen a

$$0 \leqq t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots \leqq t_n \leqq \ldots$$

feltételnek eleget tevő $\{t_n\}$ valószínűségi változó sorozatot értjük. Telefonforgalomban a $t_i$ pillanatok a telefonhívások beérkezési pillanatait jelentik. A továbbiakban az érkezési folyamatban bekövetkező eseményeket valamely igények beérkezései fogják jelenteni, melyek lehetnek például a telefonhívások, egy áruházba érkező vásárlók, a repülőtér zónájában megjelenő repülőgépek éit. Az érkezési folyamat további jellemzése a $t_i$ valószínűségi változók függőségi kapcsolatának avagy együttes eloszlásainak megadásával történik.

A tömegkiszolgáló rendszerek szkémájával tanulmányozható feladatok osztályának bővítése érdekében célszerű az érkezési folyamatot általánosítani. Sokszor nem elegendő csak azt megmondani, hogy igény érkezett a $t_i$ pillanatban. A beérkező igények lehetnek különneműek, azaz mindegyiket valamely $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ szám jellemez, melyek általában valószínűségi változók. Például egy munkagépen megmunkálásra kerülő munkadarab esetén $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jelenthetik a munkadarab méreteit, minőségi mutatóit. Ezért célszerű az általánosított érkezési folyamaton a

$$c_i = \{t_i, \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}\} \qquad (i \geqq 0)$$

vektorsorozatot érteni. Gyakran az $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$ paraméterek csak a $t_i$ pillanattal függnek össze, s ilyenkor a

$$P\{\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}/t_i\}$$

feltételes eloszlással adhatók meg.

Egy tömegkiszolgáló rendszer egy vagy több érkezési folyamattal is rendelkezhet. Előfordulhat, hogy egy rendszer érkezési folyamatai között jelentős függőség áll fenn. A (különböző típusú) beérkező egységek sorba állhatnak a kiszolgáló berendezés előtt és várakozhatnak kiszolgálásuk megkezdéséig. Innen származik a *sorbanállás elmélet (queuing theory)* mint a tömegkiszolgálás-elmélet más elnevezése. A sorbanálló egységeknek a kiszolgálási sorrendjét az érkezési sorrendtől eltérő módon is szabályozhatjuk.

A kiszolgálás folyamata általában egy olyan $\varphi(t)$ sztochasztikus folyamat, amelyet a kiszolgálandó egységeknek a kiszolgáló berendezés(ek)ben való véletlen időtartamú tartózkodása, a sorbanállási idő és az érkezési folyamat határozza meg.

A $\varphi(t)$ folyamat vektorfolyamat, komponenseinek számát általában a felvetett probléma, a keresendő mennyiségek jellege határozza meg. A gyakorlati feladatok általában a $\varphi(t)$ folyamaton értelmezett funkcionálok vizsgálatával hozhatók kapcsolatba.

Illusztrációként tekintsük a legegyszerűbb telefonforgalmi problémát. Egy $n$ csatornás központba a

$$0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots \leqq t_n \leqq \ldots$$

pillanatokban hívások érkeznek. Legyenek a beszélgetések $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ véletlen időtartamúak. Ha a központ valamennyi csatornája foglalt, akkor a beérkező hívások várakoznak. Ha vannak várakozó hívások, akkor egy felszabaduló csatornát a legkorábban érkezett, tehát a legnagyobb várakozási idővel rendelkező hívás foglal el. A gyakorlat által felvetett kérdések vizsgálata céljából adott esetben a

$$\varphi(t) = \{\nu(t), \mu(t), \eta(t)\}$$

sztochasztikus folyamatot célszerű tekintetbe venni, ahol $\nu(t)$ a várakozó hívások száma, $\mu(t)$ a központ foglalt csatornáinak száma, $\eta(t)$ pedig a $t$ pillanatban beérkező hívás (virtuális) várakozási ideje. Esetünkben például a rendszer $T$-pillanatbeli $p_k(T)$, $(k \geqq 0)$ állapotvalószínűségei a meghatározandó mennyiségek. Ezek a

$$\varkappa_k(T) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \nu(T) + \mu(T) = k, \qquad (k \geqq 0) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

funkcionálok eloszlásaiként (adott esetben várható értékeiként) foghatók fel:

$$p_k(T) = P\{\varkappa_k(T) = 1\} = M\varkappa_k(T).$$

A bevezetett $\varphi(t)$ sztochasztikus folyamat igen eltérő tulajdonságokkal rendelkezhet. A tömegkiszolgálás-elmélet eredményeinek nagy többsége arra az esetre vonatkozik, amikor $\varphi(t)$ *Markov*-tulajdonságú folyamat vagy könnyen markovizálható. Ha például az érkezési folyamat *Poisson*-folyamat és a kiszolgálási idők hossza exponenciális eloszlású, akkor a rendszer *Markov-folyamat*tal, ha viszont az érkezési folyamat nem *Poisson*-jellegű, vagy a kiszolgálás nem exponenciális eloszlású *fél-Markov-folyamat*tal jellemezhető. A mondottak alapján látható, hogy a tömegkiszolgálás elméletének vizsgálati eszköze a sztochasztikus folyamatok s ezen belül elsősorban a *Markov*-folyamatok elmélete. Az úgynevezett szintézis-feladatok megoldásakor lényeges szerepet játszanak az *operációkutatás* módszerei is. Újabban a számológépeknek az alkalmazásával jelentősen megnövekedett a számítástechnikai eljárások és a különböző programozási nyelvek szerepe a tömegkiszolgálás elméletében.

Kissé konkrétabban közelítve meg a tömegkiszolgálási rendszerek fogalmát, mondhatjuk, hogy a rendszer néhány (bizonyos esetekben előfordulhat, hogy végtelen sok) csatornát (készüléket) tartalmaz, melyek arra hivatottak, hogy a beérkező igények rendelkezésére álljanak, kiszolgálják őket, más szóval, hogy az igényekkel együttműködve bizonyos tevékenységet, műveletet elvégezzenek. Az említett $\varphi(t)$ sztochasztikus folyamat általában a csatornák állapotát, az általuk végzett tevékenység, művelet előrehaladottságát, az igények felhalmozódását stb. írja le.

Rátérünk most a tömegkiszolgálás-elméleti feladatok két nagy osztályának a jellemzésére.

Az első osztályba az úgynevezett analizálási feladatok tartoznak. Ezek általában egy jól körülhatárolt rendszerrel kapcsolatban hozott mennyiségek vizsgálatát, meghatározását jelentik. Azaz, pontosan megmondjuk mi a $\varphi(t)$ folyamat, felsoroljuk a figyelembe veendő funkcionáljait, s feladatunk abból áll, hogy ezek egymásközti kapcsolatát, eloszlását, avagy valamely más valószínűségi jellemzőit meghatározzuk. A tömegkiszolgálási elmélet jelenlegi eredményeinek nagy része ilyen feladatokkal kapcsolatos.

A másik osztályba a szintézis problémái tartoznak. Bizonyos cél elérése, szolgáltatás megszervezése több úton, különböző tömegkiszolgáló rendszerek működtetésével is történhet. Az egyes rendszereket gazdasági, vagy más szempontok szerint összehasonlíthatjuk. Feladatunk ezek után abból áll, hogy kiválasszuk a megfelelő szempontból vett legelőnyösebb rendszert. Több alkalmazási terület felveti néhány szerves egységben működő tömegkiszolgálási rendszer irányításának problémáját. Ez azt jelenti, hogy megfelelő stratégiákat kell kidolgoznunk az egyes rendszerek működési feltételeinek (rezsimeinek) módosítására. Több esetben a legelőnyösebb stratégiák nem determinisztikusak, hanem a $\varphi(t)$ folyamatban bekövetkezett változások függvényei.

Az utóbbi időben intenzív fejlődés tapasztalható az említett feladatok elméleti vizsgálata terén. Elmondhatjuk, hogy ezeknek a vizsgálatoknak az eredményeit számológépek nélkül lehetetlen volna a gyakorlatban gyümölcsöztetni.

Ezek után rátérünk a tömegkiszolgálási elmélet főbb alkalmazási területeinek ismertetésére, a felmerülő problémák jellegének s megoldásuk lehetséges módjainak vázolására.

Nyilvánvaló, hogy dolgozatunkban nem adhatjuk meg az említett problémák kimerítő leírását. Az érdeklődők részletesebben tájékozódhatnak a felsorolt monográfiákból, dolgozatokból. Ezzel kapcsolatosan mindenekelőtt fel szeretnénk hívni a figyelmet a [2] dolgozatra, melyre jelen munkánkban is jelentősen támaszkodtunk [2]-ben igen jó irodalomjegyzéket is található az olvasó. Számológépek alkalmazását illetően hasznosnak bizonyulhatnak a [20], [3], [49] monográfiák.

## Hírközlő és információs rendszerek

A tömegkiszolgálás-elmélet egyik legszélesebb alkalmazási területe a telefonforgalom. ERLANG már a 20-as években vizsgálta azt a problémát, hogy a telefonközpont hány vonallal képes a telefonbeszélgetéseket adott minőségi szinten lebonyolítani. Kicsit részletesebben leírjuk a problémát.

Adva van $n$ számú csatornából álló telefonközpont. A hívások $\lambda > 0$ paraméterű homogén *Poisson*-folyamatnak megfelelően érkeznek a központba. A beszélgetési idők független valószínűségi változók közös $\mu > 0$ paraméterű exponenciális eloszlással. Ha minden csatorna foglalt, akkor a beérkező hívások elvesznek. Szokás a leírt rendszert *veszteségi rendszer*nek nevezni. A legfontosabb karakterisztikák a foglalt vonalak számának eloszlásánál határozhatók meg. Ez utóbbit az ún. *Erlang*-formulák írják le: Jelölje $P_k$ annak az eseménynek a valószínűségét, hogy a központban $k$ számú vonal foglalt, akkor

$$P_k = P_0 \frac{\varrho^k}{k!}, \qquad (k > 0)$$

ahol

$$\varrho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad P_0 = \left[1 + \varrho + \cdots + \frac{\varrho^n}{n!}\right]^{-1}.$$

Különösebb nehézség nélkül tanulmányozható a *várakozási rendszer* is, amikor az összes csatornák foglaltsága esetén érkező hívás nem vész el, hanem várakozik a beszélgetés lefolytatására.

Ez esetben a rendszer leglényegesebb karakterisztikái a várakozási sor hosszúságával, a várakozási idő tartalmával kapcsolatosak.

Az említett rendszerekre vonatkozó eredményeket több irányban sikerült általánosítani. SZEVASZTJANOV [10] a veszteségi rendszert vizsgálta abban az esetben amikor a beszélgetési idő elosztása tetszőleges. Kiderült, hogy az *Erlang*-formulák ez esetben is érvényesek. Másik típusú általánosítást jelent, ha az érkezési folyamatra vonatkozó megszorításainkat gyengítjük, például rekurrens érkezési áramlatot teszünk fel, míg a beszélgetési idő exponenciális eloszlásától nem tekintünk el (ld. [61], [53]).

A valódi körülményekre tekintettel jelentősek azok a törekvések, amelyek a csatornák meghibásodásait, elromlásait is igyekszenek figyelembe venni (ld. [9], [67] dolgozatokat). Megemlítjük itt a [67] dolgozatot, mely elég egyszerű feltevések mellett vizsgálja a csatornák meghibásodásainak lehetőségét, de áttekinthető analitikus formulát nem tud adni. Számológép segítségével viszont minden konkrét esetben könnyen meghatározhatók a keresendő mennyiségek.

A várakozási rendszerek elég általános feltételek melletti vizsgálatával pl. a [41] dolgozat foglalkozik. Bár az eredmények gyakorlati alkalmazása nem könnyen valósítható meg, mégis fontosak, minthogy tisztázzák a rendszer stacionaritásának feltételeit, s jelentősen megkönnyíthetik a rendszert szimuláló algoritmus felépítését, egyszerűségét.

A telefonközpontok működésének hűebb tanulmányozása céljából a rendszer több lépcsőzetességéből kell kiindulni. Ez azt jelenti, hogy a hívások csatorna csoportokhoz érkeznek, melyekből újabb más csatornákhoz irányítják őket, míg végül is létrejön a kívánt kapcsolat. Vannak ugyan kísérletek ilyen bonyolult működésű telefonközpontok analitikus vizsgálatára (ld. pl. [1], [72]), ezek azonban nem elégségesek, a valóságos helyzetet nem képesek hűen jellemezni. Nagyobb fokú eredményességet érhetünk el az ilyen telefonközpontok sztochasztikus szimulációjával. Megemlítjük a [43] dolgozatot, mely egy ilyen irányú szimuláció kérdéseivel és módszereivel foglalkozik.

Nagy jelentőségűek a tömegkiszolgálás-elméleti vizsgálatok a telefonközpontok gazdaságossági kérdéseinek tanulmányozásában ([15], [37]). Egy telefonközpont létesítésekor és üzemeltetésekor két különböző természetű veszteséget kell figyelembe venni. Az egyik a létesítés és az üzemeltetés költségei, a másik pedig a hívások elvesztéséből származik. Elmondhatjuk, hogy megvannak azok az elméleti eredmények, amelyekkel a telefonközpontok gazdaságosságát optimális tervezésüket tanulmányozni tudjuk. Esetleg igen bonyolult számítások szükségesek, melyek számológépek használatát, a számítástechnikai eljárások fejlesztését igénylik.

Több hírközlő és irányítási rendszert, többek között a fejlett, multi-programozású számológépeket az jellemez, hogy bizonyos véges befogadóképességű tároló berendezések állnak rendelkezésre az információ megőrzés céljából. Szokás ezeket a rendszereket véges sorkapacitású rendszereknek nevezni, melyek közbülső helyet foglalnak el a veszteségi és a várakozási rendszerek között. Egycsatornás véges sorkapacitású rendszereket illetően megemlítjük a [40], [12], [68] dolgozatokat. A legtöbb esetben ezeknek a rendszereknek a tanulmányozása bonyolultabb mint a végtelen sorkapacitású rendszereké. Érdekesek azok a vizsgálatok, melyek a véges sorkapacitású rendszerek karakterisztikáinak asszimptotikus viselkedésével foglalkoznak, amikor a sorkapacitás végtelenhez tart, ld. pl. [68].

Mind a telefonforgalomban, mind a hírközlés és irányítás más rendszereiben felmerülhet annak szükségessége, hogy egyes hívásoknak, igényeknek elsőbbséget tulajdonítsunk. Előfordulhat, hogy a rendszer már eleve ilyen jellegű, pl. egy információ szolgáltatási ponton a telefonon keresztüli érdeklődéseket legtöbbször elsőbbségben részesítik vagy, hogy a beérkező igények közti elsőbbségek létesítésével a rendszer működését jelentősen megjavíthatjuk. Ilyen kérdésekkel kapcsolatos irodalomra való utalás a [2] dolgozat 72—73. oldalás található.

Az elsőbbségek tekintetbe vétele lényegében egy sajátos kiszolgálási sorrend alkalmazását jelenti. Megemlítjük, hogy a kiszolgáló készülékek meghibásodásainak figyelembevétele egy bizonyos elsőbbségi rendszer keretében történhet: a készülékek meghibásodásai érkezési folyamatot alkotnak, melyek igényeinek kiszolgálása minden egyébnél fontosabb. Különböző kiszolgálási sorrendek effektivitásának vizsgálatával több dolgozat foglalkozik, ld. pl. [28], [29], [44]. Előfordulhat, hogy a kiszolgálási sorrend az idő során bekövetkező eseményektől függően változik, módosítása bizonyos stratégiáknak megfelelően történik. Sokszor egy ilyen stratégiának a megvalósítása is az adatok sokasága, a számítások bonyolultsága miatt csak számológép segítségével valósítható meg. Maguknak a stratégiáknak az optimalitását, bár vannak elméleti eredmények, lényegében csak számológépek segítségével, többek között a sztochasztikus szimuláció módszerével vizsgálhatjuk.

Jelen pontunk befejezésében néhány irodalmi utalást szeretnénk tenni. A telefonforgalom kézikönyvének tekinthető SYSKI [59] monográfiája. Az elsőbbségi rendszereket illetően gazdag anyag található SAATY [56] könyvében. HINCSIN [14] és TAKÁCS [61], [62] dolgozatain keresztül könnyen betekintést nyerhet az olvasó a telefonforgalom matematikai problémáiba.

**Közlekedési problémák**

A tömegkiszolgálási elmélet módszerei sikeresen alkalmazhatók az országutakon kialakuló gépkocsi áramlatok, valamely város közlekedési hálózatának és irányítási kérdéseinek vizsgálatában.

Kis intenzitás esetén a gépjárműveknek az országutakon kialakuló áramlatai jó közelítéssel *Poisson*-folyamatokként írhatók le. Megfogalmazzuk most BREIMAN [19] ezzel kapcsolatos eredményét.

Legyenek a $t=0$ pillanatban a negatív valós tengelyen adottak, az $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ pontok, melyek valamely sztochasztikus folyamat realizációit jelentik. Tegyük fel, hogy

1. létezik a

$$\sigma = \lim_{h\to 0} \frac{\{\text{azon } x_k \text{ pontok száma, melyekre } x_k \in [x, x+h]\}}{h}$$

sűrűség,

2. bármely véges intervallumba eső $x_k$ pontok számának várható értéke korlátos, s az $M$ korlát csak az intervallum hosszától függ,
3. minden egyes $x_k$ ponthoz hozzá van rendelve egy $V_k$ sebesség érték, — ezek egymás közt független valószínűségi változók, azonos $G(n)$ eloszlásfüggvénnyel, melyre

$$G(u) = \int_0^u g(z)\,dz,$$

ahol $g(z)$ m. m folytonos és minden véges szakaszon korlátos függvény.

Legyenek továbbá minden $t>0$-ra

$$x_k(t) = x_k + tV_k,$$

$N_t(I)$ azon $x_k(t)$ pontok száma, amelyekre $x_k(t) \in I$.

Ekkor bármely véges hosszúságú $I$ intervallumra

$$\lim_{t\to\infty} P\{N_t(I)=j\} = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, \qquad (\lambda = \sigma|I|).$$

Nagyobb intenzitású áramlatok esetén, amikor erősebbé válik a járművek egymásra való hatása, a Poisson-folyamattal való közelítés nem alkalmazható. Általában az a kép adódik, hogy egymásután haladó járművek csoportjai alakulnak ki. Ez esetben érdeklődésre tarthat számot az egyes csosportokban haladó járművek száma és az egyes csoportok között kialakuló hézagok hossza eloszlásának jellemzése, pl. [48], [30], [52].

Több dolgozat, [63], [27], [64] az előzés lehetősége által kialakuló kép vizsgálatával foglalkozik. Feltételezik az utak többsávúságát, egyszerűbb esetekben a kétsávos ellentétes irányú útvonalon haladó jármű közepes sebességét tanulmányozzák.

Tipikus tömegkiszolgáló (egycsatornás) rendszer keretén belül tanulmányozható valamely útkereszteződés áteresztőképessége. Jelentős eredménynek számít e tekintetben a *Borel—Tanner*-formula ([18], [65]). Ennek alkalmazásával többen tanulmányozták egy jelzőlámpás útkereszteződésnél kialakuló várakozási sorok valószínűségi jellemzőit.

Megemlítjük a [67] dolgozatot, amely egy főközlekedési útvonal kereszteződését, ill. a forgalmába való bekapcsolódás problémáját elemezi. A főközlekedési vonal két irányú, s a rajta haladó járművek a kereszteződésnél elsőbbséggel rendelkeznek. A mellékútvonalról érkező járművek várakozási sorát sikerül tanulmányozni azáltal, hogy az útkereszteződés olyan egycsatornás kiszolgáló rendszerként interpretálható, amelynek csatornája véletlen időközönként meghibásodhat. Hasonló kérdésekkel foglalkoznak a [34], [46], [50], [66] dolgozatok is.

A városi közlekedési hálózat tanulmányozása a következő problémákat vetheti fel: Hogyan kell a megállóhelyeket kijelölni, hogyan szervezzük meg a taxi, a tömegközlekedési eszközök üzemeltetését? A taxi szolgáltatással kapcsolatosan felmerülhet például az a kérdés, hogy egy szabaddá vált kocsi melyik taxi-állomásra térjen vissza. Jelentősen megnövelheti a taxi-szolgáltatás minőségét a rádió-telefon irányítás. Vajon kifizetődő-e egy ilyen irányítás bevezetése? A városi közlekedési hálózat vizsgálatához célszerű a következő modellt tekinteni. Egy körvonal különböző, véges számú pontjánál igények lépnek fel. Ezek kiszolgálására néhány készüléket (autóbuszt) állítanak be, melyek meghatározott időnként bejárják a körvonalat. Adott esetben úgynevezett csoportos kiszolgálásról kell beszélnünk, a készülék egyszerre több igény kiszolgálását is elkezdheti. Fontos e kérdéseknek bármilyen egyszerű feltevések melletti analitikus vizsgálata is. Számológépekkel a valósághoz közelebb álló körülmények között tanulmányozhatjuk modellünket, de a dolog lényegének megértéséhez, a szimuláló algoritmus gazdaságos megszerkesztéséhez elengedhetetlenek az elméleti vizsgálatok.

Dolgozatok sora foglalkozik a vasúti forgalom, a légiközlekedés megszervezésének problémáival. A repülőtereknek az előrelátható igények szerinti megtervezésekor több sajátos típusú tömegkiszolgáló rendszer vizsgálata válhat szükségessé. Jelentőséggel bírhat a repülőtérnek mint többcsatornás kiszolgáló rendszernek a vizsgálata a kiszolgálási sorrendje és irányítása effektivitásának szempontjából.

Közlekedési problémákat illetően igen hasznosnak bizonyulhat NEWELL [51] munkája, mely a közeljövőben könyv alakjában is meg fog jelenni. E munka célja nem annyira az elméleti vizsgálat, mint inkább a gyakorlatban tényleg előforduló rendszerek konkrét jellemzésének kérdései. Több a rendszer működését jellemző mennyiséget vezet be, többek között olyanokat is, amelyek alapul szolgálhatnak a leggazdaságosabb (az optimális) rendszer kiválasztásában, avagy működési rezsimének meghatározásában.

## Termelési folyamatok irányítása és megszervezése

Az ipari termelés kapcsolata a tömegkiszolgálás elméletével azon kérdés tanulmányozásával kezdődött, hogy adott számú munkagép (esztergapad, szövőgép, stb.) meghibásodásainak megszüntetésére a termelés bizonyos szinten való folytatásához hány javító munkás, javító berendezés szükséges. Az első eredmények HINCSIN [14] és GNYEDENKÓ [5] nevéhez fűződnek. Az eredmények lényeges általánosítását TAKÁCS L. adta meg [60]. Gazdaságossági kérdések tanulmányozásával a [33] dolgozat foglalkozik. A gépek üres-állási ideje, valamint a javító egységek szabadideje statisztikai vizsgálatával a [22] cikk foglalkozik. Ugyancsak itt találhatunk útmutatást a minőségellenőrzés és a statisztikai adatgyűjtés ésszerű megszervezésére. Az említett modell bizonyos változtatások mellett sikeresen alkalmazható a szénbányászatban is [70].

Másik igen fontos ipari alkalmazási terület a szalagsoros termelés vizsgálata. Itt úgynevezett többfázisú kiszolgálásról van szó. Adva van néhány munkagép, melyek mindegyike előtt tartály (bunker) helyezkedik el. A munkagépeken meghibásodás is előfordulhat, melyek megszüntetésére javító egységek hivatottak. A fő érdeklődés egy ilyen szalagsor termelékenységének vizsgálatára adott termelékenységi szintet biztosító tartálykapacitások meghatározására irányul [11], [36], [29].

Gyakran előfordulhat, hogy egy munkagépen különböző típusú alkatrészeket kell megmunkálni. Ilyen esetben figyelembe kell venni, hogy a munkagép átállítása másik típusú alkatrész megmunkálásához időt vesz igénybe. Ezzel kapcsolatban röviden leírjuk a [4] dolgozatban szereplő modellt.

$N$ számú igények érkeznek egy kiszolgáló készülékhez. Ha a készülék egy $n$ típusú igény kiszolgálását befejezte, akkor $\gamma_{nm}$ idő szükséges ahhoz, hogy egy $m$ típusú igény kiszolgálására felkészüljön. Az igények kiszolgálási ideje függ az igények típusától. A kiszolgáló rendszer vizsgálata lényegében a

$$v(t)=\{v_0(t), v_1(t), \dots, v_N(t)\}$$

sztochasztikus folyamat tanulmányozását jelenti, ahol $v_i(t)$, $(1 \leqq i \leqq N)$ a $t$ pillanatban a rendszerben tartózkodó $i$-típusú igények számát, $v_0(t)$ pedig azt jelenti, hogy a $t$ pillanatot közvetlenül megelőző kiszolgálás melyik típusú igénnyel volt kapcsolatos. A $v(t)$ folyamat nyilvánvalóan a különböző kiszolgálási sorrendeknek megfelelően más-más szerkezetű. Jelölje $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ a kiszolgálások befejeződésének időpontjait. Ekkor bizonyos feltevések mellett a $v^{(k)} = v(t_k+0)\,(k=1, 2, \dots)$ vektorsorozat többdimenziós *Markov-láncot* alkot, melynek állapothalmaza megszámlálhatóan végtelen.

A leírt rendszerben tekintett kiszolgálási sorrendek összehasonlítása az alábbi *fél-Markov-folyamat*okon értelmezett veszteségek figyelembevételével történhet. Legyen $S$ a rendszer állapotainak megszámlálható halmaza, $\{p_{ij}\}$ átmenetvalószínűségi mátrix. A rendszer az $i$ állapotból $p_{ij}$ valószínűséggel megy át a $j$ állapotba. Egy ilyen átmenet idejét jelöljük $\varphi_{ij}$-vel. Bizonyos feltevések mellett a rendszer állapotváltozásait leíró $\eta(t)$ folyamat regenerációs folyamat, ami azt jelenti, hogy létezik olyan $T_1 < T_2 < \dots < T_l < \dots$ véletlen számsorozat, hogy a rendszer viselkedése a $(T_i, T_{i+1})$ szakaszokon független a megelőző szakaszokon történt állapotváltozásatról és $i$-től. Legyen most $W(T_1, T_2)$ az $\eta(t)$ folyamat $(T_1, T_2)$ időközre vonatkozó realizációin egy funkcionál.

A rendszer effektivitását a

$$\varrho = \frac{MW(T_1, T_2)}{M(T_2-T_1)}$$

mennyiséggel jellemezzük. Ennek meghatározására több mód is kínálkozik. Történhet $\varrho$ kiszámítása *Monte-Carló-módszer*rel is. Az [4] dolgozat a tekintetbe vett veszteség-függvényre egy igen jól használható formulát vezet le. Eszerint:

$$\varrho = \frac{\mathbf{p}_i(I-Q_i)^{-1}\mathbf{w}}{\mathbf{p}_i(I-Q_i)^{-1}\mathbf{f}},$$

ahol $\mathbf{p}_i$ a $\{p_{ij}\}$ mátrix $i$-edik sorát jelenti, a $Q_i$ mátrixot pedig úgy kaphatjuk meg a

$\{p_{ij}\}$ mátrixból, hogy az $i$-edik sorába 0-kat írunk. **f** és **w** a $\{p_{ij}M(\varphi_{ij})\}$ és a $\{p_{ij}M(w_{ij})\}$ mátrixok sorösszegéből álló vektorok, ahol $\varphi_{ij}$ az $i \to j$ átmenet véletlen ideje, $w_{ij}$ pedig a $\varphi_{ij}$ időre eső veszteségfunkcionál. Ezen eredmény alapján a rendszer optimális működéséhez szükséges paraméterek megkeresését mátrix számításra vezettük vissza, ami számológépek segítségével kényelmesen végrehajtható.

Megemlítjük még, hogy több termelési folyamat matematikai vizsgálata vezérlésének kérdései különböző típusú kiszolgáló rendszerek figyelembevételét igényli. Ezek a kiszolgáló rendszerek az illető folyamat egyes elemei részeinek modelljeit alkotják. Bővebb felvilágosítást illetően utalunk a [3] monográfiára, mely a közeljövőben magyar fordításban is meg fog jelenni.

## Közszolgáltatások, egészségellátás megszervezése

A közszolgáltatás egységei, a különböző áruházak, a vendéglők, postahivatalok stb. tipikus kiszolgáló rendszerek gyakorlati megvalósításaiként tekinthetők. A közszolgáltatás ezen egységei munkájának megjavítása, rentabilitásuk vizsgálata fontos népgazdasági kérdés. E rendszerek optimalizálása legtöbbször a vásárlók várakozási idejének minimalizálásával kapcsolatos adott üzemeltetési költségvetés esetén.

Gyakran figyelembe kell azt venni, hogy ha egy áruházban, vendéglőben sok a kiszolgálásra várakozó személy, akkor az újonnan érkezők a várakozók számától függő valószínűséggel lemondanak kiszolgálási igényükről, távoznak a rendszerből. Kevés elméleti eredmény létezik ilyen szkémákra vonatkozóan. Előreláthatóan a szimuláció módszere bizonyulhat hasznosnak, nemcsak a rendszer állapotjellemzőinek meghatározására, hanem azon valószínűségek közelítő megadását illetően is, amelyek a vevőknek a vásárlási szándékaikról való lemondását jellemzik.

Fontos szerepet játszanak a kiszolgáló modellek valamely ipari termék (gépkocsi, televízió-készülék stb.) javító szolgáltatásának előzetes megtervezésében. A szolgáltató egységek számának meghatározása lényegében az egyes javítási helyeken fellépő érkezési folyamat szabályozását jelenti. Itt is bizonyos optimális eredményekre vezető feltétel csoportokat kell kiválasztanunk.

Sajátos kiszolgáló rendszerek tanulmányozását vetették fel az egészségellátás problémái. Tekintsük csak a balesetekben megsérültek orvosi kezelését. Általában egy sérültnek az orvosi kezelése nem kezdődhet el nyomban a baleset megtörténte után. Várakozni kell, de várakozási ideje nem lehet tetszőleges, hanem bizonyos, a sérülés súlyosságától függő korlátos valószínűségi változó. Ilyen modellek részletes vizsgálata megtalálható a [7] monográfiában, ill. a [8] dolgozatban.

Magától értetődő, hogy az egészségellátás szerveinek, kórházak, rendelőintézetek és állományuk előzetes tervezésekor a korábban említettekhez hasonló problémák lépnek fel, ld. [16], [17]. Általában többcsatornás kiszolgáló rendszert kell tekintetbe venni s a kiszolgálás sorrendjét elsőbbségek figyelembevételével kell megállapítani.

Flagle [24], [25] részletesen elemezte a kórházba érkező betegek áramlatát. Mind elméleti, mind gyakorlati szempontból igen érdekesnek mutatkoznak az egészségellátás problémái járványok esetén. Az említett dolgozatokban nincsenek figyelembe véve a járványok, s a szerzők számára járvány esettel foglalkozó dolgozatok még nem ismeretesek.

Ezzel befejezzük a tömegkiszolgálás-elmélet legfontosabb alkalmazási területeinek ismertetését. Mint már említettük teljességre nem törekedtünk, az ilyen igény nem is lenne indokolt. A problémák részletesebb elemzését illetően a [2] dolgozatot és a [56] monográfiát, illetve irodalomjegyzékeiket ajánljuk az olvasó figyelmébe.

## A sztochasztikus szimuláció módszere

A tömegkiszolgálási elmélet analitikus vizsgálati módszerei a gyakorlati problémákat az esetek többségében csak igen erős, a valóságban ritkán teljesülő feltevések mellett képesek eredményesen tanulmányozni. Az érkezési folyamatról például feltételezik, hogy az egynemű események folyamata, mely rendszerint stacionárius vagy közönséges (egyszerre csak egy igény érkezik) rekurrens folyamat. Igen sok analitikus eredmény csak homogén *Poisson*-típusú érkezési folyamatokra vonatkozik. Hasonlóan elég erős kikötéseket kell feltételeznünk az igények kiszolgálási idejét, a kiszolgáló készülékek egymásra való kölcsönhatását illetően. Továbbá csak elég egyszerű kiszolgálási sorrend esetén sikerül analitikus eredményt elérni. Legtöbbször ezek az eredmények a rendszernek a stacionárius eloszlására vonatkoznak, míg az időtől függő karakterisztikákról, amikor ezekre is szükség volna csak igen keveset tudunk mondani.

Nagy mértékben eltekinthetünk a felsorolt követelményektől, ha újabb matematikai módszerhez a sztochasztikus szimulációhoz fordulunk. Említettük, hogy a tömegkiszolgáló rendszerek vizsgálata lényegében egy $\varphi(t)$ sztochasztikus folyamaton értelmezett funkcionálok tanulmányozását, legtöbbször ezeknek valószínűségi karakterisztikáinak jellemzését jelenti. Míg az analitikus módszerek csak igen jó tulajdonságú folyamatok esetén képesek eredményt adni, addig a sztochasztikus szimuláció szempontjából a folyamat igen általános is lehet. Másrészt lehet, hogy az analitikusan kapott eredmények annyira bonyolultak, hogy a gyakorlatban való alkalmazásuk nehézkes és ezért célszerű a szimulációs módszerhez fordulnunk.

Legtöbbször a (0,1) intervallumon egyenletes elosztást követő számokból kiindulva, a gyorsműködésű digitális számológépeken elég rövid idő alatt előállíthatjuk igen általános tulajdonságú $\varphi(t)$ folyamatnak is nagyszámú trajektoriáját. Megvizsgálva a funkcionáloknak e trajektoriákon felvett értékeit, meghatározhatjuk ezek különböző valószínűségi jellemzőit, melyek éppen a gyakorlati feladatban szereplő keresendő mennyiségeket jelentik.

Különböző kiszolgáló rendszereket imitáló algoritmusokkal megismerkedhet az olvasó a [20], [3], [49] monográfiákban. A sztochasztikus szimuláció módszerét alkalmazza a [13] dolgozat is egy sajátos ipari folyamat vizsgálatához.

Nyilvánvaló, hogy nem lehet olyan szimuláló algoritmust felépíteni, mellyel a gyakorlati feladatokkal kapcsolatba hozandó $\varphi(t)$ folyamatok mind szimulálhatók volnának bizonyos kezdeti paraméterek megadása után. Vannak azonban eljárások, amelyek folyamatok egész osztályainak szimulációjakor hasznosnak bizonyulnak. Például [3]-ban ismertetve van olyan eljárás mely $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi vektor lehetséges értékeit állítja elő, ha adva van a komponenseknek az együttes eloszlásfüggvénye, illetve sűrűségfüggvénye. Egy ilyen eljárás például szükségesnek mutatkozik az általánosított eseményfolyamatok szimulációjakor.

A tömegkiszolgáló rendszerek szimuláló algoritmusai általában igen terjedelmesek, nagyszámú szerteágazó matematikai művelet elvégzését követelik meg. Egy kissé bonyolultabb rendszert szimuláló algoritmusnak a szokásos programozási nyelveken (ALGOL, FORTRAN, COBOL) de még inkább a gépi kódban való megírása a programozó matematikusok jelentős munkaidejét köti le. A tömegkiszolgáló rendszereket szimuláló programoknak vannak olyan közös részei, amelyeket külön el lehet készíteni és különböző feladatok megoldásánál felhasználni. Ily módon egy-egy sajátos feladatkört ellátó programrészt külön-külön elkészíthetjük. Ezekből pedig mint blokkokból a blokkra jellemző paraméterek beállításával a megoldandó feladat programját összeállíthatjuk. Az utóbbi időben kidolgoztak sok olyan speciális program típust (program csomagok, peckagek) amelyek használatánál már csak szinte a gép nyelvéhez igazodó vezérlő utasításokat kell a gépnek adni, amelyek a programcsomag használatához szükséges paramétereket tartalmazzák. Különböző típusú feladatok megoldására orientált ilyen programozási nyelvek a DYNAMO ([54]), SIMULATE ([35]), GPSS II ([26]), SIMSCRIPT ([47]), SIMULA, SIMPAC ([58]) stb. Ahhoz, hogy egyre bonyolultabb feladatokat tudjunk megoldani számológépek segítségével egyre inkább szükséges ezeknek a programozási nyelveknek a megismerése, honosítása és használata.

Összegezve a dolgozatban mondottakat megállapíthatjuk, hogy a matematika többi ágához hasonlóan a számológépek alkalmazásával a tömegkiszolgálás-elmélet is közelebb kerül a gyakorlathoz, bővül alkalmazási területe, hatékonyabban közre tud játszani a népgazdaság különböző területeinek fejlesztésében, gazdaságosságuk fokozásában. Azonban maguk a számológépek csak önmagukban nem lehetnének sikeresek. Szükség van elméleti kutatásokra, melyek feltárják a leglényegesebb kapcsolatokat, megmondják, hogy milyen irányban kell a számológépi eljárásoknak haladniuk.

## IRODALOMJEGYZÉK


[1] Башарин, Г. П.: Финальные вероятности многомерного марковского процесса описывающего действие некоторых двухкаскадных телефонных систем с отказами, работающей в режиме свободного искания, *Докл.* 422—428.

[2] Бусленко, Н. П.—Черенков, А. П.: *Применение методов теории моссового обслуживания при исследовании операций*, итоги Науки.

[3] Бусленко, Н. П.: *Моделирование сложных систем*, Наука, Москва, 1938.

[4] Гергел, Й.: *Система обслуживания с переключением*, Диссертация, Москва, 1968.

[5] Гнеденко, Б. В.: О среднем простое станков при многоступенчатой работе, *Изв.* хлопчатобум. пром-сти, 1973, **11**, 5—8.

[6] Геденко, Б. В.—Беляев, Ю. К.—Соловев, А. Д.: *Математические методы теории надежности*, Наука, Москва, 1965.

[7] Гнеденко, Б. В.—Коваленко, И. Н.: Введение в теорию моссового обслуживания, Наука, Москва, 1966.

[8] Коваленко, И. Н.: Некоторые залачи массового обслуживания с органичением. *Теория вероятчостей и ее применения*, 1931, **6**, *П* 2, 222—228.

[9] Марьянович, Т. П.: Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из страя и восстанавливаться, *Укр. матем. ж.* 1960. **12**, *П* 3, 279—286.

[10] Севастьянов, Б. А.: Формулы Эрланга в телефонии при произвольным законе распределения длительности разговора, *Тр. 3-го Всес. мтем. сьезда*, 1953, 4. Москва, АН СССР, 1939, 38—70.

[11] Севастьянов, Б. А.: Задача о влияние емкости бункеров на среднее время простоя автоматичической линии станков, *Теория вероятн. и ее прим.*, 1932, **7**, *П* 7, 738—477.

[12] Томко, Й.: Одна предельная теорема в задаче обслуживания при неограниченно возрастающей интенсивности потоке,

[13] Фидрих, И.: Описание одного из алгоритмов решения задач теории массового обслуживания методом статистических испытаний, *Докл. А. Н. СССР*. 1933, **153**, *П* 7, 779—782.

[14] Хинчин, А. Я.: *Математические методы теории моссового оьслуживания*, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1952, **49**, 129 стр.
[15] Akimaru Haruo; Optimum design of switching systems, *Rev. Elektr. Commun. Lab.*, 1962, **10**, № 7—8, 385—401.
[16] Bailey, N. T.: Queueing for medical care. *Sppl. Atatist.*, 1954, **3**, №2 137—145.
[17] Bailey, N. T.: Statistics in hospital planning and design, *Appl. Statist.*, 1956, **5** № 3.
[18] Borel E.: Sur lemloi du theoréme de Bernoulle pour faciliter le calcul d'une de clefficients, *Compt. rend.* 1942, **214**, № 3, 452 p.
[19] Breiman, L.: The Poisson tendency in traffic distribution, *Ann. Math. Statistics*, 1963, **34**, № 1, 308—311.
[20] Buszlenko, N. P.-Golenko, D. I.—Srejgyer, JU. A.—Sobel, I. M. és Szragovics, V. G.: *Monte-Carlo módszer*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
[21] Eisen, M.: On switching problems requiring queueing theory in computerbased systems, *IRE Trans. Commun Systems*, 1962, **10**, № 3, 299—303.
[22] Ferrer, M. S.: Tiempos y movimientos. Inactividades. Caso de máquinas y trabajadores distintos. *Bol. estadist*, 1956, **16**, Suppl. № 8, 33—45.
[23] Finch, P. D.: The transient behaviour of a coincidence variate in telephone traffic, *Ann. Math. Statistics*, 1961, **32**, № 1, 230—234.
[24] Flagle, C. D.: Operations research in the health services, *Operat. Res.* 1962, **10**, № 5, 591—603.
[25] Flagle, C. D.: The problem of organization for hospital. Impatent care, Reprints Pergamon Press Ltd., London, 1959.
[26] General Purpose Systems Simulator II, Reference Manual, International Business Machines Corporation.
[27] Gordon, W. J.—Newell, G. F.: Equilibrium analysis of a stochastic model of traffic flow. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1964, **60**, № 2, 227—236.
[28] Greenberger, A.: The priority problem and computer time sharing, *Manag. Sci.*, 1966, **12**, № 11, 888—906.
[29] Gupta, S. K.: Queues with hyper-Poisson input and exponential service time distribution with state dependent arrival and service rates, *Operat. Res.* 1967, **15**, № 5, 847—856.
[30] Haight, F. A.: Towards a unified theory of road traffic, *Operat. Res.* 1958, **6**, № 6, 813—826.
[31] Haight, F. A.: Queueing with reneging, *Metrika*, 1959, **2**, № 3, 186—197.
[32] Haight, F. A.: Expected utility for queues servicing messages with exponentially decaying utility, *Ann. Math. Statistics*, 1961, **32**, № 2, 587—593.
[33] Henn, R.: Die Behandlung betrieblicher Störungen und Staungen durch Übergangwahrscheinlichkeiten, *Schweiz. Z. Volkswirtsch und Statist*, 1960, **96**, № 1, 35—44.
[34] *Herman, R.—Weiss*, G.: Comments on the highway-crossing problem, *Operat. Res.*, 1961, **9**, № 6, 828—840.
[35] Holt, C. C.—Shirey, R. W.—Steward, D. V.—Midler, J. L. and Stroud, A.: „*Program SIMULATE, a Users and Programmer*'s *Manuel*," Social Systems Reseerd Institute, University of Wiscousin, May 1964 (Mineographed).
[36] Hunt, G. C.: Sequential arrays of waiting lines, *Operat. Res.*, 1956, **4**, № 6, 674—683.
[37] Jensen, A.: Application of stochastic processes to an investment plan, *Metroecon.*, 1953, **5**, 129—137.
[38] Jewell, W. S.: Multiple entries in traffic, *J. Soc. Industr. and Appl. Math.*, 1963, **11**, №4, 872—885.
[39] Kawata Tatsuo: A problem in the theory of queues, *Repts Statist. Applic.* Res. Union Japán Scientists and Engrs, 1955, 3, № 4, 122—129.
[40] Keilson, J.: The ergodic queue length distribution for queueing vith finite capacity, *J. Roy. Statist. Soc.*, 1966, B28.
[41] Kiefer, J.—Wolfowitz, J.: On the theory of queues with many Servers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1955, 78.
[42] Kiviat, P. J: „*GASP-A General Activity Simulation Program*", Project № 90 17—019(2), Applied Research Laboratory, United States Steel, Monroeville, Pennsylvania, July 8, 1963.
[43] Knuth E.: Egy telefonforgalmi probléma megoldása Monte-Carló módszerrel, *Információ-elektronika*, 1967, 3, 197.
[44] Lee, A. M.: Sane aspect of a control and communication system, *Operat. Res. Quart.*, 1959, **10**, № 4, 206—216.
[45] Le Gall, P.: Les trafics téléphoniques et la sélection conjuguée en téléphonie automatique, *Ann. télécommuns*, 1958, **13**, № 7—8, 186—207.

[46] LEWIS, J. T.—NEWELL, G. F.: Products of zero one precesses and the multiline highway crossing problem, *J. Math. Analysis and Applic,* 1966, **16**, № 51—64.
[47] MARKOVITZ, H. M.—HAUSNER, B. and KARR, H. W.: SIMSCRIPT: *A Simulation Programming Lauquage,* The RAND Corporation, RM-3310 (Nov. 1962).
[48] MILLER, A. J.: Road traffic flow considered as a stochastic process, *Proc. Cambridge Philos. Soc.,* 1962, **58**, № 2, 312—325.
[49] NAYLOR, T. H.—BALINTFY, J. L.—BURDICK, D. S.—KONG CHU: *Computer Simulation Techniques,* John Wiley and Sons, 1966, New York.
[50] NEWELL, G. F.: Statistical analysis of the flow of highway traffic through a signalired intersections, *Quart Appl. Math. 1956,* **13**, № 4, 359—369.
[51] NEWELL, G. F.: *Applications of Quening Theory to Transportation,* Lecture Notes, 1969.
[52] OLIVER, R. M.: Distribution of gaps and blocks in a traffic stream, *Operat. Res.,* 1962, **10**, № 2, 197—217.
[53] POLLACZEK, F.: Problémes stochastique posés par le phénoméne de formation d'une queue d'attente á un guichet et par des phénomenes apparentés. *Mem. Sci. Math.* N 136, Paris, Gauthier-Villars, 1957, 123 p.
[54] PUGH, A. L.: DYNAMO User's Manual, Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, 1963.
[55] RÉNYI, A.: On two mathematical models of the traffic on a divided highway, *J. Appl. Probabil.,* 1964, **1**, №2, 311—320.
[56] SAATY, T. L.: *Elements of queueing theory with applications,* New YORK, McGraw Hill Book Co., 1961.
[57] SANDEMAN, P.: Empirical design of priority waiting times for jobbings shop control, *Operat. Res.,* 1961, **9**, № 4, 446—455.
[58] SIMPAC User's Manual, TM 602/00/00 Systems Development Corporation, Santa Monica, California, April 15. 1962.
[59] SYSKI, R.: *Introduction to congestion theory in telephone,* Oliver and Boyd, Ltd. Edinburg and London 1960.
[60] TAKÁCS, L.: On a stochastic process concerning some waiting time problems, 1957, **2**, № 1, 92—105.
[61] TAKÁCS L.: A telefonforgalom elméletének néhány valószínűségszámítási kérdéséről, MTA. III. Osztály Közleményei., 1958, **8**, № 2, 151—210.
[62] TAKÁCS, L.: The time dependence of Palm's loss formula, *J. Math. Analiysis and Applic.,* 1961, **2**, № 1, 58—71.
[63] TANNER, J. C.: A simplified model for delays in overtaking on a two-lane road, *J. Roy. Statist. Soc.,* 1958, B**20**, № 2, 408—414.
[64] TANNER, J. C.: Delays on a two-lane road, *J. Roy. Statist. Soc.,* 1961, B **23**, № 1, 38—63. Discuss. 75—90.
[65] TANNER, J. C.: A derivation of the Borel distribution, *Biometrica,* 1961, **48**, № 1—2, 222—224.
[66] TANNER, J. C.: The capacity of an uncontrolled intersection, *Biometrica,* 1967, **54**, № 3—4, 657—658.
[67] TOMKÓ JÓZSEF: Tömegkiszolgálási problémákról, I. II. III. *MTA. III. Osztály Közleményei* **15** (1965), **16** (1966), **17** (1967).
[68] TOMKÓ JÓZSEF: Várakozási idővel kapcsolatos határeloszlás tételekről, *MTA Számítástechnikai Közlemények,* 1968.
[69] THURMANN, W. H.: Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen bei mehrstelliger Gruppenarbeit, Teil 1, *Automatic.* 1962, **7**, № 1, 30—34, V. VI.
[70] TOFT, F. J.—BOOTHROYD, H. A. Queueing model for spare coal faces, *Operat. Res. Quart.,* 1959, **10**, № 4,, 245—251.
[71] UDAGAWA KANEHISA NAKAMURA GISAKU: On a queue in which joining customers give up their services halfway, *J. Operat Res. Soc.,* Japán,. 1957, **1**, № 2, 59—76.
[72] WALLSTRÖM, B.: Alternative routing in a two-stage link system. Congestion theory and simulated traffic studies., *Ericsson Techn.,* 1961, **17**, №2, 261—285.

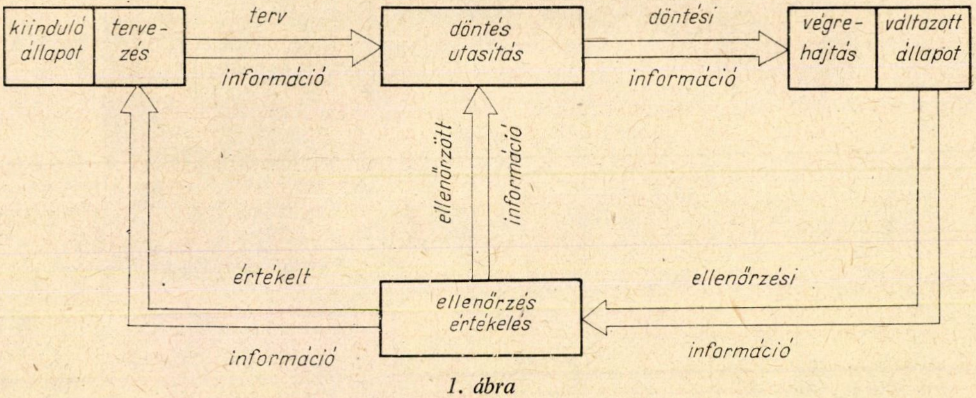
# A SZÁMÍTÓGÉPEK ALKALMAZÁSÁNAK TAPASZTALATAI ÉS PERSPEKTÍVÁI A STATISZTIKAI INFORMÁCIÓRENDSZER FEJLESZTÉSÉVEL KAPCSOLATBAN*

Írta: PESTI LAJOS

1. *A népgazdaság irányítási rendszere* — a közgazdasági kibernetika általános és egyszerűsített modelljének megfelelően — működése során
tervezési
döntési-utasítási
végrehajtási és
ellenőrzési-értékelési
funkciókat teljesít. Az ellenőrzési funkció — ezen értelmezés szerint — a népgazdaság konkrét helyzetére, állapotára vonatkozó információk értékelési tevékenységét foglalja magában.

Az értékelt információk, jól működő irányítási rendszer esetén, a tervezési és a döntési — utasítási funkciókhoz csatolódnak vissza a tervezett állapottól való eltérések kiküszöbölése, vagy a tervezés érvényességi határának kiterjesztése céljából.

Az előző funkciók összefüggése az alábbiak szerint ábrázolható:




*1. ábra*

Nyilvánvaló tehát, hogy a jól szervezett és jól működő információrendszer a gazdasági irányításnak hatékony segédeszköze, bizonyos értelemben egyik alapvető feltétele. Ugyanakkor szoros kölcsönhatás is fennáll köztük, mivel egy konkrét információrendszernek a népgazdaság történetileg meghatározott szervezeti és célrendszerének kell megfelelnie.

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia 1970. évi Tudományos ülésszakán, a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának és a Műszaki Tudományok Osztályának „A számológéptudomány kérdései" című közös vitaülésén.

Az új gazdaságirányítási rendszer fokozott követelményeket támaszt a népgazdasági információrendszerrel szemben. A részletekre kiterjedő, közvetlen tervutasítások körének jelentős csökkentése, valamint a piac aktívabb szerepének érvényre juttatása a népgazdaság tervezett és tényleges állapotának gyakoribb egybevetését indokolja. A végrehajtás során bekövetkező eltérések lehetősége ugyanis megnőtt, az alkalmazott gazdasági ösztönzők pedig sokszor bonyolult áttételeken keresztül fejtik ki hatásukat, így hatékonyságuk értékeléséhez magasabb színvonalú módszerek alkalmazása válik szükségessé.

A statisztikai információrendszernek, azaz a népgazdaság vezetési információrendszerének kétirányú követelménysorozatot kell kielégítenie:

— egyrészt nagyszámú gazdasági és társadalmi tömegjelenség megfigyelését,
— másrészt az összefüggések egyre mélyrehatóbb elemzését.

Ezek a követelmények egyfelől nagyvolumenű információfeldolgozási, másfelől magasszintű számítástechnikai, ökonometriai feladatot jelentenek a statisztika számára. Minthogy a modern számítógépek éppen ilyen komplex feladatok megoldására hivatottak, önként adódik a megoldás a számítógépek statisztikai alkalmazásának formájában. A statisztikai feldolgozások automatizálásának, Hermann Hollerith óta, egyébként is nagy hagyományai vannak.

2. *A statisztikai adatfeldolgozás automatizálásának* kezdetei hazánkban az 1949. évi népszámláláshoz nyúlnak vissza. Ekkor alkalmaztunk először viszonylag korszerű lyukkártyagépeket nagyvolumenű statisztikai munkára.

Az elektronikus számítógépek alkalmazási kísérletei 1959-ben kezdődtek az I. generációs számítógépekkel. A fejlődés egyes állomásai azóta: a BULL GAMMA 3, URAL-1, BULL GAMMA ET, URAL-2, UNIVAC-1004 típusú gépek voltak.

Az 1960. évi népszámlálásnál a lyukkártyatechnikát már össze lehetett kötni az elektronikus számítástechnika kezdeti eredményeinek hasznosításával és a bonyolultabb összefüggések kiszámítása a feldolgozási folyamatba bekapcsolt IBM 628 típusú elektronikus számítógéppel történt.

A statisztikai feldolgozásoknak elektronikus számítógépek alkalmazására történő széles körű átállítása 1966-ban kezdődött meg hazánkban. Erre az időpontra bizonyos nemzetközi tapasztalatok is rendelkezésre álltak és az átállás már a számítógépek III. generációjának szintjén történhetett. Erre az átállásra — őszintén meg kell mondanunk — számos hazai adottság, főként anyagi nehézségek miatt az európai statisztikai szervezetek átállítási folyamatának (ami egyébként kb. 1960-tól 1968-ig tartott) csupán a végső szakaszában kerülhetett sor.

Jelenleg a Központi Statisztikai Hivatal irányítása alatti intézményekben és vállalatoknál 13 különböző teljesítményű számítógép dolgozik, ezek közül azonban a szorosan vett statisztikai feldolgozási feladatokat 3 számítógép végzi, a többi pedig az országos számítástechnikai szolgáltató hálózat tagja. A statisztikai feladatokra alkalmazott 3 db számítógép közül 2 db ICL 1904, illetve 1904 F típusú, középteljesítményű számítógép, 32, illetve 64 K/szó belső tárolóval, 1 db pedig egy kisteljesítményű IBM 360/20 típusú berendezés. E számítógép-komplexum teljesítményére jellemző, hogy 1970. I. félévben több mint 8200 produktív gépórában a különféle statisztikai alap-információkból több mint 5200-féle változatban készítettek elemzést, mintegy 1900 különféle program lefuttatásával.

Ezek az adatok azonban csak részben jellemzőek a számítógépek statisztikai alkalmazására, mivel egyfelől az ún. területi statisztikai apparátus munkájának korszerűsítése csak éppen most van befejezés előtt kis-computerek decentralizált alkalmazása révén, másfelől a statisztikai információrendszer számos eleme számítógépen kerül feldolgozásra a Központi Statisztikai Hivatalon kívül is. Így 1969. évben az egész népgazdaság területén üzemelő számítógépek hasznos gépidejüknek 14,4%-át, mintegy 30 ezer gépórát fordítottak statisztikai programok futtatására és ennek alig több mint 40%-a jutott a Központi Statisztikai Hivatal számítóközpontjára.

Ez a számítóközpont a kezdeti időszakban kapacitásának túlnyomó hányadában nagy tömegű adatfeldolgozási és viszonylag kevés bonyolultabb munkát végzett, mivel a felhasználóknak hozzá kellett szokniuk a számítás igényes feladatok megoldásának lehetőségeihez. Jelenleg azonban erőteljes fejlődés figyelhető meg a feldolgozások bonyolultságában, ami egyben a társadalmi-gazdasági összefüggések egyre mélyrehatóbb elemzésére is utal.

A leggyakrabban előforduló számítások: regresszióanalízis, korreláció- és trendszámítás, statisztikai próbák, ökonometriai modellek készítése, szezonális kiigazítási eljárások alkalmazása.

Érdekes számítástechnikai feladat jelentkezett például az ún. ökonometriai típusú, sztochasztikus makromodellek elemzése során a mezőgazdasági termelési függvénnyel kapcsolatban. A függvény nem bizonyult szignifikánsnak, mivel a kezdeti megfogalmazásnál az időjárási tényező figyelmen kívül maradt. Ezért el kellett végezni az időjárás és a mezőgazdasági termelési eredmények kapcsolatának mennyiségi elemzését egy időjárási faktor előállítására. Ez egyrészt egy „egyszerű" korrelációs számítással, másfelől egy többváltozós regressziós modell felállításával történt. Ennek alapján sikerült meghatározni az időjárásnak a magyar mezőgazdaságra gyakorolt kvantitatív hatását, ami a termelési függvény elengedhetetlen tényezőjévé vált. Ennek megoldása, ilyen széles körű összefüggések figyelembevételével, számítógép alkalmazása nélkül elképzelhetetlen.

A statisztikai információrendszer korszerűsítését illetően — éppen a népgazdaság vezetésének továbbfejlesztése következtében — újabb követelmények merültek fel. Ezeket, az információkezelésre és feldolgozásra vonatkozóan a következőképpen lehetne megfogalmazni:

— alakuljon ki a statisztikai feldolgozásoknak egy olyan országos, koordinált hálózata, amely a szükséges és elégséges információcsatornák és feldolgozási szintek igénybevételével a leggazdaságosabban képes biztosítani népgazdasági szinten a szükséges informáltságot,
— ezen a koordinált hálózaton belül — korszerű számítógépek igénybevételével — az egyes vezetési szintek számára biztosítani kell az információkhoz való gyors és sokoldalú hozzáférést, valamint
— ugyancsak a számítógépek segítségével olyan információkezelési módszereket kell bevezetni, amelyek a statisztikai elemzések és a prognosztikus számítások részére biztosítják a statisztikai jelenségek információkörnyeze tének állandó elérhetőségét.

3. A jelen előadás időbeli korlátai nem teszik lehetővé az előző követelmények teljesítésére vonatkozó összes fejlesztési elképzelés ismertetését, így csak néhány fontosabbat említhetek meg, mint pl.:

— a statisztikai területi feldolgozási hálózat összefüggő adatátviteli rendszerének kiépítése,
— a különböző feldolgozási csatornák és szintek koordinált és kompatibilis feldolgozási rendszerré való egyesítése,

— a közvetlen hozzáférésű tárolás előtérbe állítása a területi és ágazati adattárolási hierarchia kialakítása mellett,
— statisztikai adatbank megszervezése, a jövendő népgazdasági adatbankhálózat részeként.

Mint már említettem, az ún. területi statisztikai hálózat feldolgozási rendszerének automatizálása jelenleg befejezéséhez közeledik. Ennek keretében minden megyeszékhely statisztikai szervénél egy-egy AUDITRONIC 770 típusú kis computer kerül üzembe helyezésre.

Az alkalmazás *első szakaszában* ezek a kis-computerek a területi adatáramlás megyei szintjén összegyűlő adatok primér feldolgozását végzik el a megyei vezetés igényeinek megfelelően. Ezzel egyidejűleg, az országos szintű feldolgozások számára, megfelelő egységes programok által megszabott módon kimenő információkat is készítenek lyukszalagos adathordozóra.

Ezek a lyukszalagos adathordozók, kezdetben hagyományos szállítás révén kerülnek a statisztikai számítóközpontban szekunder feldolgozásra. Később a második szakaszban ezek az output-információk sugaras adatátviteli hálózaton keresztül továbbítódnak a központba, ahol azokat egy ideig off-line, később pedig on-line üzemmódban fogadják majd. A jelenleg üzembeállított kis-computerek az adó-oldali végállomás funkciójára mindenesetre már ma is alkalmasak.

Csak jelzésként említem meg, hogy mintegy 7—8 éven belül a megyei szintű feldolgozási igények várhatóan meghaladják majd a kis-computerek kapacitását. Ekkor majd vagy együttműködő hálózatba bekapcsolt szatellit számítógépek, vagy időosztásos üzemmódban dolgozó központhoz csatlakozó távfeldolgozási végállomások beállítása válhat időszerűvé.

A területi statisztikai hálózat mellett azonban más, figyelembe veendő információs alrendszerek is működnek, így különösen

az ágazati,
a pénz-, hitel- és devizaforgalmi,
a vállalatgazdálkodási, stb. alrendszerek.

Ezeknek az alrendszereknek az információtartalma csak részben felel meg egymásnak, jelenleg tehát nemcsak az alkalmazott számítógépek eltérései miatt rendszertechnikailag nem kompatibilisek, hanem fogalmi rendszerileg sem. E probléma megoldása, a számítógépek népgazdasági szintű hatékony felhasználása szempontjából elengedhetetlen. A gépgazdasági információ-egységek (elemek), struktúrák és hierarchiák elemzése a közeljövő feladata és programja.

Az egyes alrendszerek információtartalmának koordinálttá és kompatibilissé tételével, az információk hasznosulásának mértéke jelentősen nőhet, aminek további feltétele az egyes alrendszerek információtartalmához, adattáraihoz való kölcsönös hozzáférés lehetővé tétele. Ennek érdekében — várhatóan 4—5 éven belül — a statisztikai számítóközpont bizonyos információhalmazokra (file-okra) vonatkozóan lehetővé kívánja tenni a lekérdezéses üzemmódú közvetlen hozzáférést, ami *rendszerszervezési, program- és rendszertechnikai* tanulmányokat, megoldásokat igényel. Az ilyen adathalmazok kiegészítése, módosítása, védelme, stb. probléma-láncok sorozatát veti fel.

Az előzőek szerint kialakított információhalmazok, egy korszerű információkezelő rendszer alkalmazása esetén, statisztikai adatbankká egyesíthetők. A statisztikai adatbankkal szemben az a követelmény, hogy a statisztikai információrendszer egy kitüntetett információállományát közvetlenül lekérdezhető módon állandóan a statisztikai feldolgozások hátterében tartsa. Ez azzal az előnnyel járna, hogy az egyes feldolgozások mindig a történeti és információkörnyezeti adatháttér figyelembevételével készülhetnének. A statisztikai adatbank-rendszer képes befogadni az egyes adatgyűjtések megfelelő szintű adatait. Ezzel egyidejűleg ki kellene dolgozni a népgazdaság működésére vonatkozó makroökonomiai modelleket.

A távolabbi perspektívákhoz tartozik, de nem látszik utópiának egy olyan megoldás, melyben ezek a modellek az adatbankba áramló aktuális adatokra épülnének, illetve ezek az aktuális adatok minden egyes esetben adaptálódásra késztetnék ezeket a modelleket. Minthogy az ilyen információrendszer folyamatos adaptációja egyben a népgazdaság belső összefüggéseinek dinamikus feltárását és újraértékelését is jelentené, minél nagyobb számban és változatban épülnének be a rendszerbe az aktuális információk, annál nagyobb megbízhatósággal szolgáltatná a rendszer automatikusan a népgazdaság vezetéséhez szükséges elemzési-értékelési visszacsatolásokat.

A vázolt megoldás óriási feladatot jelent mind az ökonometriai modellezés, a rendszertervezés, mind a software-fejlesztés és alkalmazástechnika számára. Ilyen bonyolult és nagy tömegű számítási feladat elvégzésére már ma is vannak példák a világon. A népgazdaság hatékony irányítása távlatban valószínűleg ilyen igényű megoldást követel majd meg.

(Beérkezett: 1970. X. 30.)

# A DIGITÁLIS SZÁMOLÓGÉPEK FEJLŐDÉSÉVEL KAPCSOLATOS MŰSZAKI-TUDOMÁNYOS PROBLÉMÁK*

Írta: VÁMOS TIBOR

## BEVEZETŐ
### A számítógép-hardware probléma hazai alapnehézségei

Szeretném az előadó nehézségeivel kezdeni. Ezek ismertetése némileg világossá teszi a témával kapcsolatos általános hazai problémákat.

Előadást kell tartani egy olyan témáról, aminek élvonalával a hazai szakembereknek alig van kapcsolatuk. Ismertetem az akadémiai gépállomány korösszetételét (ld. táblázatot).

TÁBLÁZAT

| Gép | Intézet | Kereskedelmi megjelenése | Üzembe állítása |
|---|---|---|---|
| LGP 21 | Közp. Kém. Kut. | 1955 | 1966. július |
| ODRA 1013 | ATOMKI | 1962 | 1967. augusztus |
| MINSzK 22 | AKI | 1964 | 1967. április |
| ICL 1905 | KFKI | 1964 | 1966. augusztus |
| CDC 3300 | Szám. techn. Közp. | 1965 | 1969. dec.—1970. jan. |

Mint ismeretes, egy-egy gépgeneráció erkölcsi avulásának ideje 4—6 év, fizikai avulása sem sokkal hosszabb. Embargó okok miatt, gépvásárlási politikánk ingadozásai következtében a kereskedelmi megjelenéstől számítva 3—5 éven belül tudunk vásárolni, bizonyos gépnagyságon felül egyáltalán nem. A kereskedelmi forgalomba való bevezetés előtt a vezető gyárak szigorúan titkolják terveiket, a kiszivárgott hírek, műszaki információk legtöbbször propagandacélokat szolgálnak, nagyon gyakran szándékos félrevezetést. Az újonnan bevezetett gépek, géprendszerek valódi előnyeit, hátrányait a felhasználók is csak az első néhány hónapos gyakorlat után kezdik megismerni.

Így majdnem csak irodalmi közlésekre támaszkodhatunk. Ezt az anyagot a szakmában járatos magyar olvasó jól ismeri; a téma annyira divatos, dinamikus és olyan óriási pénzeket mozgat (a kizárólag számítástechnikai profilú IBM múlt évi forgalma lényegesen meghaladta a teljes magyar nemzeti jövedelmet), hogy a szakcikkek, népszerűsítő ismertetések, információs anyagok, dokumentációk és természetesen összefoglaló értékelések óriási tömegével halmoznak el bennünket. Ezekhez képest nehéz újat mondani.

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia 1970. évi Tudományos Ülésszakán, a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának és a Műszaki Tudományok Osztályának „A számológép-tudomány kérdései" című közös vitaülésén.

Végül a rendelkezésre álló irodalom értékeléséhez. Két fő kategóriát különböztethetünk meg, a tudományos és a kereskedelmi jellegűt. Az elektronikában ma már óriási kereskedelmi-bulvársajtó van (Electronics, Datamation, Computer Design, stb.). Ezek információanyaga sokszor megfelel a politikai bulvársajtóénak, ami nem jelenti, hogy néha nem találunk benne igen érdekes és számunkra nagyon is új dolgokat, de nem mindig látjuk az érdekeket, melyek az információk, értékelések mögött meghúzódnak. A tudományos szaksajtó szintén szigorúan alá van vetve a nagy cégek és katonai megrendelők szempontjainak. Egyes folyóiratok (rendkívül színvonalasak, mint a *Bell System Technical Journal*, vagy az IBM kutatási folyóiratai) hivatalosan is egy-egy cég közlönyei, de másokban, mint pl. az *IEEE Transaction*jaiban is hasonló korlátok között publikálnak. Ezek a publikációk néha szintén félrevezetők, egy-egy félbehagyott kutatás nyilvánosságra hozható melléktermékei.

A szovjet tudomány valódi állásairól hasonló módon kevés az információnk. A közleményben, vagy berendezésben publikációra kerülő munkák nagyon sok évvel haladnak az érthetően zárt kutatás szintje mögött.

Végül — hogy szakszerűen szóljunk — a nem teljes információ alapján történő becslés után extrapolációt kell végeznünk a hazai körülmények között alkalmazható optimális stratégiára.

## A negyedik gép-generáció várható főbb jellemzői

A szorosabban vett téma az ún. hardware-kérdések, a software, a rendszertechnika egyéb problémáiról más előadás szól. A számítástechnikában közismerten a negyedik generáció adventjéről beszélnek — érdemes meghatározni, mit lehet ezen a sokszor propaganda-célú jelszón érteni.

A legfontosabb most is az eddigi generációváltásoknak megfelelően a logikai elemek alkatrészváltása a nagyszabású integráltságra (LSI). Ebből számos olyan következtetés származik, ami messze túlmutat azon a tényen, hogy sok korábbi elemet egy tokban, egy morzsán egyesítenek. A régi (harmadik generációs) gépeket egyszerűen áttervezve LSI-ra, egy becslés szerint a gép központi egysége 3,5%-kal lenne olcsóbb (nem világos, hogy milyen extrapolált jövendőbeli árakkal), de bizonyosan nem változtatna a teljes berendezés árviszonyain. Ez annál is inkább így van, mert az LSI, hacsak nem éri el a teljes aritmetikai, vagy vezérlő egységet egy szeleten, a mostani tervezési elemek szerint sokféle, ezért drága elemfajtát követelne egy gépen belül. Mint ebből a két kis megjegyzésből is látható, a jövő (1970-es évek végének, 1980-as évek elejének) számítógépét az alkatrészfejlesztés üteme és lehetősége még sokkal inkább megszabja, mint az előző generációkét, mivel pedig az alkatrészfejlesztés ma még mindig a viharos remények, meglepetések és csalódások állapotában van, az előrebecslés csak igen óvatos lehet. Ezért is vannak sokan azon a véleményen, hogy az új generációk felé való haladást inkább az evolúció, mint a forradalmi átalakulás fogja jellemezni. Jó példa erre az IBM 360- és 370-es rendszer viszonya.

Az ellentmondásos fejlődésre utal a következő előbecslés: a közeli jövőben az alap- és alkalmazási software költsége eléri a gépre fordítandó befektetésnek a 70%-át, később 15—85%-ra változik a hardware-software arány. Ebből a központi egység, a hardware 3%-a lenne, azaz a teljes költség 0 5%-a. Lehet, hogy ez a becslés túlzott, de föltétlenül a valószínű irányzatot mutatja. Ugyanakkor a gép architekturáját mégis a központi egység szabja meg, tehát az a rész, amelyben a jövőben nem lesz értelme és helye a takarékosságnak. A fejlesztésben a filozófiai változást mutatja a szükséges optimalizálások aránya is. Az egyedi alkatrészek idején elsősorban az aktív elemeket igyekeztek minimalizálni. Az integrált áramkörökben a passzív elemek szerepét is egyre inkább átveszik az aktív elemek. Az integrált áramkörökkel történő tervezésnél már egészen más minimalizálási feladatok játszanak szerepet. Egyre inkább nem is az elemszámot kell minimalizálni, hanem a szükséges elemválasztékot, részben pedig a kötések számát, mindezt esetleg az áramkörök számának redundáns növelésével is. Az ilyen irányú átalakulás megváltoztathatja a memória jellegű elemek és a logikai jellegű elemek optimális arányát is. Így a következő generációt a regiszterek, adatcsatornák számának növekedése fogja jellemezni. Az előbbi adatokból világos, hogy a korábbi irányzattal ellentétben megnő a hardware-rel megoldandó feladatok száma a software-rel szemben. Nagyon sok olyan komplex funkciót, perifériák vezérlését, teljes operációs rendszert, a géprendszer szempontjából lényeges rutinokat hardware-ben fognak megoldani, amit jelenleg bonyolult, nehezen kezelhető programok végeznek. Az alkatrész fejlődés dönti el a mikroprogramozás vagy nem mikroprogramozás kérdését is. Az IBM a 360-as rendszerhez hasonló, de haladottabb $4\pi$ katonai rendszerében egy géptípust mindkét megoldásban elkészített a kettő egymással szemben lényeges, jól értékelhető hátrányokat és előnyöket mutatott (ár, felépítési bonyolultság, sebesség, rugalmasság). Egy későbbi, kiforrott alkatrészbázison egyelőre látható módon mégis a mikro-, sőt makroprogramozási eljárások jövője a valószínűbb. A mostani, rögzített tartalmú (read only) memóriákkal szemben a ritkán beírásra kerülő (read mostly) memóriák, pl. éppen az IBM-nél kipróbálásra kerülő, beírható módon meghatározott morzsa (writable personalized chip-WPC) is ebbe az irányba mutat. A legújabb, ez év októberében bejelentett 370/145 újratölthető vezérlő tára (reloadable control storage) újabb nagy lépés ezen az úton.

A rögzített programozás és a változtatható feladatokra történő mikroprogramozás alternatívája átvezet az általános és speciális gép távlatilag ma sem lezárt kérdéséhez. A nagy gyártási volumenekkel bekövetkező árcsökkenés és technológiai fejlődés, továbbá az utóbbi éveknek az a lényeges irányzata, hogy a rugalmasságot követelő igényeket majdnem kizárólag software-feladatokkal oldják meg, a korábbi bizonytalanabb általános és speciális gép-orientációval szemben, a kizárólagos katonai alkalmazásoktól eltekintve, az általános célú gépek felé vezetett.

A felhasználás változatos követelményeit a gépkapacitás, a rendszer-szemlélet, a perifériális választék modularitása, bővíthetősége oldotta meg. Ahogy egyik oldalról az alkatrészek egyre inkább rendszermodul komplexitássá növekszenek, másik oldalról a felhasználó rendszerben a számítógép mint a rendszer egy meghatározott része és nem pedig valamilyen kiemelt önálló egység szerepel, úgy ez a kérdés magasabb és magasabb szinten újra és újra vitatottá fog válni. A modularitás növekedése és az általános technológiákkal és eljárásokkal létrehozott célberendezések a további évtizedekben nyilván újabb kompromisszumos megoldások felé törekednek.

A nagy gépek, nagy rendszerek architekturáját sem lehet lezártnak tekinteni azzal a — még NEUMANN által elindított — koncepcióval, ami az eddigi generációkat eléggé törésmentesen végigkísérte. Ha hazai erőnk annak idején elég komoly lett volna, vagy a nemzetközi érdeklődést sikerült volna idejében felkelteni, a *Kalmár*-féle formulavezérléses gép lényeges új irányzatot indíthatott volna el. Az új lehetőségek tükrében könnyen lehet, hogy egy bizonyos idő múlva ezt a gondolatot éppugy elő fogják ásni, mint sok régi, halottnak tünt elgondolást a technika történetében. Az egy, vagy legfeljebb két párhuzamos központi egységgel dolgozó rendszerrel szemben jó tíz év óta él a sok párhuzamos központi egységgel és elosztott memóriával dolgozó, iteratív működésű, gyűrűs elrendezésű óriásgép koncepciója. A Solomon, majd később az Illiac-IV csak egyik változata ennek az elképzelésnek. Hasonló típusú gépen dolgoznak ma is a Bell Laboratóriumban, továbbá más, nagy amerikai kutatóközpontokban. Mint ismeretes, az Illiac-IV-nek 256 db, négy csoportra osztott komplett központi egysége van, egyenként 2Kszó 64 bites 250 nsec memóriával. Maguknak az egyes központi egységeknek is két regiszterük van. A rendszer felügyeletét egy hagyományos, nagy teljesítőképességű Borroughs 6500-as típusú gép látja el jelenleg. Ez a kísérleti rendszer, amely normál integrált áramköri emittercsatolt logikákból van felépítve, 2—3 nagyságrenddel nagyobb teljesítőképességű, mint a CDC-6600-as rendszere. Magát a gépet úgy tervezték a ma már hagyományosnak tekinthető áramkörökből, hogy az könnyen cserélhető lehessen nagyobb integráltságra. A Bell Laboratórium óriás párhuzamos géprendszere 32 ezer elemi aritmetikai egységet tartalmaz, összesen 120 ezer MOS LSI morzsát. Ebben és más géprendszerekben is, felmerül a digitális differenciál analizátornak, mint a digitális és analóg technika közötti lépcsőnek a felhasználása. Így a párhuzamos aritmetikai egységeknek az egyes műveletek közötti távolságot felbontó hatását tovább tudják vinni a műveleteken belüli párhuzamosságra is. Milyen mértékben kel újra életre a hibrid-technika, még nem látható. Könnyen lehetséges, hogy a jövő gépeiben újra szerepelni fognak hibrid — analóg-digitális — jellegű funkciók a két megközelítési módszer optimális összekapcsolása érdekében. Bizonyos, hogy ilyen rendszerek csak a nagyszabású integráltság befutott, nagyipari időszakában lesznek aktuálisak, de addig az előkészítő, 10—15 éves munka feltétlenül szükséges, hiszen a ma üzemben álló óriásgépeknél látjuk, hogy azok szellemi háttere micsoda fantasztikus, számunkra megközelíthetetlen méretű munkát igényelt. Ugyanakkor az ilyen géprendszerek nagymértékben csökkentik a jelenlegi rendszerekben nagy hátrányt jelentő soros jelleget és ideális megoldások a sok előfizetős, időosztásos központokra.

A központi egységek fejlődéséhez hasonlóan a memóriák alkatrész-bázisának alakulása a másik alapvető meghatározója a jövő számítógépének. Nem szeretném felsorolni a perspektív memória elemek, elrendezések óriási választékát. Az Electronics a múlt évben több hónapos sorozatban végezte ezt el, számos más, fajsúlyosabb folyóirat rendszeres összefoglalókat közöl. Szinte hétről-hétre találkozunk különböző szenzációs bejelentésekkel, amelyek mind rendkívüli perspektívákat ígérnek. A tényleges realizálás sajnos általában olyan nehézségekbe ütközik, hogy egy-egy plauzibilisnek tűnő eljárás, mint pl. a lemezelt huzal (plated wire) is csak nehezen tör előre. A mai látható irányzatokat becsülve az új elemek közül a félvezető memóriák mutatják a leggyorsabb realizálódó fejlődést. A már említett 360/145 maximálisan 512 KByte-os memóriája tiszta bipoláris félvezető, egy kártyán az elérési idő 90 nsec, 4 Byte-os szó tárolási ciklusa 607,5 nsec. Ezzel is kapcsolatos az asszociatív memória reális megoldása, ami a memóriák organizációjának vonalán talán a legfontosabb probléma. Software-ben, vagy néhány — memória-rekeszre kidolgozott — hardware eljárásban van már asszociatív memóriánk. A legújabb IBM-rendszerek ún. rejtett (catch) memóriája is egy lépés az asszociatív memóriák rendszere felé. Nagy asszociatív memóriákat eddig csak laboratóriumi szinten, kísérletileg sikerült előállítani olyan megoldásokban, melyek ár, sebesség és egyéb járulékos nehézségek miatt a gyakorlati tömeggyártásra kerülő gépekben még nem alkalmazhatók. Az asszociatív memória reális megvalósítása világos módon átalakítja az egész jelenlegi címzési rendszer koncepciót és így ugrásszerű fejlődést adhat a számítógépek általános felépítése és felhasználása számára.

Az alapgépek tekintetében nyitott kérdés, mekkora piaca lesz az egyre nagyobb teljesítőképességű központi óriásgépeknek és a minigépeknek. Ma már eléggé látható módon a kettő nem ellentmondásos, sőt, messzemenően kiegészítik egymást. Ha hazánk méreteire és fejlődési szintjére tekintünk, nem kétséges, hogy mi melyik irányzatot választhatjuk, legalábbis gyártó bázisként. Nem feledkezhetünk el azonban arról, hogy ha a minigépek nagygépek rendszerében dolgoznak, úgy fél szemmel mindig a nagygépek architekturájára kell néznünk, hiszen a mi kis rendszereinknek azokba kell beilleszkedniök. Ez komoly szellemi felkészülést igényel, amelyre előadásom végén még vissza szeretnék térni.

## Perifériák

Bár a gép alapvető felépítését a központi egység és a memória szabja meg, az árát és a felhasználhatóságát egyre inkább a perifériák. Erre két okból is fel kell figyelni — egyrészt azért, mert a periféria az a terület, amit gyártás-kooperációban legjobban szét lehet osztani és így a kisebb országok, ipari rendszerek is részesedhetnek a számítástechnika területén folyó gyártásban, másrészt azért, mert a jelenlegi megszokott periferiális rendszerek, a lyukszalag, lyukkártyatechnológiák szerepe a következő években minden valószínűség szerint lényegesen csökken. Várható, hogy robbanásszerűen kiterjedő piaca lesz a gépelt, vagy szabványos formátumba kézzel írt szövegek, programok optikai beolvasásának, alfanumerikus és grafikus display-eknek, az egyszerű kazettás mágnesszalagos, helyi adatrögzítőknek, telefonhálózatra csatlakozó adatátviteli berendezéseknek és a különböző, nem mechanikus kiviteli eszközöknek, ezek között szerepelnek a már említett alfanumerikus és grafikus display-ek, a mikrofilm berendezések, továbbá a xerografikus vagy más elveken dolgozó kiviteli nyomtató-sokszorosítók (hard copy). A felsoroltak a periferiális berendezéseknek csak egyik, bár legfontosabb, legnagyobb igényű ágát, az adatfeldolgozással kapcsolatos perifériákat jelentik. A folyamatirányításhoz fűződő feladatoknál a különböző, folytonos és nem folytonos folyamatokhoz kapcsolódó perifériák, multiplexer-ek, adatátalakítók, mérésérték-átalakítók, végrehajtó szervek óriási, újrendszerű választékára lesz szükség. Ezek fejlődése jelenleg talán a legjobban elmaradott, hiszen már klasszikussá vált technológiák irányításához kell kapcsolódni, és a jelenlegi megoldások általában olyan öszvérjellegűek, hogy a régebbi automatizálási gyakorlatban is használt eszközöket igyekeznek valamilyen közbenső, ad hoc megoldással a gépekhez csatolni. Az ilyenek rendszerint részben kevéssé megbízhatók, nem is célirányosak és elég költségesek is. Az újabb, gépekhez kapcsolódó megoldások mai formái sem megnyugtatók. Ismeretes, hogy a szokásos gép-perifériák csatolóegységei és a csatoláshoz szükséges software ma is még milyen bonyolult. A negyedik generációs gépek előirányzatai feltételezik, hogy a most használatos software interface megoldások többségében hardware formában fognak készülni. Ha meggondoljuk azonban, hogy egy nagyobb rendszerhez való csatlakozásnál a minimális szolgálati vezérlőjeleknek milyen bonyolult rendszerével kell dolgoznunk, láthatjuk, hogy az áramköri technológia és bonyolultabb interface modulok nagyon lényeges olcsóbbodására van szükség ahhoz, hogy ezeket a feladatokat ésszerű áron, a mai megoldásokkal versenyképesen tudjuk megvalósítani.

## A hazai kutatás lehetőségei és feladatai

A várható vagy becsülhető és mindenképpen vitatható nemzetközi trendek felsorolása után jogos kérdés, hogy ebben a sok milliárd dolláros versenyben, amelyben a fejlesztési költségek nemzetközi szinten lényegesen meghaladják az egész magyar beruházási volument és egy nagyságrenddel lépik túl a Magyarországon valamennyi tudományág kutatására és fejlesztésére fordított eszközöket, mit várhatunk a hazai erőktől?

Ehhez a kérdéshez súlyosbítólag kell hozzátennünk azt a tényt, hogy a kutató-fejlesztő laboratóriumokban előállított és bejelentett szenzációs eredmények realizálása a piacra kerülő géprendszerekben általában valamivel lassúbb, mint az a felületes irodalomszemlélő számára várható volt. A most megjelenő legújabb géptípusok többségében is általában kisfokú, vagy legfeljebb közepes áramköri integráltsággal találkozunk, nagyfokú integráltsággal elsősorban speciális kiscélgépekben és különleges alkalmazásoknál. A memóriák tekintetében a jövő év végére jelzett gépekig még a jól bevált, egyszerű ferritmagos rendszerek dominálnak, sebességben és árban állandóan konkurrálva az újabb és újabb, más típusú megoldásokkal. Az óriási beruházásokkal kialakult hardware és software rendszerek önmagukban is hatalmas tehetetlenséget biztosítanak, ehhez járul a hagyományos technológiák olcsóbb volta, továbbá az új technológiák ki nem járt ösvényeinek állandóan újra előtűnő, nem várt bukkanói. A konkurrencia, a technikai haladás és a tömeges szükséglet mégis — ha lépésenként is —, de időről időre előrelendíti az új rendszerek, új elgondolások áttörését. Az LSI gép ma még kuriózum, 1971—72-ben már számíthatunk első tömeggyártására, és 1975-re bizonyára már majdnem kizárólagos lesz. Ettől lényegesen mi sem maradhatunk le. Ha a jelenlegi 5—10 évre becsülhető általános elmaradásunkat a felhasználásban és fejlesztésben előre tervezett formában állandósítjuk, végeredményben ilyen gyorsuló fejlődésben, dinamikus rendszerben az elmaradást menthetetlenül tovább fokozzuk, és teljesen kiszorolunk a piacról, hosszú időre kiható következményeket okozunk a felhasználási szintben. Természetes dolog, hogy *egyedül* a nemzetközi színvonalra való előrejutást célul kitűzni nem lehet. Nem mondhatunk le azonban arról, hogy a szocialista tábor a következő időszakban ésszerű távlatban olyan géprendszereket tudjon kooperációban előállítani, amely megfelel a kapitalista tábor általános pillanatnyi színvonalának. Ez csak kétlépcsős, egymáshoz kapcsolódó stratégiával képzelhető el. Az első lépcső az az OMFB által kezdeményezett,nagy jelentőségű program, amelynek keretében licencvásárlásokkal, a belső fejlesztés meggyorsításával, néhány — számunkra szellemileg, technológiailag, anyagilag elérhető — részfeladat kiragadásával igyekszünk az általános elmaradást lényegesen csökkenteni oly módon, hogy viszonylag gyorsan tudjunk legalább az európai piacon utánfutókká válni. Ebben a programban lényeges szerepet játszik a kisgép-fejlesztés, melyet egyik oldalról egy licenc-vásárlás, másik oldalról a KFKI-ban végzett sokéves, színvonalas munka alapozott meg. Hozzátartoznak mindazok a hardware-fejlesztési munkák (lyukszalag perifériák, display, adatátvitel, mágneses rögzítőegységek), melyeknek fejlesztését részben hazai eszközökből, részben licencvásárlásokkal sikerült oly mértékben felgyorsítani, hogy azokban a szocialista táboron belül versenyképes partnerként léphetünk fel. Bárhogy is nem sorolható az alaptudományos tevékenység közé, mégis kiemelt akadémiai feladatnak tekintjük, hogy jelentős akadémiai kapacitásunkat, amely máris komoly sikereket ért el és amely ezen a területen a kutatásban-fejlesztésben az orságban a legnagyobb integrált erő, ennek a programnak a szolgálatába állítsuk. Az ettől való távolmaradás nemcsak azért nem lehetséges, mert egy ország nem engedheti meg magának, hogy ilyen jól felkészült kapacitást ne használjon fel optimálisan, hanem azért sem, mert a továbbfejlődésnek elengedhetetlen feltétele, hogy a kutató-fejlesztők — reális hátteret érezve maguk mögött — előremutató munkáikban a gyakorlatba való átvitel tapasztalatain ne menjenek keresztül. Az Akadémia egyik oldalról elindítója volt a hazai számítástechnikai fejlődésnek. Itt alakult ki az első káderbázis, itt épült meg az első hazai számítógép, itt dolgozódtak ki KALMÁR akadémikusnak nemzetközi visszhangra talált, bár nem realizálódott gondolatai. Az Akadémián épült meg az első, ugyan csak kis sorozatban gyártott, de használható magyar számítógép típus. Akadémiánk intézeteiben az ember-gép kapcsolatok, a számítógépes elektronikus és gépipari tervezés vonalán olyan eredmények születtek, melyekre joggal büszkék lehetünk. Ugyanakkor felemás, bátortalan állásfoglalások következtében az Akadémia hosszú ideig elmaradt az országos programokban való részvételtől, majdnem leggyengébb volt a géphattere, nem tudatosodott az a gondolat, hogy a számítástechnika volumenét messze túlhaladó súllyal az egész ország műszaki-tudományos szerkezetére, fejlődésére van alapvető hatással, amire az Akadémián összpontosuló bázist érdemes irányítani. Az elkövetkező 2—3 év feladatainak zömét ez a program bőven kitölti. Előre nézve azonban meg kell alapoznunk a következő lépcsőt. Integrált nemzetközi együttműködésben csak akkor vehetünk részt, ha általános szellemi felkészültségi színvonalunk, tájékozódásunk nemcsak irodalmi szinten felel meg a különlegesen gyors előrehaladás követelményeinek. Itt hangsúlyozom, hogy — bár az előadás a hardware-kérdésekkel foglalkozik —, kutatási, fejlesztési szinten a hardware-t és software-t, ahogy azt más vonatkozásokban már bemutattam, nem lehet szétválasztani. Az új rendszerek kialakításánál és az új rendszerekbe való beilleszkedésnél — akár kisgéppel, akár perifériával, akár applikációval történik — csak a hardware és software közös fejlesztési koncepciójának együttes áttekintésével tudunk előrehaladni. Ilyen módon épültek fel azok a rendszerek is, amelyek ma a leghaladottabbak, vagy amelyeket a jövő számára készítenek. A nagyobb sebességű, komplexebb funkciójú új elemeket és az azokból felépíthető rendszereket a régebbi géprendszereken szimulálták. Nem feledkezhetünk meg arról, hogy az Akadémián belül és természetesen azon kívül is Magyarországon lényeges alkatrészkutató bázis is van. A szilárdtest fizikában két olyan komoly akadémiai intézet, mint a Központi Fizikai Kutató Intézet és a Műszaki Fizikai Kutató Intézet fejt ki jelentős tevékenységet. Ezek perspektív munkáját lényegesen közelebb kellene hozni számítástechnikai távlati munkáinkhoz. Egy-egy elképzelt variánsra készülve különlegesen nagy kockázatot vállalnánk, és ez nem megengedhető. A jól bejárt utak viszont csak elmaradottabb eredményeket adhatnak. A második lépcsőben tehát a nemzetközi kooperáció keretében különböző utakat kell tudnunk párhuzamosan elindítani és kipróbálni a szocialista országok együttes közös kockázatvállalása alapján. Ehhez azonban az első lépcsőben megszerzett hitelre (erkölcsi és anyagi hitelre) és tapasztalatokra van szükségünk. Ha ma ebben az irányban bátran elindulunk, remélhetjük, hogy a számítógépek ötödik generációjáról szóló előadók, akik minden bizonnyal egy generációval nálunk fiatalabbak lesznek, kevesebb belső kétséggel és világosabb programmal állhatnak hallgatóik elé.

(Beérkezett: 1970. XI. 19.)

# SZÁMÍTÁSTECHNIKAI MÓDSZEREK A FIZIKAI KUTATÁSBAN*

Írta: VARGA LÁSZLÓ

## Bevezetés

A számítástechnikai módszereket a fizikai kutatásban ma már széles körben alkalmazzák. Mindenki előtt ismeretes, hogy a fizikában, különösen az elméleti fizikában a matematikai módszerek mindig is nagy szerepet játszottak, ezek között azonban gyakran az analitikus módszerek jártak az élen. A mai fizikai kutatásban viszont a numerikus és általában a számítástechnikai módszerek széles körű elterjedésének lehetünk tanúi.

Ez a jelenség természetes velejárója a fizika fejlődésének. A fizika egyre mélyebbre hatol az anyag tulajdonságainak megismerésében és egyre bonyolultabb modell segítségével képes csak a jelenségek leírására. Így a fizikus olyan feladatokhoz jut el, amelyek nagyon sok numerikus számítást, vizsgálatot és döntést kívánnak meg. Ezeket a feladatokat a mai modern számológépek nélkül nem lehet megoldani.

A számítástechnikának, és általában a számológépeknek a szerepe a fizikai kutatásban ma sokkal nagyobb, mint amit egyáltalán várhattunk volna a fizikában jelenlevő matematikai feladatok ismeretében. Ennek az a magyarázata, hogy a számológépek egy új alkalmazási területnek, a jelenségek megfigyelésének, a bonyolult mérések automatizálásának hatékony eszközeivé váltak. Éppen ez az a terület, amely a jövőben különösen nagy lehetőségeket tartogat a hazai kísérleti fizika számára is.

Tanulmányozva a fizikai kutatásban alkalmazott számítástechnikai módszereket, megállapíthatjuk, hogy azok elsősorban a

mérések tervezésében és vezérlésében,
az adatok szervezésében és kiértékelésében,
a folyamatok, rendszerek szimulálásában,
valamint az elméleti fizikai feladatok megoldásában játszanak jelentős szerepet.

A mérések tervezésének és vezérlésének, valamint az adatok előzetes kiértékelésének eszközei többnyire a kisszámológépek. A kisszámológépektől az adatokat végleges kiértékelésre korábban lyukszalagon, ma inkább mágnesszalagon vagy on-line úton továbbítják a nagy teljesítményű számológéphez, gyakran géprendszerhez. Ezek a géprendszerek kiválóan alkalmasak a műveletigényes, nagyterjedelmű feladatok elvégzésére, valamint a nagyszámú program „belövési" feladatainak megoldására.

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia 1970. évi Tudományos Ülésszakán, a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának és a Műszaki Tudományok Osztályának „A számológép-tudomány kérdései" című közös vitaülésén.

## Néhány általános feladat

A mérési és adatkiértékelési feladatok nagy részét különböző spektrumok mérése és feldolgozása jelenti. Ezzel a problémával találkozunk például a magreakciók vizsgálatánál és az anyagspektroszkópia különböző feladatainál. Általában ezeknél a feladatoknál arról van szó, hogy megmérjük valamilyen körülmények között egy magreakcióból vagy egy összetett sugárforrásból származó részecskék energia szerinti eloszlását, majd a kiválasztott tartományban a kapott adatok alapján megbecsüljük a sugárforrásra jellemző fizikai állandókat.

Ennek a feladatnak van egy szorosan a mérőhelyhez, a méréstechnikai eszközökhöz kapcsolódó része, ez a mérés megtervezése, vezérlése, az adatok összegyűjtése, válogatása és előzetes kiértékelése. Ezen a területen a technikai eszközök az utóbbi néhány évtizedben hatalmasat fejlődtek az egycsatornás analizátortól kezdve a számológéppel összekapcsolt, néha összeépített többezer csatornás analizátorig.

Ilyen spektrumkiértékelési feladatnál a következő feladatok merülnek fel:

A fizikus mindenekelőtt adatait ábrázolva szeretné látni, legtöbbször még a mérés fázisában. Tudni szeretné nincsenek-e kiugró adatok, nem jelentkezik-e valamilyen szemmel látható rendellenesség, amely a mérés újratervezését, módosítását, esetleg csak újraprogramozását követelné meg. Ezután szeretné látni a mérés részleteit is. Általában elsősorban arra kíváncsi, hogy hol vannak a csúcsok a spektrumban, mekkora a csúcsok alatti terület stb. Az egymáshoz közel eső csúcsok azonban gyakran nem különböztethetők meg egymástól a nagy statisztikus zaj miatt, esetleg maguknak a csúcsoknak a jelenlétét is bizonytalanná teszi ez a zaj. Ilyenkor megkönnyítheti a csúcsok felismerését a statisztikus zajtól némileg megszűrt adatok ábrázolása. Szükség van tehát egy alkalmas matematikai szűrést végző programra.

Más esetben a fizikus a felvett görbe simított deriváltjait szeretné látni, hogy abból következtessen a csúcsok jelenlétére. Esetleg bizonyos tartományban egyszerű görbeillesztést szeretne végrehajtani. Ezek mellett a feladatok mellett legtöbbször szükség van a mérés folytatására, az adatok folyamatos gyűjtésére és programmal vezérelt beavatkozások végrehajtására.

Ezen a területen nyilvánvaló a számlálógépek, elsősorban a kisszámlálógépek és az azokra készített operációs rendszerek jelentősége. Egy ilyen rendszer leírása megtalálható például az [1], [2] munkákban.

Nézzük meg ezután a mérések kiértékelésénél szereplő módszerek matematikai problémáit.

Az említett spektrumok matematikai nyelven szólva sűrűségfüggvények keverékével írhatók le. Ezért a kiértékelés feladata a keverékben szereplő ismeretlen paraméterek értékének becslése. Az első feladat mindjárt a komponensek számának meghatározása. A feladat matematikai nehézségét egyrészt az okozza, hogy jelentős statisztikus hibával terhelt adatokból kell megállapítani az „összeolvadt", egymásra szuperponált sűrűségfüggvény komponensek jelenlétét. Ennek a feladatnak megoldására többféle módszer ismeretes. Az egyik az, hogy a feladatot elsőfajú konvolúciós típusú integrálegyenlet megoldására vezetjük vissza. Itt a feladatban rejlő nehézség úgy jelentkezik, hogy a kimért függvény hibái a megoldásban tetszőlegesen nagy hibát eredményezhetnek. A probléma közelítő megoldása valamilyen alkalmasan megválasztott regularizáló módszerrel történik. Egy ilyen módszer a keverékben levő komponensek számának meghatározásán kívül lehetővé teszi a paraméterek becslésére alkalmas iterációs módszerek kezdő értékeinek meghatározását is.

Az említett konvolúciós típusú integrálegyenlet numerikus megoldásának problémája a mérési eredmények kiértékelésénél más vonatkozásban is jelentkezik. A mérőműszerek egy típusának általános tulajdonsága az, hogy a kimenő jel a bemenő jelnek és a műszerre jellemző függvénynek a konvolúciójaként jelentkezik. Így a bemenő jel visszaállítása ugyancsak egy *Fredholm*-féle elsőfajú integrálegyenlet megoldását jelenti.

A paraméterek becslése a legtöbb esetben a legkisebb négyzetek módszerére redukálható. Itt arról van szó, hogy ismert a jelenséget leíró függvény formulája, de abban ismeretlen paraméterek szerepelnek. Az ismeretlen paraméterek értékét a súlyozott legkisebb négyzetek módszerével kell meghatározni. A végrehajtásnál gyakran okoz itt problémát az, hogy a feladat ún. „gyengén meghatározott" feladat. Ezért az általánosan ismert *Newton*-módszernél hatásosabb módszerrel kell dolgoznunk. Egy másik gyakran jelentkező probléma az, hogy a jelenséget leíró formulánk túlságosan bonyolult. Például nem tudjuk a függvény paraméterek szerinti parciális deriváltjainak értékét formulával számítani. Ezeknél a feladatoknál tehát a feladat természetének leginkább megfelelő függvényminimalizáló algoritmussal kell dolgoznunk.

A paraméterek fizikai tartalommal rendelkező mennyiségeket jelentenek. Gyakran, mint például a buborékkamra-kiértékeléseknél, ezeknek a mennyiségeknek a méréstől független összefüggéseknek is eleget kell tenniük. A buborékkamra-felvételek kiértékelésénél az impulzus és energia megmaradás törvénye az, ami további összefüggéseket ad. A feladat azonban nem egyszerűen feltételes szélsőérték meghatározása, hiszen a becslésként kapott értékekre nem követelhetjük meg az összefüggések pontos teljesülését. Ilyen esetekben a helyes becslőfüggvény megválasztásának problémája nehezíti a feladat megoldását.

Nézzünk egy másik feladatkört a kvantum mechanika alapegyenletének a problémáját. Relativisztikus esetben ez az egyenlet a Schrödinger egyenlet. Az egyenlet megoldása a kvantummechanikai hullámfüggvény, amely egy eloszlást ad meg. Ezzel a problémával a magfizikában, a szilárdtestfizikában és a kémiában egyaránt találkozhatunk. Különböző területen különböző részecskék eloszlásának jellemzésére oldják meg ezt az egyenletet a megfelelő feltételek mellett.

Nézzük a magfizika területét. A kutatók korábban az említett feladatot csak egyszerű feltételek esetén, a valóságot csak kevésbé közelítő modellre tudták megoldani. Olyan problémák megoldására, ahol több részecskének egymáshoz való kölcsönhatását is figyelembe kell venni, nem is gondolhattak. Amikor ezeknek a megoldásához a számológépek megjelenése utat nyitott, kiderült, hogy új módon kell a feladatot megfogalmazni. Így jutottak el a *Fagyejev*-féle integrálegyenlet rendszerhez. Ennél a feladatnál a szingularitások leválasztása után a megfelelő numerikus kvadratura megválasztásával lineáris egyenletrendszerre jutunk. Itt a mátrix elemeinek előállítása önmagában is igen műveletigényes feladat, amelyhez járul az, hogy a nagyméretű mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározását kell elvégezni. Igen leegyszerűsített probléma esetében is több száz ismeretlenes feladatról van szó. A probléma megoldásához a numerikus kvadratura és a lineáris algebra leghatásosabb módszereit kell felhasználnunk.

A szimulációs módszerek alkalmazásának egy igen gazdag területe a reaktorfizika. A reaktorfizikai folyamatokban a részecskék tényleges mozgását kell reprezentálni a tipikus részecskék pályájának szimulálásával. Az itt használt *Monte-Carlo* módszerek nehézségei, műveletigényessége közismert.

A fizikai kutatásban előforduló problémák egyre bonyolultabbak, így programjaik is egyre bonyolultabbak. A mai helyzetet szeretném érzékeltetni azzal a kimutatással, amelyet a nemzetközi irodalomban közölt programok dokumentumai alapján készítettem. A *Computers Physics Communications* című folyóirat az elmúlt két évben 36 programot közölt le. A programok átlagos gyorsmemória igénye 32 966 szó, de akadt olyan program is, amely 135 000 szavas memória igénnyel készült. A Központi Fizikai Kutató Intézet (KFKI) gyakorlatában is egyre növekszik azoknak a feladatoknak a száma, amelyek a 32 000 szavas gyorsmemóriával rendelkező gépünkön még overlay formában sem látszanak megoldhatónak.

Az utóbb említett feladatok műveletigényes feladatok, viszonylag kevés perifériális műveletet igényelnek, így ezekkel a feladatokkal a multiprogramozás lehetősége nem használható fel eredményesen. Ezért ilyen feladatok megoldásánál egyre inkább számológéprendszert használnak. Egy ilyen rendszer általában egy főgépből és a mellérendelt közepes teljesítményű gépből áll. A főgéphez közvetlenül nem illesztenek lassú periferiális egységeket, így azok megszakításai nem zavarják annak munkáját. A lassú periferiális egységek a főgépet kiszolgáló gépre kerülnek. Ugyancsak oda csatlakoznak a mérőhelyekről érkező adattovábbító vonalak is. Ez a gép fogadja az adatokat, a forrásnyelvű programokat, és azokat kellő előkészítés után a főgép háttértárolójához továbbítja, az eredményeket viszont átveszi és a kívánt lassú periferiális egységen megjelenteti.

A számítástechnikai módszerek fizikai alkalmazásának hazai helyzetét csak a KFKI példáján keresztül ismerem, a következőkben — nagyon röviden — erről szeretnék beszélni.

A számítástechnikai módszerek elterjedésének természetesen előfeltétele az, hogy rendelkezzünk megfelelő számológéppel és az azokkal együttműködni képes mérőberendezésekkel. Ezen a területen jelentős előrelépés volt az, hogy a KFKI-ban 1966-ban üzembe állítottuk az akkori időben korszerű ICT 1905-ös számológépet. Ez a gép közel 100 ezres műveleti sebességével három műszakban üzemelve szolgálja a hazai kutatás, köztük a fizikai kutatás céljait. A KFKI-ban ezt a gépet a felsorolt feladatokhoz hasonló problémák megoldására használjuk. Ez alatt az idő alatt több száz olyan program készült el, amelyeket ma is használunk.

A nagy gépek mellett egyre növekszik a kisszámológépek szerepe és jelentősége. Így napjainkban hazánkban is tanúi lehetünk a kisszámológépek elterjedésének a fizikai kutatásban.

A KFKI maga is előállított egy ilyen célra alkalmazható számológépet, a TPA-t. Ennek a munkának eredménye az, hogy a KFKI különböző laboratóriumaiban ez év végére 8 db TPA gép fogja a kutatómunkát szolgálni.

Ilyen gépet kívánunk többek között alkalmazni például a magfizikában perturbált szögkorrelációs méréseknél, félvezetővel felvett magreakciók spektrumainak ellenőrzésére, a buborékkamra felvételek kimért adatainak kiválogatására stb.

## A közeljövő feladatai

A számítástechnikai eszközöknek, módszereknek az alkalmazása napjainkban alapvetően változtatja meg a fizikai mérések végrehajtását és azok kiértékelését, lehetővé téve nagyszámú esemény, jelenség tanulmányozását és azokból az eddigieknél pontosabb, esetleg új következtetések levonását. Ezen a területen a mérések teljes automatizálását megvalósító rendszerek alkalmazása a cél, amelyekben a központi helyet a kis univerzális számológépek foglalják el. Ezeket a gépeket olyan moduláris felépítésű operációs rendszerrel kell ellátni, amely lehetővé teszi a feladatnak megfelelő rendszer összeállítását a meglevő alapelemekből. A mérés végrehajtása, azaz az operációs rendszer vezérlése egyszerű nyelven, direktívák segítségével történik.

A méréskiértékelési feladatok kiértékelésében az „előregyártott" programoké, a feladatnak megfelelően összeépíthető kész programelemeké a jövő. A feladatra orientált programcsomagok kidolgozásához, továbbfejlesztéséhez a numerikus analízis legújabb módszereit kell felhasználni. Így nem lehet eléggé hangsúlyozni *a modern numerikus módszerek* kutatásának fontosságát.

A megfelelő programcsomagok birtokában a fizikai alkalmazások terén is várható, hogy a programozás nyelve közeledni fog a beszélt nyelvhez. Arra kell törekedni, hogy az adott területen meglevő kész programelemekből könnyen elsajátítható nyelv segítségével lehessen a komplex feladatot megoldani.

## IRODALOM

[1] *Use of Computers in Analysis of Experimental Data and the Control of Nuclear Facilities.* Proc. Symp. at Argon Nath. Lab., Argone 1967.

[2] *Proceeding of the IFIP Congress 68.* Nort-Holland Publishing Company Amsterdam, 1969. Part 2 (Operating System Implementation), Part 4 (Applications in Physical Science).

(Beérkezett: 1970. XI. 13.)

# SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYEK ÉS DISZKRÉT ELOSZLÁSOK SZUPERPOZÍCIÓINAK FELBONTÁSA. II.*

Írta: MEDGYESSY PÁL

## III. SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY-SZUPERPOZÍCIÓK FELBONTÁSA

### 1. §. Első szuperpozíció-típus. Az $\mathcal{A}$-módszer

E fejezetben az I. fejezetbeli 1. problémával foglalkozunk. A gyakorlatban elég

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k, \beta_k) \quad (A_1 < \beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_N < A_2)$$

típusú szuperpozíciók felbontására szorítkozni, melyekben $f(x, \beta_k)$ szigorúan egycsúcsú ($A_1$) vagy ($A_2$) vagy ($A_3$) sűrűségfüggvény és az $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ függvények csúcshelyei különbözők.

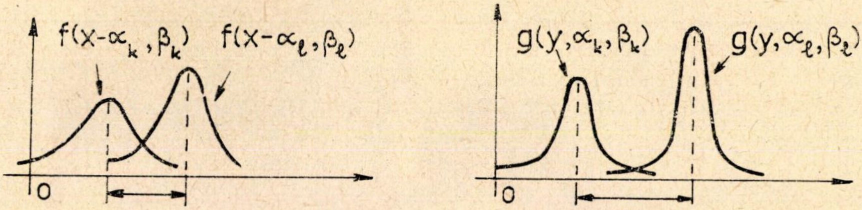
A $k(x)$ szuperpozícióhoz rendeljük hozzá a

$$b(y) = \sum_{k=1}^{N} p_k g(y, \alpha_k, \beta_k)$$

úgynevezett tesztfüggvényt, amelyre a következő *feltételek* állnak fenn:

I. A $g(y, \alpha_k, \beta_k)$ függvény $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ $(k=1, \ldots, N)$ egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltja (l. II. 6. §.); az ennek értelmében $g(y, \alpha_k, \beta_k)$ és $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ közt fennálló összefüggés $\alpha_k, \beta_k$-tól független.

II. $g(y, \alpha_k, \beta_k)$ és $g(y, \alpha_l, \beta_l)$ csúcshelyeinek távolsága legalább akkora, mint $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ és $f(x-\alpha_l, \beta_l)$ csúcshelyeinek távolsága (l. a 15. ábrát).




15. ábra

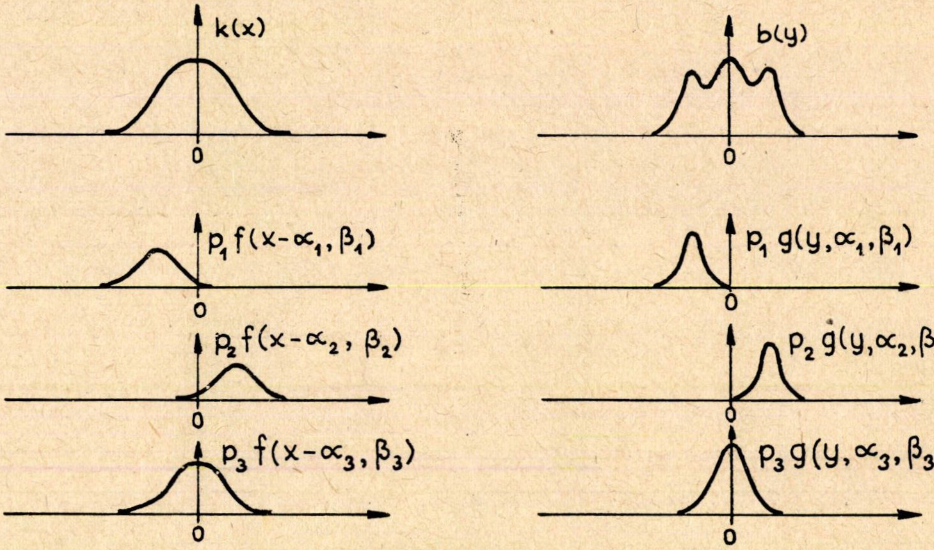
III. $b(y)$ előállítható pusztán $k(x)$ segítségével, $N, p_k, \alpha_k, \beta_k$ ismerete nélkül, esetleg $g(y, \alpha_k, \beta_k)$ és $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ összefüggése felhasználásával.

$b(y)$ nyilván a $g(y, \alpha_k, \beta_k)$ komponens-sűrűségfüggvények szuperpozíciója.

$g(y, \alpha_k, \beta_k)$ görbéje keskenyebb, mint $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ görbéje, és $b(y)$ ezen komponenseinek csúcshelyei legalább annyira szétszórtan helyezkednek el, mint $k(x)$ komponenseinek csúcshelyei. Ezért *várható*, hogy $b(y)$ görbéjében a komponensek görbéi

* A dolgozat I. része, az I. és II. fejezet az MTA III. Osztály Közleményei XXI/1—2. számában, pp. 129—200 jelent meg. A fejezetek és az ábrák számozása folytatólagos.

*különváltabban* mutatkoznak meg, mint $k(x)$ görbéjében, erős különválás esetén szinte egyenként. Így *várható,* hogy a tesztfüggvény grafikonjából kiolvasható $N$, a komponens-szám, — esetleg a kevéssé torzított komponens-görbék csúcshelyeinek ordinátaértékeiből stb. egyes más paraméterértékek is kiszámíthatók. (L. a 16. ábrát.)




16. ábra

Tekintsük a következő lépéseket:

A) a leírt $g(y, \alpha_k, \beta_k)$ függvény megtalálása $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ alapján;

B) a $b(y)$ tesztfüggvény kiszámítása $k(x)$ alapján, A) segítségével.

C) $k(x)$ grafikonja *mért* ordinátaértékeire, mint egyedül rendelkezésünkre álló adatokra támaszkodó, a $b(y)$ tesztfüggvény értékeinek *közelítő* kiszámítására alkalmas, B)-re épülő optimális numerikus eljárás kidolgozása.

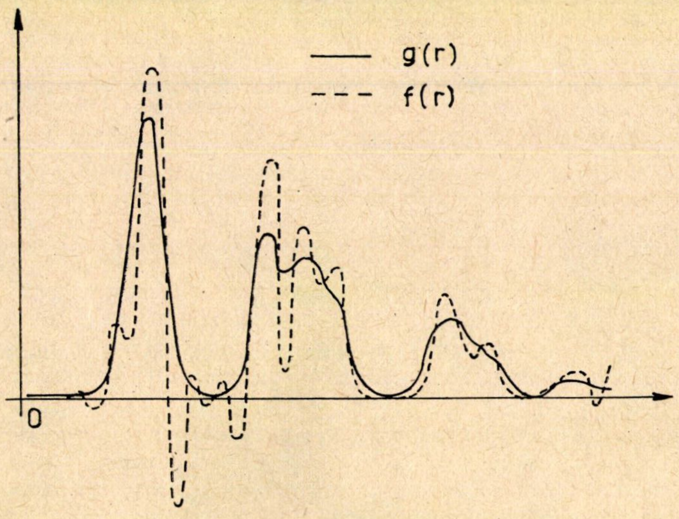
(C) a tesztfüggvény *közelítését* szolgáltatja csupán. Többet azonban nem érhetünk el.)

A $b(y)$ tesztfüggvény ezen közelítésének görbéjére a *„pontos"* tesztfüggvény-grafikon kiértékelésére vonatkozó fenti megállapítások közelítőleg igazak.

A $k(x)$ szuperpozíció felbontására szolgáló $\mathscr{A}$-módszernek nevezzük a $b(y)$ tesztfüggvény ezen *közelítése* grafikonjának megszerkesztését és abból az ismeretlen paraméterértékekre való következtetést (=felbontás). — Alapötlete: SEN *(1922)*; DOETSCH *(1928), (1936)*; MEDGYESSY *(1954b), (1961a)* Ch. II (l. még: *Kiegészítések és problémák III. 1. §-hoz).*

PÉLDA. Az $\mathscr{A}$-módszer alkalmazására (az általános esetben) érdekes példát közöl ZSIDKOV, SCSEDRIN, RAMBIDI, EGOROVA *(1968)*, egy gázelektronográfiai probléma megoldását nyújtva vele. A szerzők a tesztfüggvényre közölnek egy I. fajú

*Fredholm*-féle integrálegyenletet. Ezt a mérési adatok alapján az *A. N. Tihonov*-féle regularizációs módszerrel (l. V. 1. §.) numerikusan megoldják (a probléma *inkorrekt*). — A cikk legfontosabb ábráját a 17. ábra mutatja be. $g(r)$ a felbontandó szuperpozí-




17. ábra

ció, $f(r)$ a tesztfüggvény. Utóbbi görbéjének csúcsai vizsgálatából meg lehetett határozni a problémára jellemző paraméterek számát és értékét (l. még MEDGYESSY *(1971d)*).

### 1. Az $\mathcal{A}$-módszer első speciális esete: A formáns-változtatás módszere

Legyen a

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k, \beta_k) \quad (\Lambda_1 < \beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_N < \Lambda_2)$$

szuperpozícióban $\beta_k$ $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ görbéjének *monoton formánsa.*

Tekintsük a

$$b(y) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(y-\alpha_k, \theta(\beta_k))$$

függvényt, ahol $\theta(x)$ szigorúan monoton, $\beta_k$-t nem tartalmazó függvény, $\theta(\beta_k)$ $\beta_k$ egy másik megengedett értéke és $\theta(x)$ úgy van megválasztva, hogy $\mathcal{G}f(y-\alpha_k, \theta(\beta_k)) \prec \prec \mathcal{G}f(x-\alpha_k, \beta_k)$. Mivel $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ szigorúan egycsúcsú, $f(y-\alpha_k, \theta(\beta_k))$ is az. *Tegyük fel,* hogy $f(y-\alpha_k, \theta(\beta_k))$ és $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ közt jól definiált, $\alpha_k$ és $\beta_k$-tól független összefüggés áll fenn. Ekkor III. 1. §. I. feltétele teljesül $f(y-\alpha_k, \theta(\beta_k))$-ra, vagyis $f(y-\alpha_k, \theta(\beta_k))$ $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ *azonos* típusú, egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltja. Ha $f(x, \beta_k)$ csúcshelye $\beta_k$-tól *független,* III. 1. §. II. feltétele is teljesül

$f(y-\alpha_k, \theta(\beta_k))$-ra; ellenkező esetben *tegyük fel,* hogy e feltétel teljesül. Végül *tegyük fel,* hogy $b(y)$ segítségével, $N, p_k, \alpha_k, \beta_k$ ismerete nélkül, esetleg $f(y-\alpha_k, \theta(\beta_k))$ és $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ összefüggése felhasználásával előállítható. Ekkor III. 1. §. III. feltétele is teljesül. Így tehát $b(y)$ vehető a $k(x)$-hez rendelt tesztfüggvénynek és a III. 1. §. A), B) és C) lépéseit elvégezve, az $\mathscr{A}$-módszer alkalmazható.

Ez esetben az $\mathscr{A}$-módszert — érthető okokból — a formáns-változtatás módszerének nevezzük. (Alapötlete, általános alakban: MEDGYESSY *(1954b)*, *(1961a)* pp. 121—127.)

Minél közelebb van $\theta(\beta_k)$ $A_2$ ill. $A_1$-hez, annál jobban különválnak a tesztfüggvény-komponensek görbéi, vagyis annál jobb felbontás várható.

### 1.1 A formáns egyszerű csökkentése

A III. 1. §. 1.-ben vizsgált tesztfüggvény legegyszerűbb típusa az, amidőn $0<\beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \cdots \leqq \beta_N < A_2$, $\beta_k$ $f(x, \beta_k)$ görbéjének $(A_2, 0)$ monoton formánsa és $\theta(\beta_k) = \beta_k - \lambda$, ahol $\lambda$ egy paraméter, és $0<\lambda<\beta_1$; ez utóbbi feltétel *alapvető* fontosságú. Ez a $\theta(\beta_k)$ eleget tesz a III. 1. §. 1.-ben előírt feltételeknek. Ekkor $\mathscr{G}f(y-\alpha_k, \beta_k-\lambda) \prec \mathscr{G}f(x-\alpha_k, \beta_k)$. *Tegyük fel,* hogy $f(y-\alpha_k, \beta_k-\lambda)$ és $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ közt jól definiált, $\alpha_k$ és $\beta_k$-tól független összefüggés áll fenn. Ekkor III. 1. §. I. feltétele teljesül $f(y-\alpha_k, \beta_k-\lambda)$-ra, vagyis $f(y-\alpha_k, \beta_k-\lambda)$ $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ *azonos* típusú, egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltja. Ha $f(x, \beta_k)$ csúcshelye $\beta_k$-tól *független,* III. 1. §. II. feltétele is teljesül $f(y-\alpha_k, \beta_k-\lambda)$-ra; ellenkező esetben *tegyük fel,* hogy e feltétel teljesül. Végül *tegyük fel,* hogy $b(y)$ $k(x)$ segítségével, $N, p_k, \alpha_k, \beta_k$ ismerete nélkül, esetleg $f(y-\alpha_k, \beta_k-\lambda)$ és $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ összefüggése felhasználásával előállítható. Ekkor III. 1. §. III. feltétele is teljesül. $b(y)$ helyett most $b(y; \lambda)$-t írva,

$$b(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(y-\alpha_k, \beta_k-\lambda)$$

vehető a

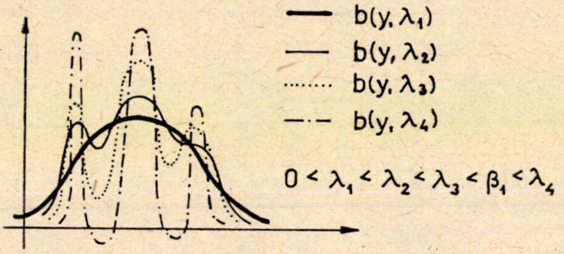
$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k, \beta_k)$$

szuperpozícióhoz rendelhető tesztfüggvénynek és a III. 1. §. A), B) és C) lépéseit elvégezve, az $\mathscr{A}$-módszer alkalmazható.

Ez esetben az $\mathscr{A}$-módszert a formáns (egyszerű) csökkentése módszerének nevezzük. (Ez, mint a formáns-változtatás speciális esete, amannál korábban is szerepel már: SEN *(1922)*; DOETSCH *(1928)*, *(1936)*; MEDGYESSY *(1953)*.)

A tesztfüggvény közelítő előállítását itt 0-tól kezdve egyre nagyobb és nagyobb $\lambda$-értékekre külön-külön elvégezzük, mert $\beta_1$-et nem ismerjük. Közelítő görbéik egybevetéséből látható lesz egyes komponensek különválása; összevissza oszcilláló, az abscissza-tengely alá is le-lesüllyedő görbe fellépése általában arra mutat, hogy $\lambda$ túllépte $\beta_1$-et. Ebből esetleg $\beta_1$ értékére is következtethetünk. (L. a 18. ábrát.)

Megjegyzendő: metodológiai példákkal igazolható, hogy $\lambda = \beta_1$ esetén *sem* lépnek fel okvetlenül igen nagy pozitív ill. negatív függvényértékek, valamint hogy a tesztfüggvény-közelítést szolgáltató numerikus módszer kis, új csúcsokat hoz be. A módszer alkalmazhatóságát (nagyobb negatív tesztfüggvény-értékek fellépésének jelentése stb.) mindez azonban nem befolyásolja lényegesen.




18. ábra

A formáns csökkentésének módszere — a feltételek fennállása esetén — igen jól alkalmazható például a

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\beta_k^\omega} f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k^\omega}\right) \qquad (\omega>0;\quad 0<\beta_1\leqq\cdots\leqq\beta_N<\Lambda_2)$$

típusú szuperpozíciók felbontására; $\beta_k\,(\Lambda_2, 0)$ monoton formánsa $\frac{1}{\beta_k^\omega} f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k^\omega}\right)$ görbéjének (l. II. 4. §.) és így tovább.

A megfelelő tesztfüggvény

$$b(y,\lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{(\beta_k-\lambda)^\omega} f\left(\frac{x-\alpha_k}{(\beta_k-\lambda)^\omega}\right) \quad (0<\lambda<\beta_1).$$

$b(y,\lambda)$ $k(x)$ segítségével való előállítása esetenként határozandó meg.

PÉLDA. Azonos rendű Gamma-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása. Itt

$$k(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{x^{\gamma-1} e^{-\frac{x}{\beta_k}}}{\beta_k^\gamma \Gamma(\gamma)} & (x>0) \\ 0 & (x\leqq 0) \end{cases} \qquad (0<\beta_1<\cdots<\beta_N<\Lambda_2).$$

Ha $\gamma=1$, exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása szerepel.

Tesztfüggvénynek vehető

$$b(y,\lambda) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{x^{\gamma-1} e^{-\frac{x}{\beta_k-\lambda}}}{(\beta_k-\lambda)^\gamma \Gamma(\gamma)} & (x>0) \\ 0 & (x\leqq 0) \end{cases} \qquad (0<\lambda<\beta_1),$$

minthogy erre a III. 1. §. I., II. és III. feltételei teljesülnek, figyelembe véve, hogy $b(y,\lambda)$ megoldása a

$$(\gamma-2)\frac{\partial b}{\partial y} - y\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} - \frac{\partial b}{\partial \lambda} = 0 \qquad (y>0,\ 0<\lambda<\beta_1)$$

parciális differenciálegyenletnek, illetve előállítható a

$$b(y, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(y, \lambda)\, k^{(m)}(y)$$

sor alakjában; ezek a II. 8. §. tételeiből következnek, ott $C_m(y, \lambda)$-t is definiáltuk. — Mindezek gyakorlati alkalmazása ún. *inkorrekt* problémára vezet (l. V. 1. §.), s oda tartozó eszközökkel végezhető el.

E példára III. 2. §.-ában még visszatérünk.

### 1.1.1. Egy speciális eset

A III. 1. §. 1.1. speciális eseteként tekintsük azon

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k, \beta_k) \qquad (0<\beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_N < \Lambda_2)$$

szuperpozíciókat, melyekben

$$\mathbf{F}[f(x, \beta_k);\, t] = \Phi(t)^{\beta_k}$$

és $\beta_k$ az $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ sűrűségfüggvény görbéjének $(\Lambda_2, 0)$ monoton formánsa és $\Phi(t)$ egy karakterisztikus függvény. A

$$b(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k, \beta_k - \lambda) \qquad (0<\lambda<\beta_1)$$

függvényre a III. 1. §. 1.1.-ben felsorolt feltételek közül most teljesül az, hogy $f(y-\alpha_k, \beta_k-\lambda)$ és $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ közt jól definiált, $\alpha_k$ és $\beta_k$-tól független összefüggés áll fenn, mert

$$\mathbf{F}[f(y-\alpha_k, \beta_k-\lambda);\, t] = \frac{1}{\Phi(t)^{\lambda}}\, \mathbf{F}[f(x-\alpha_k, \beta_k);\, t].$$

Így tehát III. 1. §. I. feltétele teljesül. III. 1. §. II. feltétele teljesül, továbbá III. 1. §. III. feltétele is teljesül, mert az előbbi egyenlőség folytán

$$\mathbf{F}[b(y, \lambda);\, t] = \frac{1}{\Phi(t)^{\lambda}}\, \mathbf{F}[k(x);\, t],$$

azaz

$$b(y, \lambda) = \mathbf{F}^{-1}\left[\frac{1}{\Phi(t)^{\lambda}}\, \mathbf{F}[k(x);\, t];\, y\right].$$

Ekkor tehát $b(y, \lambda)$ vehető a $k(x)$ szuperpozícióhoz rendelhető tesztfüggvénynek. Az előzőkből, $\mathbf{F}[f(x, \lambda);\, t] = \Phi(t)^{\lambda}$ folytán,

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y, \lambda) \quad b(y, \lambda)\, dy,$$

vagyis a tesztfüggvényt konvolúciós, *Fredholm*-féle, I. fajú integrálegyenlet megoldása adja (MEDGYESSY *(1954c)*, *(1961a)*, pp. 72—80). — Így gyakorlati előállítása — közismerten — *inkorrekt* probléma, mely az V. 1. §. eszközeivel kezelhető.

PÉLDÁK.

1. Különböző rendű Gamma-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása. Itt

$$k(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{x^{\beta_k - 1} e^{-\frac{x}{B}}}{B^{\beta_k}\Gamma(\beta_k)} & (x > 0) \qquad (0 < \beta_1 < \cdots < \beta_N < A_2) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

($B > 0$ adott), és a $k$-adik komponens karakterisztikus függvénye

$$\mathbf{F}\left[\frac{x^{\beta_k-1} e^{-\frac{x}{B}}}{B^{\beta_k}\Gamma(\beta_k)};\, t\right] = \left(\frac{1}{1 - iBt}\right)^{\beta_k} \qquad (x > 0),$$

$\beta_k$ pedig a $k$-adik komponens $(A_2, 0)$ monoton formánsa (vö. II. 4. §.). A megfelelő tesztfüggvény

$$b(y, \lambda) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{y^{\beta_k - \lambda - 1} e^{-\frac{y}{B}}}{B^{\beta_k - \lambda}\Gamma(\beta_k - \lambda)} & (y > 0) \quad (0 < \lambda < \beta_1). \\ 0 & (y \leqq 0) \end{cases}$$

A formáns-csökkentés módszere alkalmazhatóságának feltételei itt teljesülnek. A tesztfüggvényt a

$$k(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{\lambda-1} e^{-\frac{(x-y)}{B}}}{B^{\lambda}\Gamma(\lambda)}\, b(y, \lambda)\, dy$$

konvolúciós típusú, *Volterra*-féle I. fajú integrálegyenlet megoldása szolgáltatja; ez *inkorrekt* probléma, megoldásának — pl. az ún. regularizációs módszerrel (1. V. 1. §.) — külön irodalma van (ARSZENIN, IVANOV *(1968)*; SCHMAEDEKE *(1968)*).

2. Stabilis sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása. Legyen

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\beta_k^{1/A}} s_{AB}\left(\frac{x - \alpha_k}{\beta_k^{1/A}}\right) \qquad (0 < \beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_N < A_2),$$

ahol $s_{AB}(x)$ $A$ és $B$ paraméterű stabilis sűrűségfüggvény, $(0 < A \leqq 2,\ |B| \leqq 1)$, melyben $B = 0$, ha $A = 1$ (vö. II. 1. §.) — vagyis nem szerepelhet *bármely* stabilis sűrűségfüggvény(MEDGYESSY *(1954b)*). Itt

$$\mathbf{F}\left[\frac{1}{\beta_k^{A}} s_{AB}\left(\frac{x}{\beta_k^{1/A}}\right);\, t\right] = e^{-\beta_k |t|^A \{1 + iB \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, A)\}}$$

$$\left(\omega(t, A) = \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi A}{2} & (A \neq 1) \\ \dfrac{2}{\pi}\log|t| & (A = 1) \end{cases}\right),$$

$\beta_k$ a $k$-adik komponensnek $(A_2, 0)$ monoton formánsa (vö. II. 4. §.). A megfelelő tesztfüggvény

$$b(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{(\beta_k - \lambda)^{1/A}} s_{AB}\left(\frac{x-\alpha_k}{(\beta_k - \lambda)^{1/A}}\right).$$

Mivel a stabilis sűrűségfüggvények egycsúcsúak (vö. II. 1. §.; IBRAGIMOV, CSERNIN *(1959)*; IBRAGIMOV, LINNIK *(1965)* p. 81), a formáns-csökkenés módszere alkalmazhatóságának feltételei itt teljesülnek, ha a III. 1. §. II. feltétele teljesül. *Szimmetrikus* stabilis sűrűségfüggvényekre ez fennáll, egyébként esetenként ellenőrizendő.

$b(y, \lambda)$ megoldása a

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{AB}(x-y, \lambda) b(y, \lambda)\, dy$$

integrálegyenletnek; ismét *inkorrekt* problémába ütközünk (vö. V. 1. §.).

SPECIÁLIS ESETEK:

a) Cauchy-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása. Itt $A=1$ és

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\pi\beta_k} \frac{1}{1+(x-\alpha_k)^2/\beta_k^2}$$

és a tesztfüggvény

$$b(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\pi(\beta_k - \lambda)} \frac{1}{1+(x-\alpha_k)^2/(\beta_k - \lambda)^2} \qquad (0<\lambda<\beta_1).$$

Itt a III. 1. §. II. feltétele nyilván teljesül. $b(y, \lambda)$ megoldása a

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda} \frac{1}{1+(x-y)^2/\lambda^2} b(y, \lambda)\, dy$$

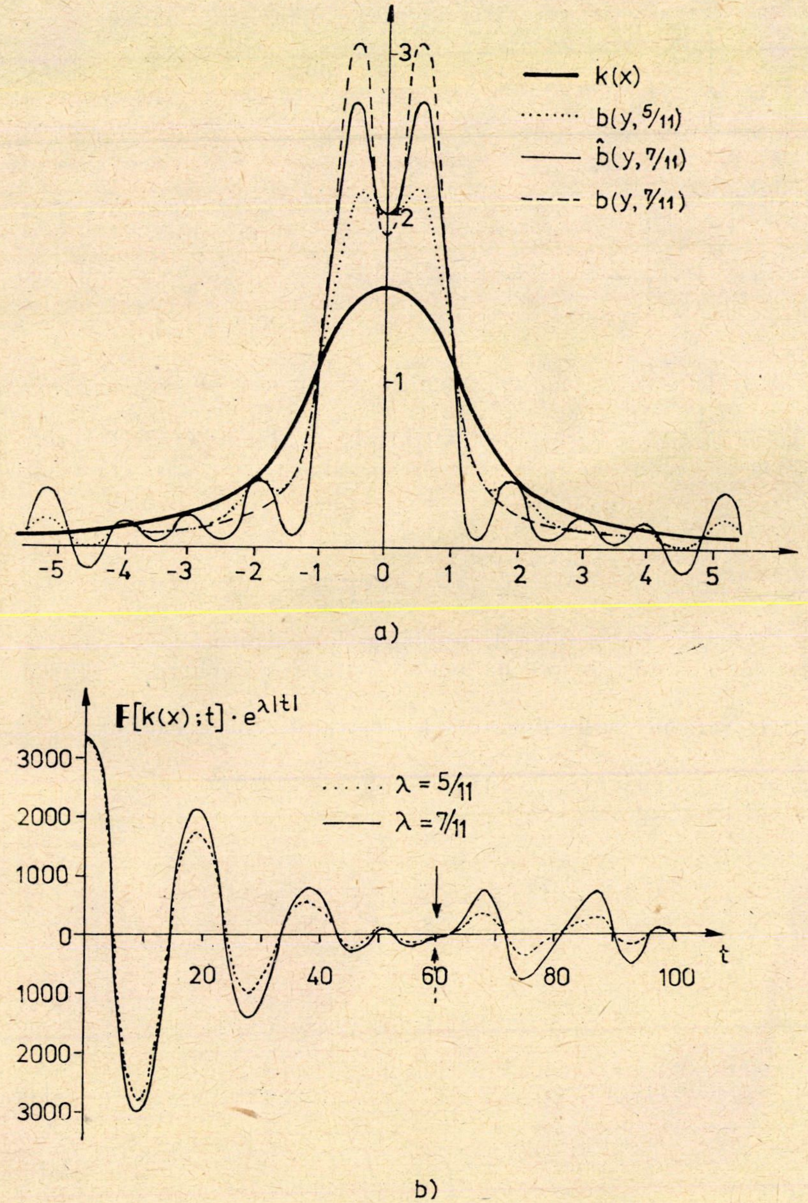
integrálegyenletnek.

PÉLDA. A 19a ábrán (metodológiai példa) a ———— vonal a

$$k(x) = \frac{1}{1+(x-0{,}5)^2} + \frac{1}{1+(x+0{,}5)^2}$$

függvény görbéje. A hozzá tartozó $b(y, \lambda)$ tesztfüggvény görbéje közelítéseit, melyeket V. 2. §-beli módszerrel, 120 „mért" adat alapján kaptunk, $\lambda=7/11$, ill. $\lambda=5/11$ mellett a ———— vonal, ill. a ................ vonal mutatja; — — — — — — — a pontos tesztfüggvény-görbe $\lambda=7/11$ mellett. Jól megmutatkozik a két — eredetileg rejtve maradt — komponens; a numerikus módszer természetesen mellékcsúcsokat is behoz, főleg ahol ténylegesen is kicsi $b(y, \lambda)$ (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

A 19b ábrán $\mathbf{F}[k(x); t]e^{\lambda|t|}$ közelítésének görbéje látható, $\lambda=5/11$, illetve $\lambda=7/11$ esetére (................ ill. ————); az V. 2. §-beli módszer alkalmazásakor szereplő ordinátaértékek, $t$, a trapézformula paramétereinek egységeire stb. nem térünk ki itt. A „levágás" helyét nyíl jelzi. Nagyobb $\lambda$ esetén a függvény a „levágás" helye után jobban ingadozik, mert az $e^{\lambda|t|}$ szorzó a $k(x)$ „hibáiból" eredő függvényértékeket ekkor jobban felnagyítja.




19. ábra

b) Pearson-féle V. típusú sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása. Itt $A=\frac{1}{2}, B=-1$ és

$$k(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{\beta_k}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{\beta_k^2}{(x-\alpha_k)}}}{(x-\alpha_k)^{3/2}} & (x > \min_k \alpha_k) \\ 0 & (x \leqq \min_k \alpha_k) \end{cases} \qquad (0 < \beta_1 \leqq \dots \leqq \beta_N < A_2).$$

A tesztfüggvény

$$b(y, \lambda) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{(\beta_k - \lambda)}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(\beta_k-\lambda)^2}{(x-\alpha_k)}}}{(x-\alpha_k)^{3/2}} & (x > \min_k \alpha_k) \\ 0 & (x \leqq \min_k \alpha_k) \end{cases} \qquad (0 < \lambda < \beta_1).$$

Itt III. 1. §. II. feltétele — mint igazolható — *nem teljesül mindig, mert a komponensek csúcshelyei* $\left(\alpha_k + \beta_k^2/3\ (k=1, \dots, N)\right)$ $\alpha_k$ *és* $\beta_k$*-tól függnek és* $\beta_k$ *csökkentésekor esetleg közeledhetnek is egymáshoz* (MEDGYESSY *(1954c), (1971)*). Ezért a formáns-csökkentés módszere itt esetleg eleve eredménytelen lesz. Ha nem, $b(y, \lambda)$ megoldása a

$$k(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{(x-y)}}}{(x-y)^{3/2}} b(y, \lambda)\, dy$$

konvolúciós típusú, *Volterra*-féle I. fajú integrálegyenletnek.

Az $A=2$, $B$ tetszőleges speciális eset oly fontos, hogy külön pontban tárgyaljuk.

### 1.1.1.1. Normális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása

Normális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása esetében $A=2$, $B$ tetszőleges és

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4\beta_k}}}{\sqrt{4\pi\beta_k}} \qquad (0 < \beta_1 \leqq \dots \leqq \beta_N < A_2).$$

A tesztfüggvény

$$b(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4(\beta_k-\lambda)}}}{\sqrt{4\pi(\beta_k-\lambda)}} \qquad (0 < \lambda < \beta_1).$$

Itt a formáns-csökkentés módszere előfeltételei nyilván teljesülnek (SEN *(1922)*; DOETSCH *(1928), (1936)*; MEDGYESSY *(1953)*). A tesztfüggvény megoldása a

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} b(y, \lambda)\, dy$$

integrálegyenletnek, melynek numerikus megoldása általában *inkorrekt* probléma, de elvégezhető egyes, V. fejezetbeli módszerekkel.

Egyik ilyen numerikus megoldásmódszer (V. 3. §.) alapja az, hogy

$$b(y, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\nu}{\nu!} k^{(2\nu)}(y).$$

Fontos tény, hogy a megoldás erre támaszkodó előállítása már *nem inkorrekt* probléma; $b(y, \lambda)$ előállítható közelítőleg

$$\hat{b}(y, \lambda) = \sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda) \hat{k}(y+jh) \qquad (0 < \lambda < \beta_1)$$

alakban, ahol a *csak $\lambda$-tól függő* $c_j^{(m)}(\lambda)$ konstansok kiszámítását az V. 3. §-ban közöljük; $\hat{k}(y)$ $k(y)$ „mért" értéke, $h$ adott.

$\hat{b}(y, \lambda)$ használata azért is előnyös, mert *lokális* jellegű közelítés, — más módszerek minél nagyobb intervallumból vett $\hat{k}(x)$ értékekre támaszkodnak (MEDGYESSY *(1954b)*, *(1954c)*, *(1955b)*, *(1956)*, *(1961a)* pp. 93—101, *(1966a)*; l. még V. 3. §.).

Integrálegyenletünk megoldása megkísérelhető az V. 2. §-ban leírt mérési hibák kihatását kiszűrő módszerrel is (MEDGYESSY, VARGA *(1968)*), mely lényegében az egyenletben szereplő függvények *Fourier*-transzformáltjai közti

$$\mathbf{F}[b(y, \lambda); t] \cdot \mathbf{F}\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4\lambda}}}{\sqrt{2\pi\lambda}}; t\right] = \mathbf{F}[k(x); t]$$

összefüggésen alapszik.

Tulajdonképpen a *Fourier*-transzformáltak ezen összefüggésén alapult és az előbbivel sokban rokon a $b(y, \lambda)$ tesztfüggvény közelítésének *Fourier*-sorba fejtés, majd *Fourier*-szintézis által való előállítása (DOETSCH *(1928)*, *(1936)*; MEDGYESSY *(1953)*, *(1954b)*, *(1954c)*, *(1955b)*, *(1957)*, *(1961a)* pp. 84—86). Az utóbbi munkákban pl. egy oly hosszú $(0, l)$ intervallumot tekintenek, melyen kívül $k(x)$ és $b(x, \lambda)$ feltehetően igen kicsi. Legyen

$$k_1(x) = \begin{cases} k(x) & (0 < x \leqq l) \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$b_1(x, \lambda) = \begin{cases} b(x, \lambda) & (0 < x \leqq l) \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

folytassuk mindkettőt $(-l, 0)$-n párosan, majd fejtsük *Fourier* cosinus-sorba. Ekkor

$$k_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \frac{\nu\pi x}{l} \qquad (0 < x \leqq l),$$

$$b_1(x, \lambda) = \frac{b_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \cos \frac{\nu\pi x}{l},$$

$$\left(a_\nu = \frac{2}{l} \int_0^l k_1(x) \cos \frac{\nu\pi x}{l} dx, \quad b_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^l b_1(x, \lambda) \cos \frac{\nu\pi x}{l} dx \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)\right).$$

Ha (0, $l$) az említett, $a_\nu \approx \frac{2}{l} \operatorname{Re} \mathbf{F}\left[k(x); \frac{\nu\pi}{l}\right]$, $b_\nu \approx \frac{2}{l} \operatorname{Re} \mathbf{F}\left[b(x, \lambda); \frac{\nu\pi}{l}\right]$,

és

$$\mathbf{F}\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}}; t\right] = e^{-\lambda t^2},$$

vagyis

$$b_\nu \approx e^{-\frac{\lambda\nu^2\pi^2}{l^2}} a_\nu$$

és

$$b(y, \lambda) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{M} e^{-\frac{\lambda\nu^2\pi^2}{l^2}} a_\nu \cos\frac{\nu\pi}{l} y \qquad (0 < y \leqq l)$$

($M$ adott egész szám); ez a *Fourier*-szintézissel adott közelítés numerikusan vagy *Fourier*-analizátorral kiszámított $a_\nu$ együtthatók esetében is használható.

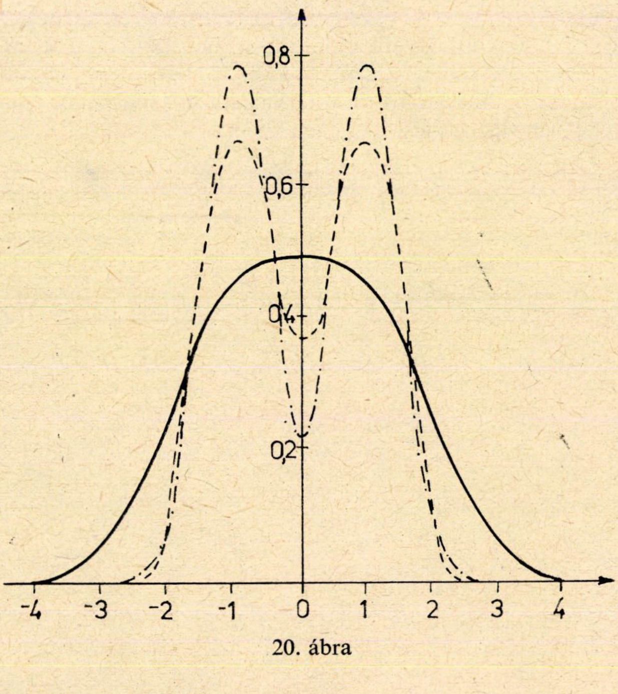
PÉLDÁK

1. Legyen

$$k(x) = \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

görbéje a 20. ábrán a ——————— vonallal ábrázolva. A — — — — $\hat{b}(y, \lambda)$ görbéje $\lambda = 3/8$ mellett, a

$$\hat{b}(y, \lambda) = \sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\, \hat{b}(y + jh)$$




20. ábra

képlettel kiszámítva, $m=3$-mal; jól mutatja a két komponenst. —·—·— az egzakt tesztfüggvény,

$$b(y, 3/8) = \frac{2e^{-2(x-1)^2}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2e^{-2(x+1)^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

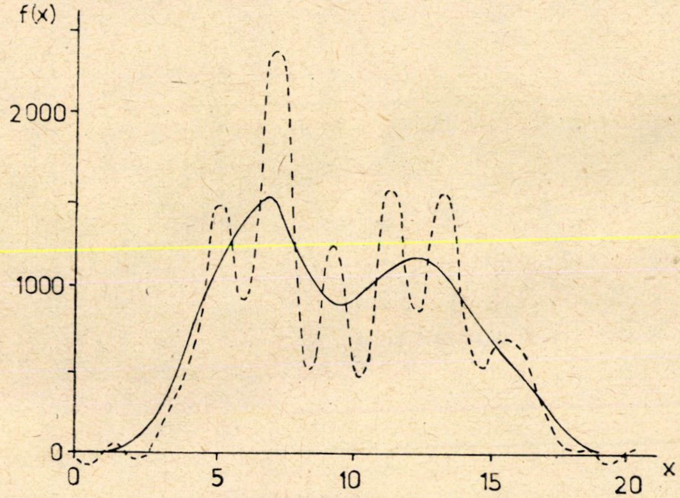
görbéje, összehasonlításul. (MEDGYESSY *(1953)*, *(1954c)*, *(1961a)* pp. 90—101.)

2. Legyen

$$k(x) = 1000\,e^{-\frac{(x-5)^2}{4}} + 1000\,e^{-\frac{(x-7)^2}{2}} + 500\,e^{-\frac{(x-8{,}75)^2}{2}} +$$

$$+1000\,e^{-\frac{(x-11{,}25)^2}{4}} + 500\,e^{-\frac{(x-13{,}25)^2}{2}} + 500\,e^{-\frac{(x-15{,}25)^2}{4}};$$

görbéje — mesterséges, független, azonos egyenletes eloszlásfüggvényű véletlen hibákkal eltorzítva — a 21. ábrán a ———————— vonallal megrajzolva. — — — —



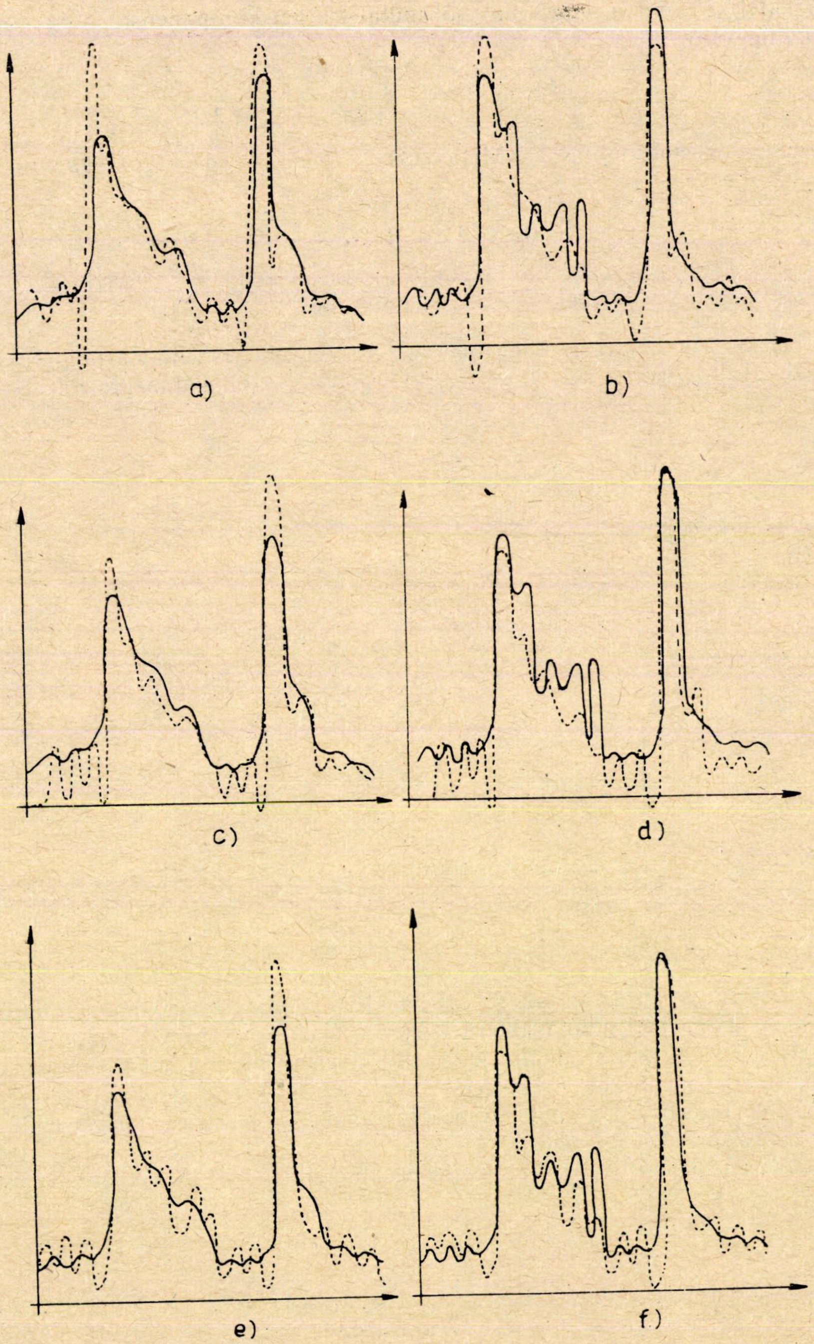

21. ábra

$\hat{b}(y, \lambda)$ görbéjét ábrázolja az V. 2. §-ban leírt módszerrel 80,,mért" adatból kiszámítva, $\lambda=3/8$ mellett, a hibával terhelt $k(x)$ értékek „spektrumát" bizonyos pontoknál levágva („levágó szűrő" alkalmazása). Jól kivehető mind a hat komponens; a hibaanalízist stb. mellőzzük (MEDGYESSY, VARGA *(1968)*).

3. $k(x)$ görbéje legyen Fe ívspektrumának egy részlete, amelyet a 22. ábra a), c) és e) részábráin (vö. I. fejezet) a ———————— vonal szemléltet. A .............. vonallal rajzolt görbe $\hat{b}(y, \lambda)$ görbéjét ábrázolja $\lambda=0{,}45$ mellett, a) esetében a

$$\hat{b}(y, \lambda) = \sum_{j=-3}^{3} c_j^{(3)}(\lambda)\hat{k}(x+jh)$$

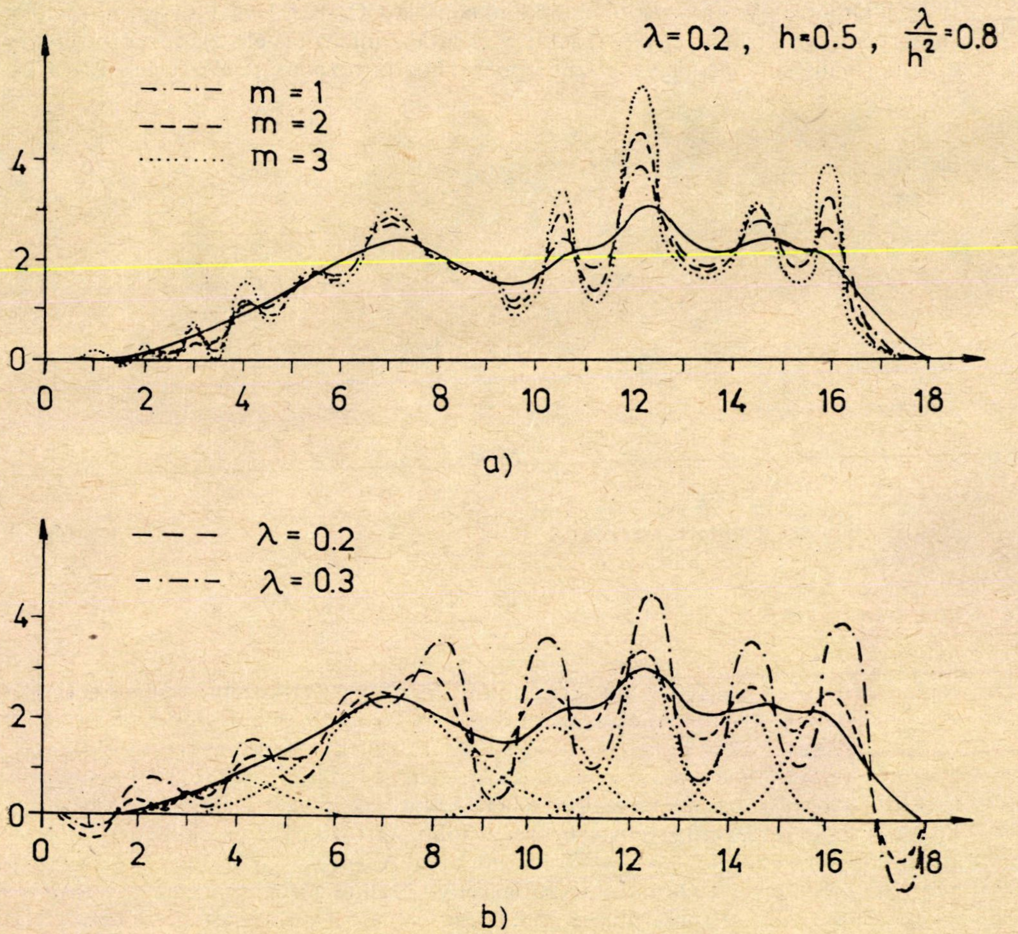
képlettel számítva ki, c) esetében az V. 2. §. módszerével („levágó szűrő" alkalmazásával, 60 equidistans $\hat{k}(x)$-érték és a trapéz-formula segítségével), e) esetében a *Fourier*-sorba fejtés, ill. *Fourier*-szintézis alkalmazásával (BERENCZ *(1955a)*, *(1955b)*).




22. ábra

A b), d) és f) részábrákon a ———————— vonalú görbe mutatja ugyanazon spektrum sokkal nagyobb felbontóképességű műszerrel kapott felvételét, ............... pedig a bal oldali ábrákon bemutatott tesztfüggvénygörbe-közelítéseket, összehasonlításul. Számos, a kiindulási felvételen rejtve maradt csúcs megmutatkozik a tesztfüggvényközelítés görbéjében is — nem tekintve, persze, a mindig áttekinthetetlen széleket —, a legjobban az f) részábrán, valószínűleg azért, mert az ezt szolgáltató eljárás *Fourier*-együtthatóit — *Mader-Ott*-analizátorral — a 33.-ig kiszámították, ill. felhasználták, amivel több kiindulási „információt" dolgoztak fel, mint az aránylag nem sok „mért" görbeértékre támaszkodó első két eljárás. Persze az utóbbiak is támaszkodhatnak több adatra. — Mindenesetre mondhatjuk, hogy *a felbontási eljárás sokban pótolhatja nagyobb felbontóképességű műszer használatát.*

4. $k(x)$ görbéje legyen emberi vérszérum-elektroforézis *Tiselius*-féle készülékkel nyert grafikonja (vö. I. fejezet); a 23. ábrán a ———————— vonallal rajzoltuk



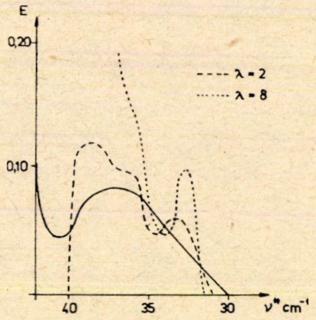

23. ábra

meg e görbét. (MEDGYESSY *(1953)*). Az a) részábrán a

$$\hat{b}(y, \lambda) = \sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\hat{k}(y+jh)$$

képlettel nyert tesztfüggvény-közelítés görbéi láthatók, $\lambda=0{,}2$, $h=0{,}5$ mellett, $m=1$ esetén a —·—·—·—, $m=2$ mellett a — — — — — — —, $m=3$ mellett pedig a ............... vonalakkal felrajzolva (MEDGYESSY *(1966a)*). A b) részábrán a tesztfüggvény-közelítés *Fourier*-sorfejtés, ill. *Fourier*-szintézissel nyert görbéjét $\lambda=0{,}2$ mellett a — — — — — — — vonallal, $\lambda=0{,}3$ mellett pedig a —·—·—·—, vonallal ábrázoltuk, 18 *Fourier*-együttható alkalmazásával, melyeket *Mader-Ott*-analizátorral számítottunk ki (MEDGYESSY *(1952)*, *(1954c)*). — A feltételezett komponens *Gauss*-függvénygörbék is fel vannak rajzolva, a III. 3. §. A) 3. alatt leírt eljárás segítségével.

5) DOBOZY, VOLLY *(1970)* munkájukban $Na_2CO_3$-ban levő L-cystin ultraviolet abszorpciós spektruma egy szakaszát vizsgálták, intenzitás-eloszlása görbéjét egy $k(x)$ normális sűrűségfüggvény-szuperpozícióhoz tartozónak tételezve fel. Ezt a 24.



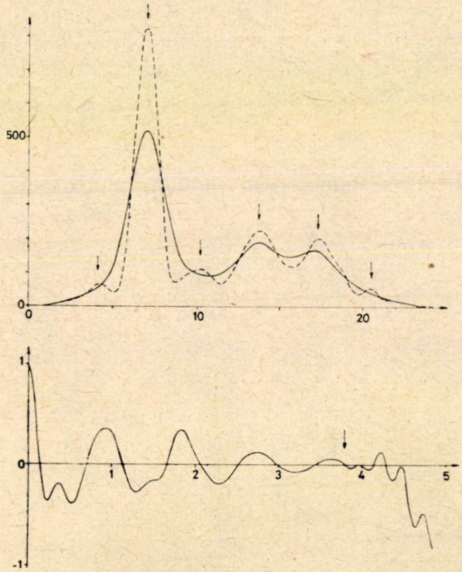

24. ábra

ábrán, mely az említett szerzőktől való, a ———————— vonal mutatja. A

$$\hat{b}(y, \lambda) = \sum_{j=-m}^{m} c_j^{(m)}(\lambda)\hat{k}(x+jh)$$

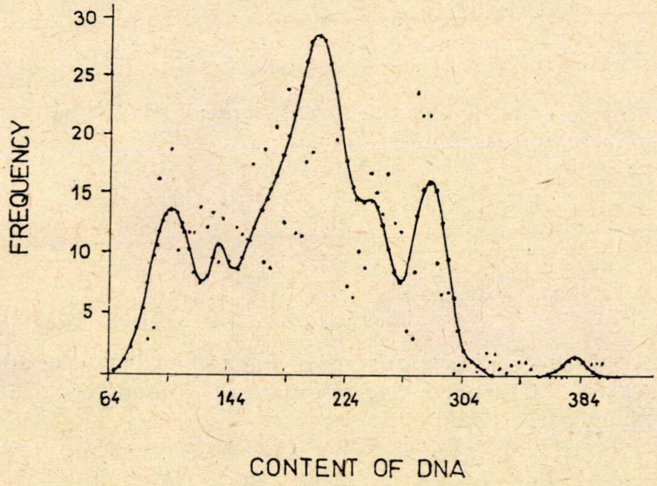
képlettel $h=0{,}5$, $m=2$ mellett kiszámított tesztfüggvény-közelítés görbéje ($\lambda=2$: — — — —, $\lambda=8$: ........) alátámasztotta a spektrum finomabb szerkezetére vonatkozó feltevéseket (két komponens jelenléte; részletek: MEDGYESSY *(1971d)*).

6. VARGA (1968) alacsony hőmérsékleten előállított fluoreszcenciasugárzás spektruma egy szakaszát vizsgálta; feltette, hogy az intenzitáseloszlás görbéje egy $k(x)$ normális sűrűségfüggvény-szuperpozícióhoz tartozik. Ezt az említett munkából átvett 25a ábrán a ———————— vonal mutatja. A — — — — — vonal az V. 2. §-ban leírt módszerrel kiszámított tesztfüggvény-közelítés görbéje; a hibával terhelt értékek $e^{\lambda t^2}$-tel szorzott spektruma a 25b. ábrán látható; a ↓ a „levágás" helye. Hat komponens mutatkozik; realitásukat a kísérleti háttér alátámasztotta.




25. ábra

7. A *Fourier*-sorfejtés, illetve *Fourier*-szintézisen alapuló tesztfüggvény-előállítási módszer is talál még alkalmazást jelenleg. GREGOR *(1969)* patkányok májsejtjei magja DNS-tartalmára vonatkozó mérések hisztogramjai felbontását végezte el ezzel a módszerrel, normális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának tételezve fel azokat. Egy bizonyos kísérletnek alávetett állatokból álló *mintára* vonatkozó, az említett cikkből vett 26. ábrán a ·········-ok a kiindulási adatokat mutatja, a ———




26. ábra

pedig az ezekből bizonyos simítási eljárás után a leírt módon nyert tesztfüggvény görbéjét. Az eredményből biológiailag értékelhető adatokat olvashatott ki. — Dolgozatában algoritmust is közölt az eljáráshoz, ALGOL—60 programnyelven (részletek: MEDGYESSY *(1971d)*).

## 2. Az $\mathscr{A}$-módszer második speciális esete

### 2.1. A tesztfüggvény első típusa

Legyen a III. 1. §-ban szereplő

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k, \beta_k) \qquad (0<\beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_N < \Lambda_2)$$

szuperpozíció olyan, hogy $\mathbf{F}[f(x, \beta_k); t] = \varphi(t, \beta_k)$-ra $(k=1, \ldots, N)$ fennáll:

1. $\varphi(t, 0) = 1$, 2. $\varphi(t, \beta_k)$ egy korlátlanul osztható sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye; 3.

$$\frac{\varphi(t, \beta_k)}{\varphi(t, \lambda)} \qquad (0 \leqq \lambda < \beta_1) \quad -$$

egy $f^*(y, \beta_k, \lambda)$ korlátlanul osztható, szigorúan egycsúcsú sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye, ahol $\lambda$ az $f^*(y, \beta_k, \lambda)$ sűrűségfüggvény görbéjének $(0, \beta_k)$ monoton formánsa.

Tekintsük a

$$b(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k f^*(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)$$

függvényt. Erre a III. 1. §. I. feltétele teljesül a jelen feltevések folytán, mert $f^*(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)$ $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltjának tekinthető és $f^*(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)$ és $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ közt fennáll az $\alpha_k, \beta_k$-tól független

$$\mathbf{F}[f^*(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda); t] = \frac{1}{\varphi(t, \lambda)} \mathbf{F}[f(x-\alpha_k, \beta_k); t]$$

összefüggés. III. 1. §. II. feltétele teljesülését *fel kell tenni.* III. 1. §. III. feltétele azonban teljesül, mert az előbbi egyenlőség folytán

$$\mathbf{F}[b(y, \lambda); t] = \frac{1}{\varphi(t, \lambda)} \mathbf{F}[k(x); t],$$

azaz

$$b(y, \lambda) = \mathbf{F}^{-1}\left[\frac{1}{\varphi(t, \lambda)} \mathbf{F}[k(x); t]; y\right].$$

Így tehát $b(y, \lambda)$ vehető a $k(x)$ szuperpozícióhoz rendelhető tesztfüggvénynek. A III. 1. §-beli A), B) és C) lépések elvégzése után az $\mathscr{A}$-módszer itt alkalmazható, figyelembe véve, hogy az előzőkből

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y, \lambda) \quad b(y, \lambda)\, dy.$$

vagyis a tesztfüggvényt e konvolúciós típusú, *Fredholm*-féle I. fajú integrálegyenlet megoldása adja (MEDGYESSY *(1961a)* pp. 58—63.) és ennek folytán gyakorlati előállítása *inkorrekt* probléma, mely az V. 1. §. eszközeivel kezelhető.

Világos, hogy a III. 1. §. 1.1.1. tárgya az előzők alesetének is felfogható; az ottani tárgyalásmód azonban egyszerűbbnek látszott.

PÉLDA.

ch-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása. Legyen

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{2\beta_k \operatorname{ch}[\pi(x-\alpha_k)/2\beta_k]} \qquad (0<\beta_1 \leqq \dots \leqq \beta_N < \Lambda_2).$$

A komponensek nyilván szigorúan egycsúcsúak. Itt

$$\mathbf{F}\left[\frac{1}{2\beta_k \operatorname{ch}(\pi x/2\beta_k)}; t\right] = \frac{1}{\operatorname{ch}\beta_k t}$$

és a fenti 1.—3. feltételek teljesülnek (vö. II. 8. §. 1.), mert ez, valamint $\dfrac{\operatorname{ch}\lambda t}{\operatorname{ch}\beta_k t}$ $(0 \leqq \lambda < \beta_1)$ korlátlanul osztható sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye (MEDGYESSY *(1961a)* p. 64). A II. 4. §. 3. példájában láttuk, hogy

$$\mathbf{F}^{-1}\left[\frac{\operatorname{ch}\lambda t}{\operatorname{ch}\beta_k t}; x\right] = \frac{1}{\beta_k} \frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi x}{2\beta_k} \cdot \cos\dfrac{\pi\lambda}{2\beta_k}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi x}{\beta_k} + \cos\dfrac{\pi\lambda}{\beta_k}}$$

szigorúan (0) egycsúcsú és görbéjének $\lambda$ $(0,\beta)$ monoton formánsa. Így tehát ez $\dfrac{1}{2\beta_k \operatorname{ch}[\pi(x-\alpha_k)/2\beta_k]}$ egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltjának vehető. Ezen függvények csúcshely-távolságai ugyanazok, mint a felbontandó szuperpozíció komponensei csúcshelyeinek távolságai étt.; végül is azt kapjuk, hogy a fenti eredmények alkalmazhatók és a tesztfüggvény

$$b(y,\lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\beta_k} \frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x-\alpha_k)}{2\beta_k} \cdot \cos\dfrac{\pi\lambda}{2\beta_k}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x-\alpha_k)}{\beta_k} + \cos\dfrac{\pi\lambda}{\beta_k}} \qquad (0<\lambda<\beta_1)$$

amely megoldása a

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\lambda \operatorname{ch}[\pi(x-y)/2\lambda]} b(y,\lambda)\, dy$$

integrálegyenletnek $\left(\mathbf{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{\operatorname{ch}\lambda t}; x\right] = \dfrac{1}{2\lambda \operatorname{ch}(\pi x/2\lambda)}\right)$.

A regularizációs módszerrel stb. való megoldásra (vö. V. 1. §.) itt nem térünk ki.

### 2.2. A tesztfüggvény második típusa

A 2.1.-ben bevezetett tesztfüggvénynek hátránya, hogy I. fajú *Fredholm*-féle, konvolúciós integrálegyenlet megoldásaként kapjuk és így explicit előállítása *inkorrekt* probléma.

A jelen pontban a 2.1.-beli szuperpozíció felbontásához bizonyos esetben egy *másik tesztfüggvényt* értelmezünk. E tesztfüggvény azonban konvolúciós transzformációval állítható elő a felbontandó szuperpozícióból; a probléma tehát *korrekt* (MEDGYESSY *(1967a)*; az alapötletet illetőleg vö. KREISEL *(1949)*).

Tekintsük ismét a 2.1.-beli

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k, \beta_k) \qquad (0<\beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_N < \Lambda_2)$$

szuperpozíciót. Csak azt az esetet vizsgáljuk, amidőn $f(x, \beta_k)$ (0) *egycsúcsú* ($A_1$) *sűrűségfüggvény*, melynek létezik várható értéke.

Most is álljon fenn $\mathbf{F}[f(x, \beta_k); t] = \varphi(t, \beta_k)$-re $(k=1, ..., N)$

1. $\varphi(t, 0)=1$; 2. $\varphi(t, \beta_k)$ korlátlanul osztható sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye; ez utóbbi most nyilván (0) szimmetrikus (0) egycsúcsú is; 3. $\dfrac{\varphi(t, \beta_k)}{\varphi(t, \lambda)}$ $(0 \leqq \lambda < \beta_1)$ egy $f^*(y, \beta_k, \lambda)$ korlátlanul osztható, szigorúan egycsúcsú sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye; ez most nyilván (0) szimmetrikus és így (0) egycsúcsú is. A fentiekből következik, hogy várható értéke létezik.

Tekintsük most a

$$b_1(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k h(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)$$

függvényt, melyben

$$h(y, \beta_k, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x, \beta_k, \lambda) A(y-x, \varepsilon)\, dx,$$

ahol $A(x, \varepsilon)$ $(0<\varepsilon<E_2)$ egy (0) szimmetrikus *Pólya*-féle sűrűségfüggvény (vö. II. 1. §.), melyre tetszőleges $\omega>0$, $\xi>0$ mellett fennáll $\int_{-\infty}^{-\xi} A(x, \varepsilon)dx < \omega A(-\xi, \varepsilon)$, ha $\xi$ egy $\xi_\omega$ küszöbszámnál nagyobb, és amelynek $\varepsilon$ $(E_2, 0)$ monoton formánsa. Mivel a *Pólya*-féle sűrűségfüggvények szigorúan egycsúcsúak (II. 1. §. 10. tétel), $h(y, \beta_k, \lambda)$ a II. 1. §. 4. tétele folytán (0) szimmetrikus és (0) egycsúcsú. A *Kiegészítések és problémák* II. 4. §-*hoz* 1. tétele folytán $\lambda$ $h(y, \beta_k, \lambda)$-nak is $(0, \beta_k)$ monoton formánsa, mert ez azzal ekvivalens, hogy ha $\lambda_i < \lambda_j < \beta_k$, akkor $\mathscr{G}h(y, \beta_k, \lambda_j) \prec \mathscr{G}h(y, \beta_k, \lambda_i)$, ami az idézett tételből már következik, miután feltevés szerint $\mathscr{G}f^*(y, \beta_k, \lambda_j) \prec \mathscr{G}f^*(y, \beta_k, \lambda_i)$. Más szóval, ha $\lambda \downarrow \beta_k$, $h(y, \beta_k, \lambda)$ görbéje egyre keskenyebb lesz. Mindebből az következik, hogy $b_1(y, \lambda)$ komponensei $(\alpha_k)$ szimmetrikusak, $(\alpha_k)$ egycsúcsúak és $\lambda$ a $k$-adiknak $(0, \beta_k)$ monoton formánsa — vagyis *mindnek* $(0, \beta_1)$ monoton formánsa. $b_1(y, \lambda)$-ra III. 1. §. I. feltétele teljesül, mert az előbbiek folytán $h(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)$ $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltjának tekinthető és $h(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)$ és $f(x-\alpha_k, \beta_k)$ közt fennáll az $\alpha_k, \beta_k$-tól független

$$\mathbf{F}[h(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda); t] = \frac{\alpha(t, \varepsilon)}{\varphi(t, \lambda)} \mathbf{F}[f(x-\alpha_k, \beta_k); t]$$

összefüggés, ahol $\alpha(t, \varepsilon)=\mathbf{F}[A(x, \varepsilon); t]$. III. 1. §. II. feltétele is teljesül, III. 1. §. III. feltétele szintén, mert az előbbi egyenlőség folytán

$$\mathbf{F}[b_1(y, \lambda); t] = \frac{\alpha(t, \varepsilon)}{\varphi(t, \lambda)} \mathbf{F}[k(x); t]$$

vagyis

$$b_1(y, \lambda) = \mathbf{F}^{-1}\left[\frac{\alpha(t, \varepsilon)}{\varphi(t, \lambda)} \mathbf{F}[k(x); t]; y\right].$$

Így tehát $b_1(y, \lambda)$ vehető a $k(x)$ szuperpozícióhoz rendelhető tesztfüggvénynek.

*Legyen most $A(x, \varepsilon)$, ill. $\alpha(t, \varepsilon)$ olyan típusú, hogy* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\alpha(t, \varepsilon)}{\varphi(t, \lambda)}\right| dt < \infty$; *ekkor* $\frac{\alpha(t, \varepsilon)}{\varphi(t, \lambda)}$ *felírható mint egy $M(x, \lambda, \varepsilon)$ függvény Fourier-transzformáltja;*

$\mathbf{F}[M(x, \lambda, \varepsilon); t] = \frac{\alpha(t, \varepsilon)}{\varphi(t, \lambda)}$, $M(x, 0, \varepsilon)=A(x, \varepsilon)$ (($M(x, \lambda, \varepsilon)$ *nem* sűrűségfüggvény).

Ekkor azonban

$$h(y, \beta_k, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(y-x, \lambda, \varepsilon) f(x, \beta_k)\, dx,$$

következésképp ez esetben a tesztfüggvény

$$b_1(y, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(y-x, \lambda, \varepsilon)\, k(x)\, dx \quad (0<\lambda<\beta_1),$$

amiből $b_1(y, \lambda)$ $k(x)$ ekkor érvényes összefüggése már látható.

*Ez esetben tehát a tesztfüggvényt konvolúciós transzformációval számíthatjuk ki;* ez *korrekt* probléma, numerikus kezelést is megenged, s az $\mathscr{A}$-módszer alkalmazható.

Az előbbiekből látható, hogy még $\lambda=\beta_1$ esetén sem lesz $b_1(y, \lambda)$ $\beta_1$-es komponense görbéjéből „tű", hanem $A(x-\alpha_1, \varepsilon)$; ennek görbéje azonban kis $\varepsilon$ mellett keskeny csúcs, ami a tesztfüggvénygörbe összképét kevéssé zavarja. A többi komponenset is csak kevéssé teszi szélesebb görbéjűvé az eljárás. Ezt a hátrányt ellensúlyozza, hogy nem kell integrálegyenletet megoldani és így a mérési hibák is kevésbé zavarják az eljárást. *Ezért különös fontosságot tulajdoníthatunk ennek a módszernek.*

Ha $\varphi(t, \beta_k)=e^{-\beta_k|t|^A}$ $(0<A<2)$, azaz szimmetrikus stabilis sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye, $\alpha(t, \varepsilon)=e^{-\varepsilon t^2}$ eleget tesz a feltételeknek, figyelembe véve, hogy ekkor $A(x, \varepsilon) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}$ és $\int\limits_{-\infty}^{-\xi} A(x, \varepsilon) dx < \omega A(-\xi, \varepsilon)$ $(\omega>0,\ \xi>0$ és elég nagy), mert egy ismert egyenlőtlenség alapján

$$\int\limits_{-\infty}^{-\xi} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\, dx < \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}\, \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\varepsilon}}}{\xi} < \omega \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}},$$

hogyha $\xi > \frac{2\varepsilon}{\omega}$.

$\varphi(t, \beta_k) = e^{-\beta_k t^2}$ esetében $\alpha(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t^2}$ már nem jó.

Egyes esetekben $M(x, \lambda, \varepsilon)$ csak soralakban adható meg, de ez $b_1(y, \lambda)$ numerikus kiszámításakor nem hátrány.

PÉLDÁK.

1. ch-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása. Legyen ismét

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{2\beta_k \operatorname{ch}[\pi(x-\alpha_k)/2\beta_k]} \qquad (0 < \beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_N < A_2).$$

Itt $\varphi(t, \beta_k) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} \beta_k t}$. Legyen $\alpha(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t^2}$ $(0 < \varepsilon < E_2)$; ez eleget tesz az $\alpha(t, \varepsilon)$-ra tett összes feltételeknek, emellett $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\alpha(t, \varepsilon)}{\varphi(t, \lambda)} \right| dt < \infty$ $\quad (0 < \lambda < \beta_1)$. Itt

$$M(x, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \operatorname{ch} \lambda t \cdot e^{-\varepsilon t^2} dt = e^{\frac{\lambda^2}{4\varepsilon}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \cos \frac{\lambda x}{2\varepsilon}.$$

A fentiek szerint a tesztfüggvény

$$b_1(y, \lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{4\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \cos \frac{\lambda(y-x)}{2\varepsilon} \cdot k(x)\, dx.$$

$\lambda$ $(0, \beta_1)$ monoton formánsa a tesztfüggvény komponenseinek (MEDGYESSY *(1967a)*).

A $b_1(y, \lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} M(y-x, \lambda, \varepsilon)\, k(x) dx$ összefüggés folytán a jelen esetben $b_1(y, \lambda)$ numerikus közelítése is megadható az V. 4. §. 2. módszerével, az igen kényelmes

$$b_1^*(y, \lambda) = \sum_{j=-m}^{m} W_j^{(m)}(\lambda) \hat{k}(x + jh)$$

alakban, ahol $\hat{k}(x)$ $k(x)$ „mért" értéke, $h$, $m = 1, 2, \ldots$ adott és

$$W_j^{(m)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} B_{j,k}^{(m)} (-1)^k \frac{m_{2k}}{h^{2k}}$$

($m_{2k}$ $M(x, \lambda, \varepsilon)$ $2k$-adik kezdeti momentuma, a $B_{j,k}^{(m)}$-ek pedig az V. 3. §-ban szereplő — táblázatba is foglalt — számértékek). *$m_{2k}$ esetünkben $M(x, \lambda, \varepsilon)$ Fourier-transzformáltjával is kiszámítható;* néhány érték:

$$m_0 = 1; \quad m_2 = -\lambda^2 + 2\varepsilon; \quad m_4 = \lambda^4 + 12\varepsilon^2 - 12\lambda^2\varepsilon;$$
$$m_6 = -\lambda^6 + 30\varepsilon\lambda^4 - 180\varepsilon^2\lambda^2 + 120\varepsilon^3.$$

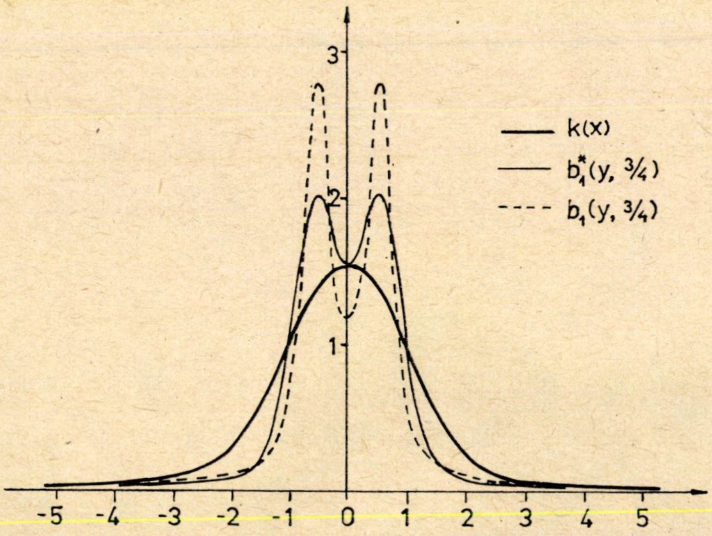
$\lambda$, $\varepsilon$, $h$ megválasztása után tehát $W_j^{(m)}(\lambda)$ — vagyis a $b_1^*(y, \lambda)$ közelítés konkrét alakja — már felírható. — E közelítés hibájával nem foglalkozunk.

A $b_1(y, \lambda)$ tesztfüggvényt szolgáltató konvolúciós integrál az V. 4. §. 1.-ben leírt módszerrel is kiszámítható numerikusan, ha elég sok $\hat{k}(x)$ érték áll rendelkezésükre.

*Metodológiai példaként* tekintsük a

$$k(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}[\pi(x-0{,}5)/2]} + \frac{1}{\operatorname{ch}[\pi(x+0{,}5)/2]}$$

ch-sűrűségfüggvény szuperpozíciót. Görbéje egycsúcsú; a 27. ábrán a ——— vonallal ábrázoltuk. A fent leírt módon megszerkesztettük hozzá a tesztfüggvény $b_1^*(y, \lambda)$ közelítését, $\lambda=3/4$, $\varepsilon=1/64$, $m=2$, $h=0{,}3$ mellett; $\hat{k}(x)$ értékeit $k(x)$ táblázatból kiszámított értékeiből csupán 3 tizedesjegyet megtartva kaptuk; ezt a ———




27. ábra

vonallal rajzolt görbe mutatja. A — — — vonallal rajzolt görbe a pontos tesztfüggvény,

$$b_1(y, \lambda) = 2\frac{\operatorname{ch}[\pi(x-0{,}5)/2]\cdot\cos(0{,}75\pi/2)}{\operatorname{ch}\pi(x-0{,}5)+\cos 0{,}75\pi} + 2\frac{\operatorname{ch}[\pi(x+0{,}5)/2]\cdot\cos(0{,}75\pi/2)}{\operatorname{ch}\pi(x+0{,}5)+\cos 0{,}75\pi}$$

görbéje, összehasonlításul. Elég jól megmutatkozik a két — eredetileg rejtett — komponens.

2. Cauchy-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása. Bár a formáns egyszerű csökkentésénél szerepelt már ez a feladat, az új típusú tesztfüggvényt ehhez is megszerkeszthetjük, mert a jelen szuperpozíció-típusba is beletartozik a *Cauchy*-sűrűségfüggvények szuperpozíciója.

Legyen tehát

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\pi\beta_k}\frac{1}{1+(x-\alpha_k)^2/\beta_k^2} \qquad (0<\beta_1\leqq\cdots\leqq\beta_N<\Lambda_2).$$

Itt $\varphi(t, \beta_k)=e^{-\beta_k|t|}$ és legyen ismét $\alpha(t, \varepsilon)=e^{-\varepsilon t^2}$ $(0<\varepsilon<E_2)$; ez a módszer szempontjából megfelel, ti. itt is $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\alpha(t, \varepsilon)}{\varphi(t, \lambda)}\right| dt<\infty$. Továbbá

$$M(x, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}e^{\lambda|t|}e^{-\varepsilon t^2}\,dt.$$

Egyszerű átalakítással

$$M(x, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \operatorname{ch} \lambda t \cdot e^{-\varepsilon t^2} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{-\lambda|t|} e^{-\varepsilon t^2} dt.$$

Az első integrál az 1. példában szerepelt már; a második pedig egy *Cauchy*- és egy normális sűrűségfüggvény konvolúciója. Explicite:

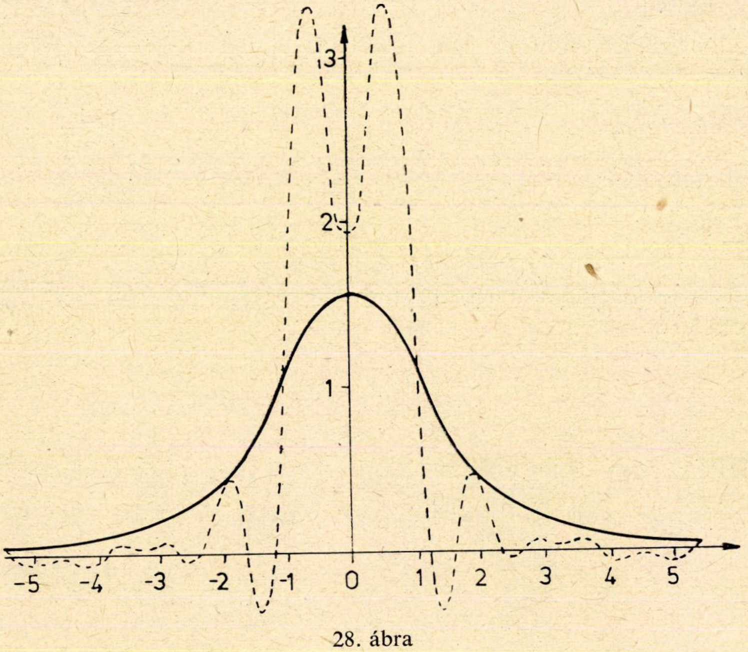
$$M(x, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{\frac{x^2}{4\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \cos \frac{\lambda x}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) e^{-y^2}}{\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}} - y\right)^2} dy.$$

A második integrál

$$\pi \operatorname{Re} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{z-t} dt = \pi \operatorname{Re} e^{-z^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{u^2} du\right)$$

a $z = \pm \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}} + i \frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}$ értéknél (FADDEEVA, TERENT'EV *(1954)* p. 7.). E valós rész, $z = \xi + i\eta$ jelölés mellett, tabellázva van az előbb említett műben, $u(\xi, \eta)$-val jelölve. Végül is

$$M(x, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \left[2e^{\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} \cos 2\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) - u\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\right].$$




28. ábra

A $b_1(y, \lambda)$ tesztfüggvény konvolúciós transzformált-kifejezése $M(x, \lambda, \varepsilon)$ *közvetlen* felhasználásával *numerikusan* csak az V. 4. §. 1. módszerével számítható ki, mivel $M(x, \lambda, \varepsilon)$ momentumai esetünkben nem léteznek; ez *Fourier*-transzformáltjából látható. — E munkában speciális matematikai gépek is felhasználhatók (vö. V. 4. §. 1.). — $M(x, \lambda, \varepsilon)$ általában tabellázandó.

A *Kiegészítések és problémák V. 2. §-hoz* 5. pontjában leírt módon is megkaphatjuk a tesztfüggvény közelítését, numerikusan végrehajtva a $b_1(y, \lambda) = \mathbf{F}^{-1}\left[e^{\lambda|t|-\varepsilon t^2}\mathbf{F}[k(x); t]; y\right]$ összefüggésnek megfelelő lépéseket. — Ezen az úton sokszor jobb eredményt kapunk, mint az V. 4. §. 1. módszerével —, ha például $M(x, \lambda, \varepsilon)$ „hirtelen" változik, az utóbbi csak akkor ad elég jó eredményt, ha $k(x)$ és $M(x, \lambda, \varepsilon)$ igen sűrűn elhelyezkedő $x$-pontokhoz tartozó értékeire épült, ami nehézségekbe ütközhet.

*Numerikus példaként* tekintsük ismét a III. 1. §. 1.1.1.-ben vizsgált

$$k(x) = \frac{1}{1+(x-0{,}5)^2} + \frac{1}{1+(x+0{,}5)^2}$$

*Cauchy*-sűrűségfüggvény szuperpozíciót. Görbéje egycsúcsú, a 28. ábrán a ——— vonallal rajzoltuk meg. Az V. 2. §-ban leírt módon megszerkesztettük hozzá a tesztfüggvény közelítését, $\lambda = 3/4$, $\varepsilon = 1/64$ mellett (a numerikus eljárás részleteit mellőzzük); ezt a — — — — vonallal megrajzolt görbe mutatja. A tesztfüggvény-közelítés két csúcsa utal a két komponensre.

## 3. Első típusú szuperpozíciók felbontása a szuperpozíció transzformációja segítségével

Egyes $k(x)$ szuperpozíciók nem bonthatók fel itt közölt módszerekkel. Alkalmas lineáris transzformációval azonban áttranszformálhatók felbontható $k^*(y)$ szuperpozíciókba s felbontásuk megadja a keresett ismeretlen paramétereket (MEDGYESSY *(1961a)* pp. 143—152). Példáinkban e transzformációk numerikusan is megvalósíthatók.

Speciális esetek:

a) Sokszor $k^*(y) = k(M(y))M'(y)$, ahol $M(y)$ szigorúan monoton függvény, már felbontható (MEDGYESSY *(1961a)* pp. 148-149).

PÉLDA. Lognormális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása. Itt

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(\log x-\alpha_k)^2}{4\beta_k}}}{x\sqrt{4\pi\beta_k}} \qquad (x>0; 0<\beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_N < \Lambda_2).$$

Ekkor, $M(y) = e^y$ mellett

$$k^*(y) = k(e^y)e^y = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(y-\alpha_k)^2}{4\beta_k}}}{\sqrt{4\pi\beta_k}},$$

azaz normális sűrűségfüggvények szuperpozíciója, már felbontható.

b) Legyen $k(x)=\sum_{k=1}^{N} p_k v(x,\beta_k)$ $(\Lambda_1<\beta_1<\cdots<\beta_N<\Lambda_2)$, ahol $v(x,\beta_k)$ (0) egycsúcsú sűrűségfüggvény, és legyen a

$$v^*(y+0,\beta_k)=v(y,\beta_k)-yv'(y+0,\beta_k)\quad (y>0)$$

$$v^*(y-0,\beta_k)=v(y,\beta_k)-yv'(y-0,\beta_k)\quad (y\leqq 0)$$

összefüggésekkel értelmezett $v^*(y,\beta_k)$ függvény — mely szintén sűrűségfüggvény (GIRAULT *(1955)*; vö. a II. 1. §. 2. tétele képleteivel is) — egycsúcsú. Sokszor

$$k^*(y)=\sum_{k=1}^{N} p_k v^*(y,\beta_k)$$

már felbontható (MEDGYESSY *(1961a)* pp. 145—146); numerikus eljárás is szóba jöhet.

c) Beta-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása. Legyen

$$k(x)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{x^{\beta_k-1}(1-x)^{q-\beta_k-1}}{B(\beta_k,q-\beta_k)} & (0<x\leqq 1)\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}\quad (0<\beta_1\leqq\cdots\leqq\beta_N<\Lambda_2),$$

$(q-\beta_k>0,\ q$ adott). E szuperpozíció nem bontható fel itt tárgyalt módszerekkel; a

$$k^*(y)=\int_0^1 \frac{y^{q-1}e^{-\frac{y}{x}}}{x^q\Gamma(q)}k(x)\,dx=\begin{cases}\sum_{k=1}^{N} p_k\dfrac{y^{\beta_k-1}e^{-y}}{\Gamma(\beta_k)} & (y>0)\\ 0 & (y\leqq 0)\end{cases}$$

Gamma-sűrűségfüggvény szuperpozíció azonban (vö. III. 1. §. 1.1.1.) felbontható.

Ezekkel és további transzformációkkal részletesen foglalkozik MEDGYESSY *(1961a)* pp. 149—152. — E transzformációk numerikusan is végrehajthatók.

### Kiegészítések és problémák III. 1. §-hoz

1. Az $\mathscr{A}$-módszer alapötlete NIKHILRANJAN SEN-nél található meg, bár dolgozata célja más volt (SEN *(1922)*). DOETSCH *(1928)*, *(1936)* az alapötlet egzakt kidolgozását, MEDGYESSY *(1954b)*, *(1961a)* pedig továbbfejlesztését adta meg.

2. Világos, hogy egy felbontási eljárást megpróbálhatunk felhasználni annak az eldöntésére is, hogy egy adott sűrűségfüggvény *szuperpozíció-e* vagy sem (vö. pl. PEARSON *(1894)*).

3. Ha egy felbontási eljárásban az $N$ komponensszámot már meghatároztuk, a többi paraméter meghatározása *nemlineáris egyenletrendszer* megoldásával vagy illesztési feladattal ekvivalens (vö. III. 3. §.).

4. Ha a felbontási eljárás során egyes komponensek görbéjéből hegyes csúcs lett, ezek grafikusan levonhatók a kiindulási görbéből és a maradékra *újból* alkalmazhatjuk a felbontási eljárást. — Ez azonban munkánkban alig fog szerepelni.

5. Világos, hogy az $\mathscr{A}$-módszer — és a később tárgyalandó egyéb módszerek is — *ismert* $N$ komponens-szám esetén is alkalmazhatók; ekkor az ismeretlen para-

méterek meghatározásának speciális módszereként foghatók fel (BÉKÉSI *(1967)*). A korai vizsgálatokban kizárólag ily értelemben használtak felbontási módszert (SEN *(1922)*).

6. Az 1.1.1. pontban szereplő speciális esethez megadott módszer akkor is alkalmazható, ha csupán a kiindulási szuperpozíció *karakterisztikus függvényének* görbéje ismert. Fizikai, meteorológiai problémákban ez nem ritka.

7. Az 1.1.1. pontbeli módszer — és az $\mathscr{A}$-módszer második speciális esete is — gépiesen *kiterjeszthető* — a feltételek alkalmas módosításával — oly esetekre, amidőn $\varphi(t, \beta_k) = \Phi_1(t)\, \Phi(t)^{\beta_k}$, ahol $\Phi_1(t)$ egy $\beta_k$-tól nem függő függvény — például, ahol a felbontandó szuperpozíció komponensei ezen összefüggésnek megfelelő *konvolúciók*, pl. normális sűrűségfüggvények és valamilyen más, $\beta_k$-t nem tartalmazó sűrűségfüggvény konvolúciói stb. E legutóbbi esetben — de sok más esetben is — az egyes tesztfüggvény-előállítási módszerek is azonnal alkalmazhatók (numerikusan is) tulajdonképp a *Kiegészítések és problémák* II. 8. §-*hoz* 6. felhasználásával. Ilyen esettel találkozunk pl. az asztrofizikában; feltesszük, hogy bizonyos spektrumvonalak intenzitáseloszlása egy normális és egy Cauchy-féle sűrűségfüggvény konvolúciója (a paraméterek részben ismertek). E konvolúciót „Voigt-függvénynek" nevezik (a vele foglalkozó irodalomból l. UNSŐLD *(1955)*, ARMSTRONG *(1967)*). Egy ilyen vonalakból álló spektrum intenzitáseloszlás-görbéje nyilván *Voigt-függvények szuperpozíciója* lesz. Egy vonal intenzitáseloszlását leíró *Voigt*-függvény rekonstrukciója a mért intenzitáseloszlás-görbéből („Entschmierung", „Entzerrung") valamint Voigt-függvények szuperpozíciójának felbontása sokszor előadódik az asztrofizikában; l. például ELSTE *(1953)*; LARSON, KENNETH *(1967)*. — Egy másik ide tartozó eset nyilván az, melyben $\varphi(t, \beta_k)$ valamilyen *Csebüsev-Hermite*-féle kifejtés karakterisztikus függvénye.

8. Egyes stabilis sűrűségfüggvények szuperpozíciói esetében a $b(y, \lambda)$ tesztfüggvény egy *parciális integro-differenciálegyenletnek* is eleget tesz. A II. 8. §. 7. Tételből ugyanis rögtön következik, hogy

$$\frac{\partial b}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2\Gamma(1-A)\cos(\pi A/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B - \operatorname{sgn}(y-\xi)}{|y-\xi|^A} \frac{\partial b}{\partial \xi}\, d\xi \qquad (0 < A < 1),$$

illetve

$$\frac{\partial b}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2\Gamma(2-A)\cos(\pi A/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B \operatorname{sgn}(y-\xi) - 1}{|y-\xi|^{A-1}} \frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2}\, d\xi \qquad (1 < A < 2),$$

$(0 < \lambda < \beta_1)$ (MEDGYESSY *(1958)*; *(1961a)* pp. 101—104, 199—203).

Ennek gyakorlati értékét az idézett munkákban nem vizsgáltuk meg alaposabban; mivel pedig a tesztfüggvény egyszerűbben is megadható, itt sem térünk ki rá.

9. A *Cauchy*-sűrűségfüggvények $k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\pi \beta_k} \frac{1}{1 + (x-\alpha_k)^2/\beta_k}$ szuperpozíciója felbontásakor használt $b(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\pi(\beta_k - \lambda)} \frac{1}{1 + (y-\alpha_k)^2/(\beta_k - \lambda)^2}$ tesztfüggvény nemcsak mint egy integrálegyenlet megadása adható meg; ugyanis

$$\mathbf{F}[b(y, \lambda); t] = \mathbf{F}[k(x); t]\, e^{\lambda|t|} = 2 \operatorname{ch} \lambda t \cdot \mathbf{F}[k(x); t] - e^{-\lambda|t|}\, \mathbf{F}[k(x); t]$$

és

$$k^{(2\nu)}(x) = \frac{(-1)^\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} t^{2\nu} \mathbf{F}[k(x); t] dt$$

felhasználásával

$$b(y, \lambda) = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^\nu}{(2\nu)!} k^{(2\nu)}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda} \frac{1}{1+(x-y)^2/\lambda^2} k(y)\, dy.$$

Konvolúciós integrál jól kezelhető numerikusan; magasabb deriváltak kiszámítása azonban az adathibákra igen érzékeny művelet és így $b(y, \lambda)$ ezen explicit előállítása nem ér sokat a gyakorlatban (MEDGYESSY *(1971)*).

10. A formáns egyszerű csökkentése, mint az $\mathscr{A}$-módszer speciális esete szempontjából *nem lényeges*, hogy a felbontandó szuperpozíció *sűrűségfüggvényekből* álljon. Ennek szemléltetésére tekintsük a

$$k^*(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \sqrt{\frac{\beta_k + \sqrt{\beta_k^2 + x^2}}{2\pi(\beta_k^2 + x^2)}} \qquad (0 < \beta_1 < \cdots < \beta_N < \Lambda_2)$$

„szuperpozíciót". A „komponensek" *nem* sűrűségfüggvények, de

$$\mathbf{F}\left[\sqrt{\frac{\beta_k + \sqrt{\beta_k^2 + x^2}}{2\pi(\beta_k^2 + x^2)}}; t\right] = \frac{e^{-\beta_k|t|}}{\sqrt{|t|}},$$

vagyis — formálisan — a 7.-ben vizsgált típusú és igazolható, hogy $\beta_k \downarrow 0$ esetén a „komponensek" görbéi elkeskenyednek. Ezen analógiák folytán a formáns egyszerű csökkentésének módszere a $k^*(x)$ szuperpozícióra is alkalmazható (MEDGYESSY *(1954c)*).

11. *Normális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása,* — ami a következő pontoknak állandóan tárgya lesz — a leggyakrabban előforduló felbontási feladat. Ma már klasszikusnak tekinthető. Itt leírt alakjában nagyjából 50 évvel ezelőtt SEN *(1922)* cikkében szerepel először. NIKHILRANJAN SEN eredményét DOETSCH *(1928)* cikke egzakttá tette; ehhez csatlakoztak DOETSCH *(1936)* és MEDGYESSY *(1953)* cikkei. G. DOETSCH a felbontási eljárásnak a „Gauss-analízis" nevet adta (DOETSCH *(1936)* p. 312). Az említettek óta számos munka foglalkozott e problémával, többek közt TRICOMI *(1938)*; MEDGYESSY *(1954b)*, *(1955c)*; BERENCZ *(1955a)*, *(1955b)*; MEDGYESSY *(1956)*, *(1957)*, *(1961a)* pp. 80—101, *(1966a)*; VARGA *(1966)*; BHATTACHARYA *(1967)*; MEDGYESSY, VARGA *(1968)*; VARGA *(1968)*; TRICOMI *(1968)*; GREGOR *(1969)*, — mind elméleti, mind gyakorlati szempontból.

A tesztfüggvény I. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenlet megoldásaként DOETSCH *(1928)*, *(1936)* cikkeiben szerepel először.

12. A $k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} b(y, \lambda) dy$ integrálegyenlet — felbontási problémától függetlenül is — sokszor előfordul a legkülönbözőbb vizsgálatokban. Numerkus megoldása — mely sokszor az „Entschmierung"-nak nevezett problémák közt szerepel egyes kísérleti tudományok irodalmában (pl. a spektroszkópiában, amidőn

a mért, „szétkent" („verschmiert") intenzitáseloszlás-görbéből következtetnek egy spektrumvonal intenzitáseloszlás-görbéjének egzakt alakjára) — kényes feladat, mert a matematikai probléma „*inkorrekt*" (vö. V. 1. §). Ezen integrálegyenlet — egzakt, ill. numerikus — megoldásával igen sok munka foglalkozik; többek közt EDDINGTON *(1913)*; DYSON *(1926)*; DOETSCH *(1928)*; SCHULZ *(1934)*; DOETSCH *(1936)*; TRUMPLER *(1951)*; TRUMPLER, WEAVER *(1953)* pp. 101—108; POLLARD *(1953)* ;MEDGYESSY *(1953)*, *(1954b)*; BRACEWELL *(1955)*; MEDGYESSY *(1954c)*, *(1955b)*,*(1957)*, *(1961a)* pp. 80—93; KURTH *(1965)*. Az „*Entschmierung*" feladata *nem*-Gauss-függvény mag esetén is felmerül; l. VAN CITTERT *(1931)*; BURGER ,VAN CITTERT *(1932)*, *(1933)*; VAN DE HULST *(1941)*; KREMER *(1941)*; RIGHINI *(1941)*; VAN DE HULST *(1946)*; STOKES *(1948)*; KEATING, WARREN *(1952)*; ELSTE *(1953)*; TRUMPLER, WEAVER *(1953)*; BRACEWELL *(1955)*; UNSŐLD *(1955)* pp. 252—265; FLYNN, SEYMOUR *(1960)*; MEDGYESSY *(1961a)* pp. 172—188; LARSON, KENNETH *(1967)*; ARMSTRONG *(1967)*.

Mindezek azonban elkerülhetetlenül beleütköztek a probléma *inkorrekt* volta által okozott elvi nehézségekbe. Ezeket csak az újabb módszerek — pl. az ún. *regularizációs módszer* (V. 1. §) — tudták kiküszöbölni.

13. Az „*Entschmierung*"-módszerek — melyek lényegében „*keskenyebbé*" tesznek egy görbét és lineárisak is — közvetlenül alkalmazhatók normális sűrűségfüggvény — szuperpozíciók felbontására. *Meglepő, hogy ezt a felbontási problémákkal (*1922*-től kezdve) foglalkozók nem vették észre, pedig „Entschmierung" már jóval korábban is szerepelt* (l. EDDINGTON *(1913)*).

14. A normális sűrűségfüggvény-szuperpozíciók felbontása tesztfüggvényének $b(y,\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{\nu}}{\nu!}k^{(2\nu)}(y)$ alakja már korábban is fellép (EDDINGTON *(1913)*; POLLARD *(1953)*; MEDGYESSY *(1953)*; BRACEWELL *(1955)*). Közelítését, $\hat{b}(y,\lambda)$-t $b(y,\lambda)$ sora egy szelete deriváltjait numerikus közelítéseikkel helyettesítve — a hibákat azonban nem vizsgálva — már korábban is megkaptuk (MEDGYESSY *(1953)*, *(1954c)*, *(1961a)* pp. 99—101); formálisan az eredmény ugyanaz, mint az V. 3. §-ban közölt, — ahogy ez várható is.

15. A $b(y,\lambda)$ függvény $\hat{b}(y,\lambda)$ közelítése — mint numerikus kísérletek bizonyítják — egyetlen normális sűrűségfüggvény és $\lambda=\beta$ esetén sem ad végtelenbe futó csúcsot, csak megmagasítja az eredetit, viszont kis mellékcsúcsokat hoz be, főleg ott, ahol $k(x)$ már kicsi; ez eltér egy keskenyebb és magasabb normális sűrűségfüggvénygörbétől. Ez végeredményben a numerikus eljárás folyománya és módszerünket nem teszi használhatatlanná, csupán $\beta_1$ értékére lesz nehezebb következtetni $\lambda$ használt értékéből, mert a tesztfüggvény-közelítés képe nem válik áttekinthetetlenné, amidőn $\lambda=\beta_1$ — ahogy az az $\mathscr{A}$-módszer általános ismertetésében elvileg szerepelt.

16. II. 8. §. 3.-ban láttuk, hogy $f(x,c)=\frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4c}}}{\sqrt{4\pi c}}$ — minthogy stabilis sűrűségfüggvény — eleget tesz egy lineáris parciális differenciálegyenletnek. Következésképp a $b(y,\lambda)=\sum_{k=1}^{N}p_k\frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4(\beta_k-\lambda)}}}{\sqrt{4\pi(\beta_k-\lambda)}}$ tesztfüggvény is eleget tesz a $\frac{\partial b}{\partial\lambda}+\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}=0$ $(0\leq\lambda<\beta_1)$ parciális differenciálegyenletnek, $b(0,\lambda)=k(x)$ kezdeti feltétel mellett. II. 8. §. 4-ben láttuk, hogy $f(x,c-\lambda)$ $(0\leq\lambda<c)$ $f(x)$ páros deriváltjaival megszer-

kesztett függvénysorral írható fel; ezt alkalmazva, ezen az úton is megkapjuk $b(x, \lambda)$ fenti sorát (MEDGYESSY *(1954b)*, *(1955b)*, *(1961a)* pp. 93—101).

17. Az, hogy $b(y, \lambda)$ eleget tesz az előbbi parciális differenciálegyenletnek, nyilvánvaló, ha észrevesszük, hogy az $\frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4(\beta_k-\lambda)}}}{\sqrt{4\pi(\beta_k-\lambda)}}$ komponens a diffúziós folyamatok elméletéből jól ismert *Kolmogorov-féle* I. *és* II. *egyenletek* (GNEDENKO *(1954)* pp. 291—292) egyetlen megoldása a megfelelő speciális esetben (a másik egyenlet alakja $\frac{\partial b}{\partial \beta_k} - \frac{\partial^2 b}{\partial \alpha_k^2} = 0$, vagyis a hővezetési egyenlettel ekvivalens).

18. $\hat{b}(y, \lambda)$ — mérési hibáktól eltekintve — pontosan megadná $b(y, \lambda)$-t, ha $k(x)$ polinom volna, hisz e közelítést is ezen — a numerikus analízisben szokásos — feltevésből kaptuk. VARGA *(1966)* módosította e numerikus eljárást; abból indult ki, hogy ha $k(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\beta}}}{\sqrt{4\pi\beta}}$, akkor $\sum_{j=-m}^{m}{}' a_j k(x+jh)$ a legkisebb négyzetek elve szerint a legjobban közelítse meg $\frac{e^{-\frac{x^2}{4\sigma\beta}}}{\sqrt{4\pi\sigma\beta}}$-t, ahol $0<\sigma<1$, és $\beta$ adott. E feltételből az $a_j$ együtthatók meghatározhatók. — A $\sum_{j=-m}^{m}{}' a_j k(x+jh)$-val képviselt lineáris operáció tehát egy $\beta$ paraméterű *Gauss*-függvény görbéjét elkeskenyíti, de *nem* a $\beta-\lambda$, hanem a $\sigma\beta$ új paramétert hozza be. Egy normális sűrűségfüggvény-szuperpozícióra alkalmazva ezt az operációt valamilyen $\beta$-val, az nyilván arra a komponensre hat leginkább elkeskenyítően, amelynek $\beta_1$ paraméteréhez $\beta$ a legközelebb volt; a többieket más jelleggel befolyásolja. — „Mért” szuperpozíció-adatokon monoton növekedő $\beta$-val elvégezve ezt az eljárást, a közelítések figyelembevétele mellett és kis $\sigma$ esetén várható, hogy $\beta_1$-hez közeli $\beta$ mellett a $\beta_1$-et tartalmazó komponens görbéje az összképből erősen ki fog emelkedni és a többié is elkeskenyedik, — mikor is az $\mathcal{A}$-módszer elvét alkalmazhatjuk. $\beta_1$ ismeretének hiánya épp úgy jelentkezik az eljárás során, mint a formáns egyszerű csökkentésekor. — Az idézett cikk az $a_j$-k táblázatát is közli különböző paraméterértékek mellett, valamint a következő metodológiai *példát.*

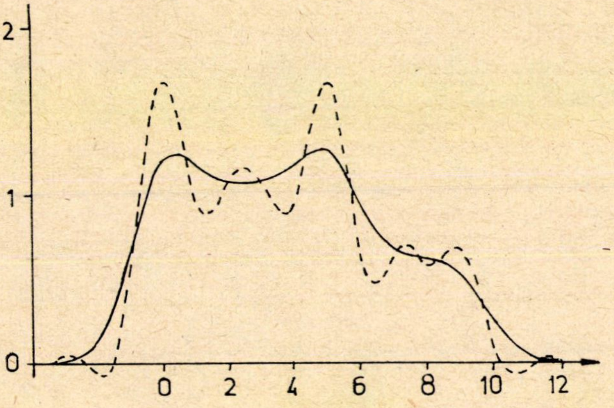
A felbontandó szuperpozíció legyen

$$k(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{(x-2,5)^2}{4}} + e^{-\frac{(x-5)^2}{2}} + 0,5\, e^{-\frac{(x-7,25)^2}{2}} + 0,5\, e^{-\frac{(x-9,25)^2}{2}}.$$

Görbéjét a 29. ábrán a ———————— vonallal rajzoltuk meg. Három csúcs látható. A —.— — — — — vonallal megrajzolt görbe bizonyos $\lambda$ érték mellett a $b(y, \lambda)$ tesztfüggvénynek az eljárással kapott közelítését ábrázolja. Ezen *mind az öt* komponens jól kivehető és a csúcshelyek is nagyjából a komponensek maximumhelyein vannak.

Megoldatlan probléma a módszer hatásosságának részletes, egzakt vizsgálata.

19. Normális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása esetén a $b(y, \lambda)$ tesztfüggvényt $k(x)$ segítségével szolgáltató integrálegyenlet megoldása megkísérelhető az V. 1. §-ban leírt *regularizációs módszerrel* is. Eszerint — többek közt — igaz, hogy a tesztfüggvény közelítését az $y_j = a+jh-\frac{h}{2}$ pontokban $\left(h = \frac{b-a}{N}\right.$,




29. ábra

$j=1, \ldots, N$; $(a, b)$ a numerikus számítások szempontjából alkalmas intervallum, $N$ egész szám) azon $z_j$ mennyiségek adják meg, amelyek minimalizálják a $z_j$-k függvényeként felírt

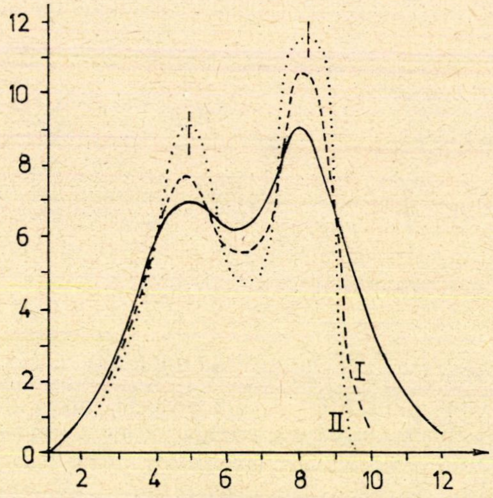
$$\sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{N} K_{i-j} z_j h - k_i\right)^2 h_1 + \alpha \sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{K_0^{(j)}}{h}(z_{j+1}-z_j)^2 + K_1^{(j)} z_j^2 h\right\}$$

funkcionált. Itt $K_{i-j}$-t az $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} f(y)\,dy = \sum_{j=1}^{N} K_{i-j} f(y_j) h + 0(h^\gamma)$ kvadratúra-formula $(\gamma > 0)$ értelmezi, ahol $f(y)$ alkalmas függvény, $k_i = k(x_i)$, $x_i = i + ih_1 - \dfrac{h_1}{2}$ $(i=1, \ldots, M)$, $h_1 = \dfrac{d-c}{M}$, $(c, d)$ alkalmas nagy intervallum, $M$ egész szám, $K_\nu^{(j)} > 0$ $(\nu = 0, 1)$ pozitív konstansok, pl. $K_\nu^{(j)} = 1$ is megfelel; végül, $\alpha$ általunk megválasztott paraméter; az eljárást ennek különböző értékei mellett kell elvégezni és az eredményeket összehasonlítani, hogy a legjobbnak látszót kiválasszuk, — ha a többi paramétert már rögzítettük.

20. A $\hat{b}(y, \lambda)$ tesztfüggvény-közelítés *Fourier*-sorfejtés, ill. *Fourier*-szintézis útján való kiszámításának módja nyilvánvalóan általános módszert ad I. fajú *Fredholm*-féle konvolúciós integrálegyenletek numerikus megoldására is (SCHULZ *(1934)*; STOKES *(1948)*; MEDGYESSY *(1961a)* pp. 81—84, 172—188). — A *Fourier*-szintézishez felhasználható készülékeknek nagy irodalma van (pl. SZEREBRENNIKOV *(1948)*). — Készüléket tervezett ehhez MEDGYESSY *(1957)* is.

21. Történeti megjegyzések. Normális sűrűségfüggvény-szuperpozíciók felbontásával legelőször abban a formában találkoztak, hogy adva volt — bizonyos $\beta$ hőmérsékleten — egy spektrumszakasz intenzitáseloszlásának — melyet $k(x) = \displaystyle = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4\beta}}}{\sqrt{4\pi\beta}}$ alakúnak tételeztek fel — a görbéje ismert $N$ mellett és meg

akarták határozni ezt a görbét $\beta$-nál alacsonyabb hőmérsékleten, amikor is a csúcsok keskenyebbé válnak és a csúcshelyekkel reprezentált spektrumvonal-helyek pontosabban leolvashatók. Ez a fő cél SEN *(1922)* cikkében és a kiindulópont DOETSCH *(1928)* dolgozatában. A megoldás azon a *formális* egyezésen alapult, hogy $k(x)$ egy végtelen rúd hőmérsékleteloszlása a $\beta$ időpontban, a keresett függvény pedig azonos a végtelen rúd hőmérsékleteloszlásával valamilyen, $\beta$-nál *korábbi* időpontban, emellett $k(x)$, mint $x$ és $\beta$ függvénye, eleget tesz a végtelen rúdra vonatkozó hővezetési egyenletnek. Kiszámítandó volt tehát a *korábbi* hőmérsékleteloszlás a *későbbi* alapján. Addig csak a *fordított* feladat megoldása volt ismert, és ezek közül az egyik a kezdeti hőmérsékleteloszlás deriváltjaiból felépített függvénysorral adta meg a későbbi hőmérsékleteloszlást. SEN *(1922)* ezt a kifejtést *korábbi* időpontokra is érvényesnek tételezte fel; ekkor a nálunk szereplő $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} k^{(2n)}(x)$ sorra jutott. Ennek közelítését $k(x)$ „mért" értékeire felépített interpolációs polinom segítségével adta meg. Eljárásával a $H_\alpha$ spektrumvonal komponenseinek intenzitáseloszlás-görbéit keskenyítette el, azzal a céllal, hogy a vonalak helyét pontosabban meghatározhassa. A cikkéből átvett 30. ábrán a ———————— vonallal megrajzolva a

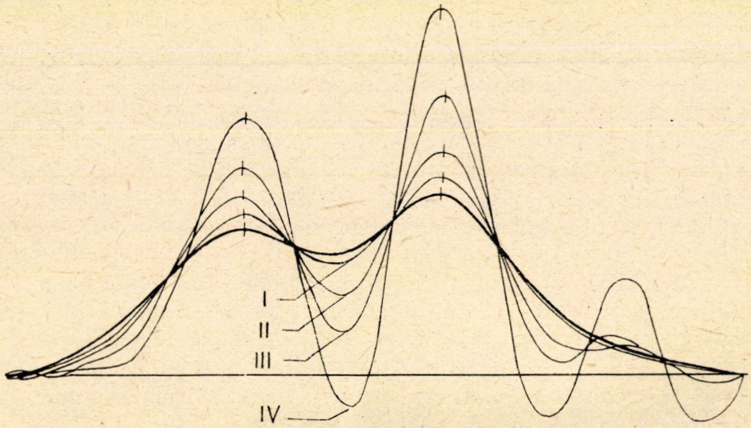



30. ábra

kezdeti intenzitáseloszlás-görbe látható, I. és II. pedig egyre korábbi időpontokra érvényes hasonló görbék. A csúcs (=spektrumvonal) helyek be vannak jelölve.

SEN *nem* vette még észre, hogy az eljárás *független* a komponensszámtól, bár *formailag* felbontást végzett el.

DOETSCH *(1928)* ugyanebből a spektroszkópiai feladatból indult ki, de *egzakttá* tette a *Sen*-féle eljárást, kihasználva a hővezetési egyenlet-analógiát. Megadta a tesztfüggvény integrálegyenletét a hővezetési probléma korábbi kezelés-technikája segítségével (DOETSCH *(1926)*; *formailag* az ottaniak felbontással is kapcsolatba hozhatók). A tesztfüggvény közelítésére bevezette az általunk is leírt, *Fourier*-sorfejtés, ill. *Fourier*-szintézisen alapuló módszert. DOETSCH *(1928)* vette észre *először*, hogy az eljárás rejtett komponensek *különválasztására* is alkalmas, — vagyis az $\mathscr{A}$*-módszer alapötlete* nála szerepelt először. A SEN *(1922)* által feldolgozott görbét az említett módszerrel ő is feldolgozta (25, *Mader-Ott*-féle analizátorral kiszámított *Fourier*-sinus-együtthatóra támaszkodva). A DOETSCH *(1928)*-ból átvett 31. ábrán a ———




31. ábra

vonallal megrajzolt görbe a $H_\alpha$ intenzitás-eloszlását mutatja (feltevés szerint ez normális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának görbéje). Az I.—IV.-gyel jelzett ———— vonalak egyre növekvő $\lambda$ értékekhez tartozó, a leírt módon kapott tesztfüggvény-görbék. A komponensek szétválása jól látható.

A tesztfüggvény-görbék még azt is megmutatták, mikor jártak a $\lambda$ paraméterrel már közel a legkisebb — $\beta_1$ — paraméterhez. (III.;—IV.-nél $\lambda$ már túl nagy volt). *Ez volt az első, egzakt módszerrel végzett (numerikus) felbontás.*

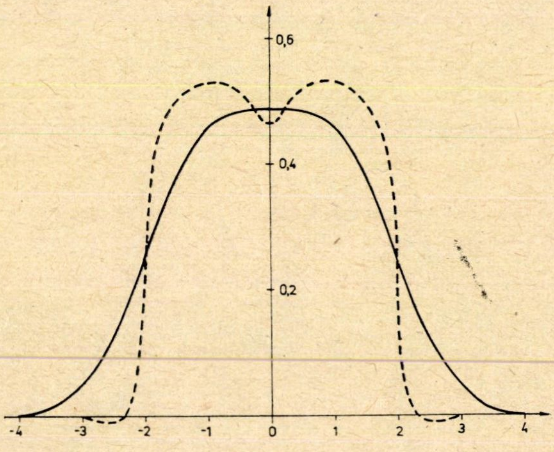

32. ábra

Később a $H_\alpha$ vonal pontosabb adataihoz jutva, DOETSCH *(1928)* megpróbálta felbontási eljárással eldönteni azt a régi sejtést, hogy ez a vonal valójában *hármas*. Ez *sikerült* is; ahogy $\lambda$ értékét növelte, egyre jobban előtűnt egy harmadik komponens is a tesztfüggvény-grafikonokban a már addig is ismert, jól megkülönböztethető kettő mellett. A. DOETSCH *(1928)*-ból átvett 32. ábrán ——————— a $H_\alpha$ vonal említett intenzitáseloszlás-görbéje; az I.—III. jelzésű ——————— vonalak pedig az egyre nagyobb $\lambda$-értékekkel elvégzett felbontások eredményeit mutatják. III. már jól mutatja a harmadik (eléggé rejtett) komponens (=spektrumvonal) jelenlétét.

A formáns-változtatás módszere pontos megfogalmazásban először DOETSCH *(1936)* cikkében jelent meg; a tesztfüggvényt *Fourier*-transzformáltakkal állította elő. Közelítő előállításként itt is a *Fourier*-sorba fejtés és *Fourier*-szintézisen alapuló szerepelt. Hibavizsgálat azonban csak MEDGYESSY *(1954c)*, *(1955b)* munkáiban található.

22. Mint láttuk, normális sűrűségfüggvények szuperpozíciója *egyenlő* $\beta_k$ paraméterek esetén eleget tesz egy parciális differenciálegyenletnek, ennek „visszafelé" való megoldása pedig megadja a tesztfüggvényt. Ez a megoldás formálisan numerikusan is előállítható. — II. 8. §-ában láttuk, hogy ebben az esetben *a tesztfüggvény is* eleget tesz egy parciális differenciálegyenletnek. Ennek formális numerikus megoldása a tesztfüggvény közelítését adja (MEDGYESSY *(1953)*, *(1955c)*, *(1971c)*, *(1971d)*. — Mivel itt *inkorrektségi* kérdések merülnek fel, megoldatlan probléma, használhatók-e a gyakorlatban az előzők. (Támpontot nyújthat: LATTÈS, LIONS *(1967)*; CSUDOV *(1967)*; ARCANGELI *(1968)*).

A már korábban szerepelt $k(x)=\dfrac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}+\dfrac{e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ szuperpozíció leírt módon való felbontása, mint metodologiai példa, megtalálható MEDGYESSY *(1971d)* munkájában. Az elég szerény eredményt a 33. ábra mutatja, melyen ———




33. ábra

vonallal $k(x)$ görbéjét, — — — — — — vonallal pedig az eredményét rajzoltuk meg, bizonyos rácsponttávolság és $\lambda$ érték mellett.

23. A $b(y, \lambda)$ tesztfüggvény egy $k(x)$ normális sűrűségfüggvény-szuperpozíció esetében *Csebüsev—Hermite*-kifejtés segélyével is előállítható (MEDGYESSY *(1953)*, *(1954c)*, *(1961a)* pp. 87—93). Mivel az e kifejtésre érvényes kritérium (H. CRAMÉR *(1925)*, *(1946)* pp. 226—227) — ti., hogy a kifejtendő függvény legyen korlátos változású bármely véges intervallumban és abszolút értékének $e^{\frac{x^2}{4}}$-szerese legyen integrálható — $k(x)$ és $b(y, \lambda)$-ra teljesül, ha $0<\beta_k<1$ $(k=1, \ldots, N)$, ez pedig skálaváltoztatással mindig elérhető,

$$k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{n!} \varphi^{(n)}(x),$$

$$b(y, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \varphi^{(n)}(x)$$

$$\Big[K_n = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} He_n(x) k(x)\, dx, \qquad B_n = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} He_n(y) b(y, \lambda)\, dy,$$

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \ \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n He_n(x) \varphi(x)\Big]$$

és az

$$\mathbf{F}[k(x); t] = e^{-\lambda t^2} \mathbf{F}[b(y, \lambda); t]$$

összefüggés

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{n} (-it)^n = e^{-\lambda t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-it)^n$$

alakban is felírható. Mivel $\frac{1}{e^{-\lambda t^2}}$ egész függvény,

$$\frac{1}{e^{-\lambda t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (it)^n$$

és ezzel

$$B_n = n! \sum_{r=0}^{n} (-1)^r b_r \frac{K_{n-r}}{(n-r)!} = n! \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\lambda^r K_{n-2r}}{r!(n-2r)!},$$

amivel megkaptuk a tesztfüggvény kifejtésének együtthatóit.

A leírtak nyilván kiterjeszthetők I. fajú *Fredholm*-féle konvolúciós integrálegyenletek általános megoldási módszerévé, ha az $\frac{1}{e^{-\lambda t^2}}$-tel ekvivalens függvény egész függvény (MEDGYESSY *(1961a)* pp. 181—188; általánosabb alak: RUNGE *(1914)*). — Az előállítási probléma *korrekt* volta eldöntetlen probléma. A gyakorlatban a tesztfüggvény kifejtése egy szeletét kellene alkalmazni éit.; az ezzel kapcsolatos — részleges — hibabecsléseket stb., illetőleg lásd MEDGYESSY *(1961a)* pp. 87—93.

24. Az, hogy korlátlanul osztható eloszlásfüggvényekhez tartozó *két karakterisztikus függvény hányadosa* mikor lesz ismét egy korlátlanul osztható eloszlás-

függvény karakterisztikus függvénye, megfogalmazható *Lévy-Hincsin*-féle kanonikus előállításaik „spektrális függvényei" nyelvén is (vö. II. 8. §. 1.).

25. Az *𝒜-módszer második speciális esete* nyilván akkor is alkalmazható, ha a felbontandó szuperpozíciónak a *karakterisztikus függvényét* ismerjük csupán. Ez az eset előadódik a fizikában, meteorológiában stb. (vö. EMSLIE, KING *(1953)*).

26. ch-*sűrűségfüggvények* $k(x)$ *szuperpozíciójának felbontása* esetén a $b(y, \lambda)$ tesztfüggvényre, melyet a

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\lambda \operatorname{ch}[\pi(x-y)/2\lambda]} b(y, \lambda)\, dy \quad (0 < \lambda < \beta_1)$$

integrálegyenlet értelmez, az V. 3. §. folytán fennáll a

$$b(y, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{(2\nu)!} k^{(2\nu)}(x)$$

összefüggés is. Ez azonban gyakorlatilag nem látszik használhatónak, mert a (numerikus) deriválás *inkorrekt* probléma, melyet még a regularizációs módszerrel (V.1. §.) sem igen tudunk kezelni. — A közölt sorfejtés haszna a numerikus analízis szempontjából mindenesetre még meg nem vizsgált probléma.

27. A 2.2.-*ben közölt módszer* primitív formában megtalálható már MEDGYESSY *(1961a)* p. 181-en. — Tekintsük a 2.1.-ben leírt módszerben a $b(y, \lambda) = = \mathbf{F}^{-1}\left[\frac{1}{\varphi(t, \lambda)} \mathbf{F}[k(x); t]; y\right]$ tesztfüggvényt. A valóságban $k(x)$ helyett a $k(x) + + \xi(x)$ függvény görbéje áll rendelkezésre, mert a szuperpozíció nem pontosan a feltételezett alakú, „mért" függvény esetén pedig hiba, „zaj" is rárakódik; ezeket foglaltuk össze $\xi(x)$-ben. $k(x)+\xi(x)$ *Fourier*-transzformáltjában — „spektrumában" — bizonyos határon túl $k(x)$ spektruma már elenyészik $\xi(x)$-éhez képest, $\xi(x)$-é azonban elég széles sávban ingadozik. A további számításokban $\xi(x)$ spektruma erősen közrejátszik és elrontja az eredményt. — Tekintsük most a módszerünkben szereplő $b_1(y, \lambda) = \mathbf{F}^{-1}\left[\frac{\alpha(t, \varepsilon)}{\varphi(t, \lambda)} \mathbf{F}[k(x); t]; y\right]$ tesztfüggvényt. Itt az $\alpha(t, \varepsilon)$-nal való szorzás az említett „felesleges" spektrumrészt lecsökkenti, míg — megfelelő $\varepsilon$ mellett — a $k(x)$-től eredő főrészt nem sokat zavarja. Végeredményben tehát $\alpha(t, \varepsilon)$ alkalmazásának „zajszűrő" hatása van, de az egzakt végeredményt kevéssé befolyásolja. Módszerünk tehát ugyanakkor, amikor egzakte megad egy alkalmas tesztfüggvényt, a „zaj" kiszűrését is eredményezi. Numerikus végrehajtásakor is megmarad a „zajszűrő" jelleg, ami ilyenkor még lényegesebb. MEDGYESSY *(1967a)*-ban a „zajszűrés" részletes vizsgálatának alapelvei is megtalálhatók $\xi(x)$ típusa konkretizálása mellett; $\varepsilon$ változtatásával optimális állapot is elérhető. — $\alpha(t, \varepsilon)$-nal való szorzás tehát bizonyos „szűrőt" képvisel, elektronikai értelemben. Ennyiben *rokon* az V. 2. §.-ban leírt módszerrel, ahol azonban a cél kizárólag a „zajszűrés", míg itt a cél alkalmas új tesztfüggvény előállítása és a „zajszűrés" hasznos kísérő jelenségeként lép fel. Az itteni módszer biztosítja a tesztfüggvény-komponensek szükséges *egycsúcsúságát;* az V. 2. §-ban ez a cél nem szerepel, sőt megmutatható, hogy nem is teljesülhet.

28. A 2.2. alatti módszer esetében az, hogy $\varphi(t, \beta_k) = e^{-\beta_k t^2}$ mellett található-e egyáltalán megfelelő $\alpha(t, \varepsilon)$ — és ha igen, mi az alakja — megoldatlan probléma.

29. 2.2. 1. példájában ch $\lambda t \cdot e^{-\varepsilon t^2}$ felfogható mint egy olyan „sűrűségfüggvény" „karakterisztikus függvénye", melynek negatív értékei is lehetnek, $(-\infty, \infty)$-en vett integrálja azonban 1. Értelmezzük e „sűrűségfüggvény" szórásnégyzetét a valószínűségelméletben szokásos módon; ekkor negatív „szórásnégyzetet" kapunk. Ezek után a $b_k(y, \lambda)$ tesztfüggvény úgy fogható fel, mint $k(x)$ és a jelen „sűrűségfüggvény" konvolúciója, és ez a konvolúció *lecsökkenti* a valóságos szórásnégyzeteket — mondhatjuk, monoton formánsokat — vagyis *elkeskenyíti* $k(x)$ görbéjét (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*). — Technikai eszközként vezettük be ezt a „sűrűségfüggvényt", ill. negatív „szórásnégyzetet"; az ötlet további kihasználása, felbontási problémákban, még megoldatlan probléma. Diszkrét eloszlásokra szóló analóg — és kidolgozottabb — meggondolásokat bemutatunk majd a IV. 1. §. 1.1.1. és IV. 1. §. 2.-ben.

30. *Lognormális sűrűségfüggvények szuperpozíciója felbontásával* kapcsolatban megemlítjük, hogy a személyi jövedelmek eloszlása adott társadalmi rétegen belül ilyen szuperpozícióval írható le (FRÉCHET *(1939)*, *(1945)*; AITCHISON, BROWN *(1957)*). — Ilyen felbontás előadódik a geológiában, biológiában is (l. pl. HARDING *(1949)*; a grafikus kezelést l. a III. 3. §. A. 5.-ben).

31. *A Beta-sűrűségfüggvények szuperpozícióját* egy felbontható másikba átvivő transzformáció tulajdonképp *keverést* képvisel. Ez más esetekben is előfordul. Lehet azonban a tıanszformáció magfüggvénye *nem*-sűrűségfüggvény is. — Egyéb példák: MEDGYESSY *(1961a)* pp. 146—148. — Mindezen esetekben a megfelelő transzformáció megkeresése egy integráltranszformáció — ismeretlen paramétereket nem tartalmazó — magja meghatározásával ekvivalens (MEDGYESSY *(1961a)* p. 156). E probléma azonban általánosságban megoldatlan.

32. Az $\mathscr{A}$*-módszer* általánosítható a következő értelemben. Legyen ismét $k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k, \beta_k)$ egycsúcsú sűrűségfüggvények szokásos szuperpozíciója és tegyük fel, hogy $f(x, \beta_k) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(y-x)\, g(y, \beta_k)dy\; (0<\lambda<\beta_1)$, ahol $K_\lambda(x)$ egy sűrűségfüggvény, mely nem függ $\beta_k$-tól, $g(y, \beta_k)$ egycsúcsú, továbbá mindezen függvények szórásnégyzete létezik és valamilyen értelemben jellemzi azok görbéje keskenységét. — Más szóval, feltesszük, hogy $f(x, \beta_k)$ *faktorizálható*, két faktorral (a fogalmat illetőleg l. LINNIK *(1960)*, LUKÁCS *(1964)*), melyek közül az egyik *egycsúcsú* (az ilyen típusú faktorizáció lehetősége megoldatlan probléma). Ha $\lambda$ növekedésekor $K_\lambda(x)$ szórásnégyzete növekedik, $b(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k\, g(y-\alpha_k, \beta_k)$ felhasználható tesztfüggvényként, minthogy — $K_\lambda(x)$ és $g(y, \beta_k)$ szórásnégyzetei összegének állandó volta következtében — $b(y, \lambda)$ komponensei görbéi keskenyebbé válnak, ha $\lambda$ növekedik. — A $k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(x-y) b(y) dy$ integrálegyenletből $b(y)$ meghatározható — akár numerikusan is, $b(y) = \sum_{j=-m}^{m} C_j^m(\lambda) k(y+jh)$ alakban — *sok esetben $b(y)$ analitikus alakja pontos ismerete nélkül,* csupán a karakterisztikus függvényre támaszkodva. Bár számos szuperpozíció-típus ide sorolható, mindennek részletes tárgyalása jelenleg megoldatlan probléma.

33. A fenti 7. ponthoz kapcsolódva megjegyezzük, hogy az ottaniak alapján olykor *többcsúcsú sűrűségfüggvények bizonyos szuperpozíciói* is felbonthatók egy-

csúcsú sűrűségfüggvény-szuperpozíciók felbontásához használt módszerrel. Tekintsünk például (MEDGYESSY *(1961a)* p. 72) egy $k(x)$ szuperpozíciót, melynek komponenseihez $\psi_k(t)=\varphi(t)^{\beta_k}e^{i\alpha_k t}\cos\gamma t$ típusú karakterisztikus függvények tartoznak ($\gamma$ adott) és $\mathbf{F}^{-1}[\varphi(t)^{\beta_k}; x](0)$ egycsúcsú. A paraméterek alkalmas megválasztásával elérhető, hogy $\mathbf{F}^{-1}[\psi_k(t); x]$ kétcsúcsú lesz, $x_1=\alpha_k+\gamma$ és $x_2=\alpha_k-\gamma$ csúcshelyekkel. Ha $k(x)$-re alkalmazható a formánscsökkentés módszerének a fenti 7.-ben leírt általánosítása, annak értelmében $\mathbf{F}[k(x); t]$-t meg kell szorozni $\dfrac{1}{\varphi(t)^\lambda\cos\gamma t}$-vel $(0<\lambda<\beta_1)$; ekkor a használandó tesztfüggvény komponenseinek karakterisztikus függvényei $\dfrac{\varphi(t)^{\beta_k}\cos\gamma t}{\varphi(t)^\lambda\cos\gamma t}=\varphi(t)^{\beta_k-\lambda}$ alakúak lesznek. Ekkor azonban a tesztfüggvény komponensei már egycsúcsúak lesznek és a felbontási eljárás ugyanúgy folytatható, mint a munkánkban vizsgált bármely tesztfüggvény esetében.

## 2. §. Második szuperpozíció-típus. A $\mathscr{B}$-módszer

Az első szuperpozíció-típust az jellemezte, hogy a komponensek csúcshelyei *különbözők* voltak; maga az $\mathscr{A}$-módszer is erre épült.

Most a

$$k(x)=\sum_{k=1}^{N}p_k f(x,\beta_k)\qquad(A_1<\beta_1<\cdots<\beta_N<A_2)$$

típusú szuperpozíciók felbontását fogjuk vizsgálni, melyekben az $f(x,\beta_k)$ *egyparaméteres* sűrűségfüggvények szigorúan egycsúcsú, $(A_1)$ vagy $(A_2)$ vagy $(A_3)$ sűrűségfüggvények, de az $f(x,\beta_k)$ sűrűségfüggvények csúcshelyei azonosak és így rájuk az $\mathscr{A}$-módszer nem alkalmazható.

Példa ezekre (0) egycsúcsú normális sűrűségfüggvények szuperpozíciója és klasszikus *példa* exponenciális sűrűségfüggvények

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}p_k\frac{e^{-\frac{x}{\beta_k}}}{\beta_k} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}\qquad(0<\beta_1<\cdots<\beta_N<A_2)$$

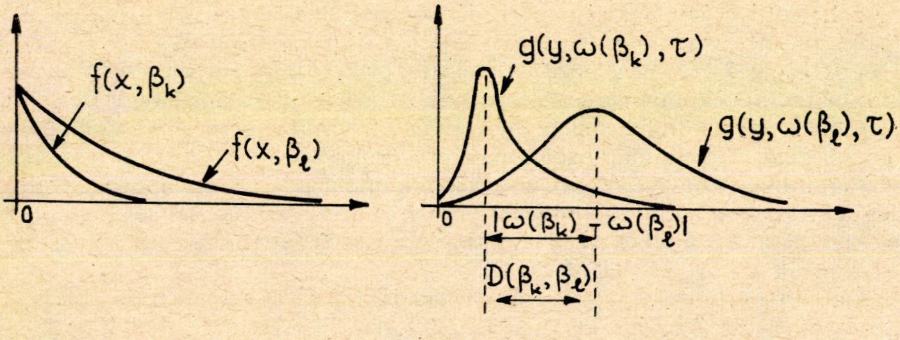
szuperpozíciója, melynek vizsgálata napjainkban az érdeklődés középpontjába került.

A $k(x)$ szuperpozícióhoz rendeljük hozzá a

$$b(y)=\sum_{k=1}^{N}p_k g(y,\omega(\beta_k),\tau)\qquad(0<\tau<T)$$

függvényt, melyet szintén tesztfüggvénynek nevezünk, és amelyre a következő feltételek állnak fenn:

I. $\omega(x)$ adott, szigorúan monoton, $\beta_k$-t nem tartalmazó függvény és $g(y,\omega(\beta_k),\tau)$ $(0<\tau<T)$ $(\omega(\beta_k))$ *egycsúcsú sűrűségfüggvény* vagy egy ilyennel arányos, melyben az $\omega(\beta_k)$ csúcshely $\neq 0$, emellett $\tau$-tól is függhet, és amelynek görbéje valamilyen adott értelemben egyre „keskenyebb” és annak csúcsmagassága egyre jobban nő, ha $\tau\downarrow 0$ (vagy $\tau\uparrow T$); végül, amely jól definiált, $\beta_k$-tól független összefüggésben van $f(x,\beta_k)$-val $(k=1,\ldots,N)$.

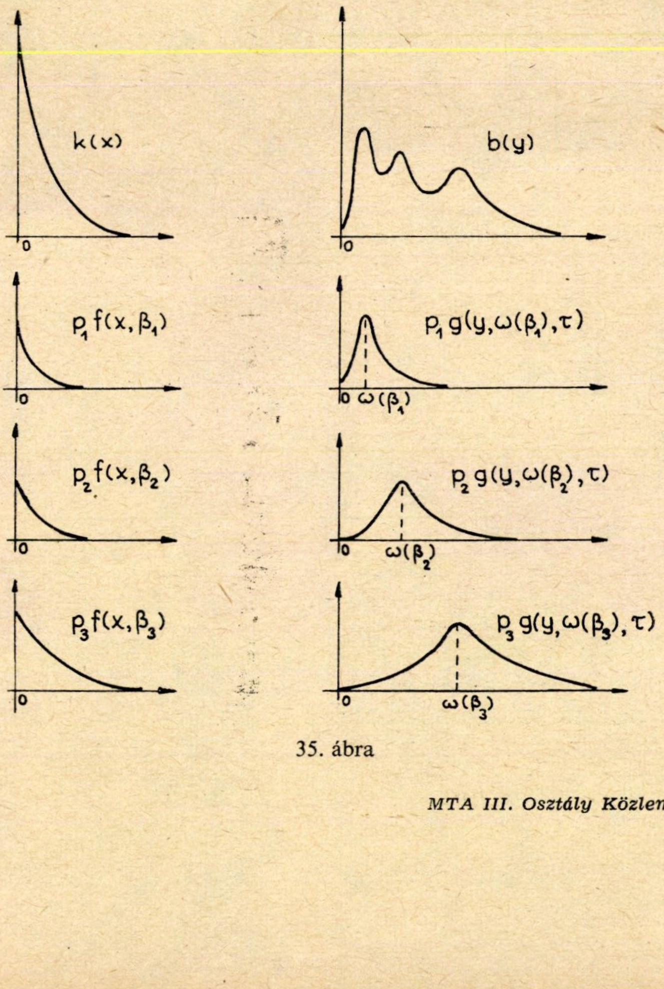



34. ábra

II. Bármely $\tau$ mellett $g(y, \omega(\beta_k), \tau)$ és $g(y, \omega(\beta_l), \tau)$ csúcshelyeinek távolsága, $|\omega(\beta_k)-\omega(\beta_l)|$ legalább akkora, mint bizonyos, *csak* $\beta_k$ és $\beta_l$-től függő, azaz $\tau$-tól *független* $D(\beta_k, \beta_l)$ mennyiség (l. az 34. ábrát).

III. $b(y)$ előállítható pusztán $k(x)$ segítségével, $N$, $p_k$, $\beta_k$ ismerete nélkül, esetleg $g(y, \omega(\beta_k), \tau)$ és $f(x, \beta_k)$ összefüggése felhasználásával.

$b(y)$ nyilván egy sűrűségfüggvény-szuperpozíció.




35. ábra

Az I. alatti csúcsmagasság-növekedés — sőt, elkeskenyedés — fellép, ha pl. $\tau$ $(T, 0)$ vagy $(0, \tau)$ monoton formánsa $g(y, \omega(\beta_k), \tau)$ görbéjének.

0-hoz (vagy $T$-hez) elég közeli $\tau$ mellett $g(y, \omega(\beta_k), \tau)$ görbéje $\omega(\beta_k)$-ban éles csúcsot mutat. $b(y)$ komponensei csúcshelyei bármely $\tau$-nál valamennyire szétszórtan helyezkednek el (vö. a II. feltétellel), ezért *várható*, hogy $b(y)$ görbéjében a komponensek görbéi *különváltan* mutatkoznak meg, erős különválás esetén szinte egyenként. Így várható, hogy a tesztfüggvény görbéjéből kiolvasható $N$, a komponens-szám — esetleg a kevéssé torzított komponens-görbék csúcshelyei, ordinátaértékeiből stb. egyes más paraméterértékek is kiszámíthatók (l. a 35. ábrát).

Tekintsük a következő lépéseket:

A) a leírt $g(y, \omega(\beta_k), \tau)$ függvény megtalálása $f(x, \beta_k)$ alapján;

B) a $b(y)$ tesztfüggvény kiszámítása $k(x)$ alapján A) segítségével;

C) $k(x)$ grafikonja *mért* ordinátaértékeire, mint egyedül rendelkezésünkre álló adatokra támaszkodó, a tesztfüggvény értékeinek *közelítő* kiszámítására alkalmas, B)-re épülő optimális numerikus eljárás kidolgozása.

(C) a tesztfüggvény *közelítését* szolgáltatja csupán — többet nem érhetünk el.)

A $b(y)$ tesztfüggvény ezen közelítésének görbéjére a „pontos" tesztfüggvény-görbe kiértékelésére vonatkozó fenti megállapítások közelítőleg igazak.

A $k(x)$ szuperpozíció felbontása $\mathscr{B}$-módszerének nevezzük a $b(y)$ tesztfüggvény ezen *közelítése* görbéjének megszerkesztését, és abból az ismeretlen paraméterértékekre való következtetést (=felbontás) (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

PÉLDA

Exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása.

Legyen

$$k(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{e^{-\frac{x}{\beta_k}}}{\beta_k} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases} \qquad (0<\beta_1<\cdots<\beta_N<\Lambda_2).$$

Tekintsük a következő $b(y)$ függvényt:

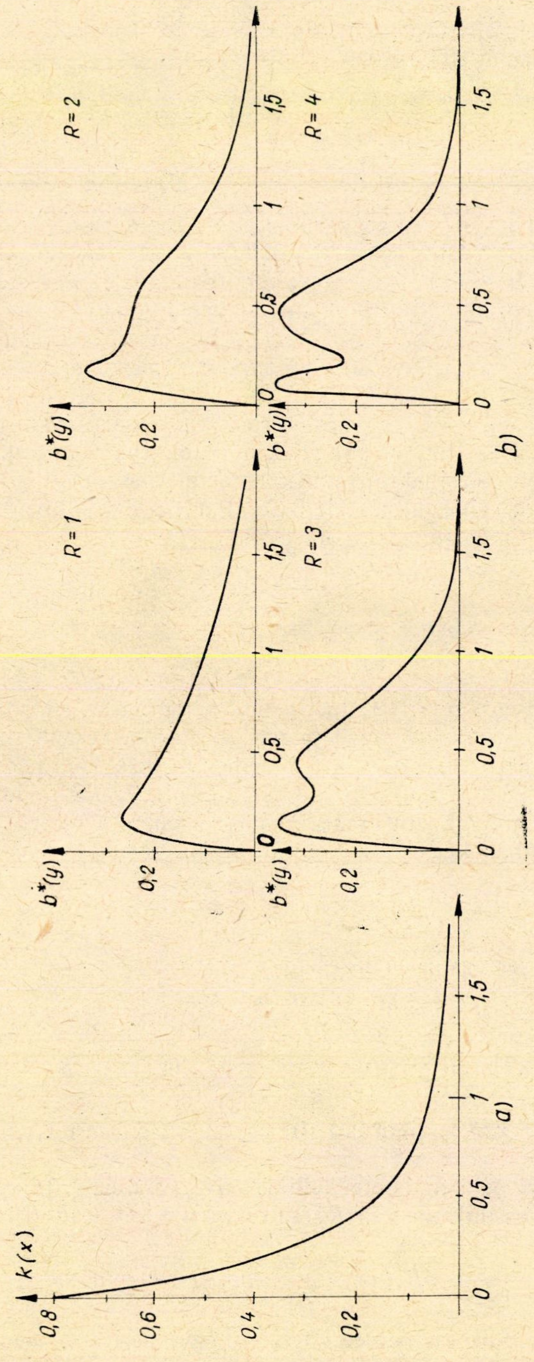
$$b(y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{\sigma-1}{B(1/\tau+1,\, 1/\tau(\sigma-1))} \dfrac{\left(e^{-\frac{y}{\beta_k}} - e^{-\frac{\sigma y}{\beta_k}}\right)^{\frac{1}{\tau}}}{\beta_k} & (y>0) \\ 0 & (y \leqq 0), \end{cases}$$

azaz a fenti jelölésekkel:

$$g(y, \omega(\beta_k), \tau) = \begin{cases} \dfrac{\sigma-1}{B(1/\tau+1,\, 1/\tau(\sigma-1))} \dfrac{\left(e^{-\frac{y}{\beta_k}} - e^{-\frac{\sigma y}{\beta_k}}\right)^{\frac{1}{\tau}}}{\beta_k} & (y>0) \\ 0 & (y \leqq 0), \end{cases}$$

$$\sigma>1, \frac{1}{\tau} = R \quad \text{egész és} \quad \omega(\beta_k) = \beta_k \frac{\log \sigma}{\sigma - 1}.$$

(Ez egy Beta-sűrűségfüggvény bizonyos transzformáltja.) A 2. §. I., II. és III. feltételei itt mind teljesülnek; például $1/\tau$ növekedtével $b(y)$ komponenseinek csúcsmagassága növekedik és görbéik, mint azt részletesebb vizsgálat mutatja, „keskenyebbek"




36. ábra

lesznek, maguk pedig $k(x)$ komponenseivel $\beta_k$-tól független összefüggésbe hozhatók, az $1/\tau$ hatványok kifejtésével é.i.t., $b(y)$ kifejezésében pedig az említett kifejtést elvégezve és a szummát átalakítva

$$b(y) = \begin{cases} \dfrac{\sigma-1}{B(1/\tau+1,\, 1/\tau(\sigma-1))} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{1/\tau} \binom{1/\tau}{\nu} (-1)^\nu \, k\left([(\sigma-1)\nu + 1/\tau]\, y\right) & (y > 0) \\ 0 & (y \leqq 0). \end{cases}$$

$b(y)$ tehát vehető a $k(x)$ szuperpozícióhoz rendelhető tesztfüggvénynek.

*Kiemelendő,* hogy $b(y)$ *egzakte* előállítható $k(x)$ ekvidisztáns pontokban vett értékei lineáris kifejezésével, ami a gyakorlatban a legkevésbé pontatlan eljárásra vezet: $b(y)$ közelítő értékeit ugyanezen képletbe $k(x)$ „mért" értékeit beírva kapjuk meg. Ez *korrekt* probléma is. — A korábbi eljárásokban a gyakorlatban valamilyen bonyolult analitikus kifejezést *közelítettünk* a *„mért"* adatok lineáris kifejezésével.

A $\mathscr{B}$-módszer tehát alkalmazható itt. Hátrány, hogy sokszor igen hosszú intervallumban kell ismerni $k(x)$ „mért" értékeit az eljárás gyakorlati alkalmazhatóságához; ha azonban az origóhoz közeli tesztfüggvényszakasz a lényeges, $k(x)$ pedig csak nagyobb $x$-értékekre ismert, eljárásunk hasznosítható lehet. A $\sigma$ és $\tau$ paramétereket variálni kell és a megfelelő ábrákat összességükben kiértékelni.

*Metodológiai példaként* tekintsük a

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2x} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-8x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

exponenciális sűrűségfüggvény-szuperpozíció felbontását. Görbéjét a 36a ábra mutatja; táblázat segítségével, 4 tizedesjegyet megtartva készült. E görbe-adatokkal a fent leírt módon megszerkesztettük a $k(x)$-hez tartozó $b(y)$ tesztfüggvény egy $b^*(y)$ közelítését, $\sigma = 1{,}25$, $1/\tau = R = 1, 2, 3$ és 4 mellett. Ezeket mutatják a 36b ábrán a részábrák. A kerekítés okozta hibák kihatása ellenére $b^*(y)$ görbéje $R$ növekedtével egyre határozottabban két csúcsot mutat, utalva ezzel $k(x)$ két — eredetileg rejtett — komponensére.

## 1. A $\mathscr{B}$-módszer egy speciális esete

Legyen a

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x, \beta_k) \qquad (A_1 < \beta_1 < \cdots < \beta_N < A_2)$$

szuperpozícióban $f(x, \beta_k)$ szigorúan (0) egycsúcsú és *vagy* ($A_1$) *vagy* ($A_2$) sűrűségfüggvény.

Az előző pont példája ötletét felhasználva, valamely (0) egycsúcsú $w(x)$ *sűrűségfüggvénnyel* alkossunk meg az $R_\sigma(y)$ függvényt ($\sigma > 1$ adott) a következőképpen:

$$R_\sigma(y) = \frac{\sigma}{\sigma-1}[w(y) - w(\sigma y)];$$

ez *sűrűségfüggvény*. Sok esetben ez szigorúan egycsúcsú $(0, \infty)$-en; legyen a csúcshely

$x_m \neq 0$. (Ezt a lépést az egyszerűbb rádióaktív bomlási görbék alakja sugallta; azok típusa ugyanis $f(x) = C(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x})$, amely *nem* (0) egycsúcsú.)

*Tegyük fel,* hogy $k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x, \beta_k)$-ra *formálisan* alkalmazhatók az $\mathscr{A}$-módszer lépései és az ekkor kapott tesztfüggvény

$$b_1(y) = \sum_{k=1}^{N} p_k h(y, \beta_k),$$

melyben $h(y, \beta_k)$ is (0) egycsúcsú és görbéje, adott értelemben, „keskenyebb", mint $f(x, \beta_k)$ görbéje.

Tekintsük a

$$b(y, \tau) = \sum_{k=1}^{N} p_k \; g^*(y, \omega(\beta_k), \tau)$$

függvényt, ahol

$$g^*(y, \omega(\beta_k), \tau) = \frac{\sigma}{\sigma - 1} [h(y, \beta_k) - h(\sigma y, \beta_k)] \qquad (0 < \tau < T);$$

a $\tau$ paramétert (esetleg: monoton formánst) $h(y, \beta_k)$ valamiképp tartalmazza. *Tegyük fel,* hogy a $g^*(y, \omega(\beta_k), \tau)$ függvény egycsúcsú, csúcshelye $x = \omega(\beta_k)$-ban van és görbéje valamilyen értelemben egyre keskenyebb lesz, ha $\tau \downarrow 0$ (vagy $\tau \uparrow T$). A $g^*(y, \omega(\beta_k), \tau)$ függvényre a III. 2. §-beli I. feltétel teljesül, részben az előbbiek folytán, részben azért, mert egyrészt $g^*(y, \omega(\beta_k), \tau)$ és $h(y, \beta_k)$, másrészt $h(y, \beta_k)$ és $f(x, \beta_k)$ között $\beta_k$-tól független összefüggés áll fenn. *Tegyük fel,* hogy a III. 2. §-beli II. feltétel is teljesül $g^*(y, \omega(\beta_k), \tau)$-ra. A III. 2. §-beli III. feltétel a $g^*(y, \omega(\beta_k), \tau)$ és $f(x, \beta_k)$ közt fennálló, említett összefüggés alapján teljesül $b(y, \tau)$-ra. Mindezek után $b(y, \tau)$ vehető a $k(x)$-hez rendelhető tesztfüggvénynek és a III. 2. §-beli A), B) és C) lépések után a $\mathscr{B}$-módszer alkalmazható.

Lényegében azzal, hogy az $R_\sigma(y)$ függvény képzési szabályával egy (0) egycsúcsú sűrűségfüggvényből 0-tól különböző csúcshelyű sűrűségfüggvényt alkothatunk meg, a $b^*(y)$ tesztfüggvényt $k(x)$ segítségével képezve, megalkottuk a $\mathscr{B}$-módszer egy speciális esetét, a *problémát egy már tárgyaltra vezetve vissza.*

Az $\mathscr{A}$-módszer itt szereplő konkrét típusa sokszor azonos az $\mathscr{A}$-módszer tárgyalásában szerepelt volt valamelyik típussal.

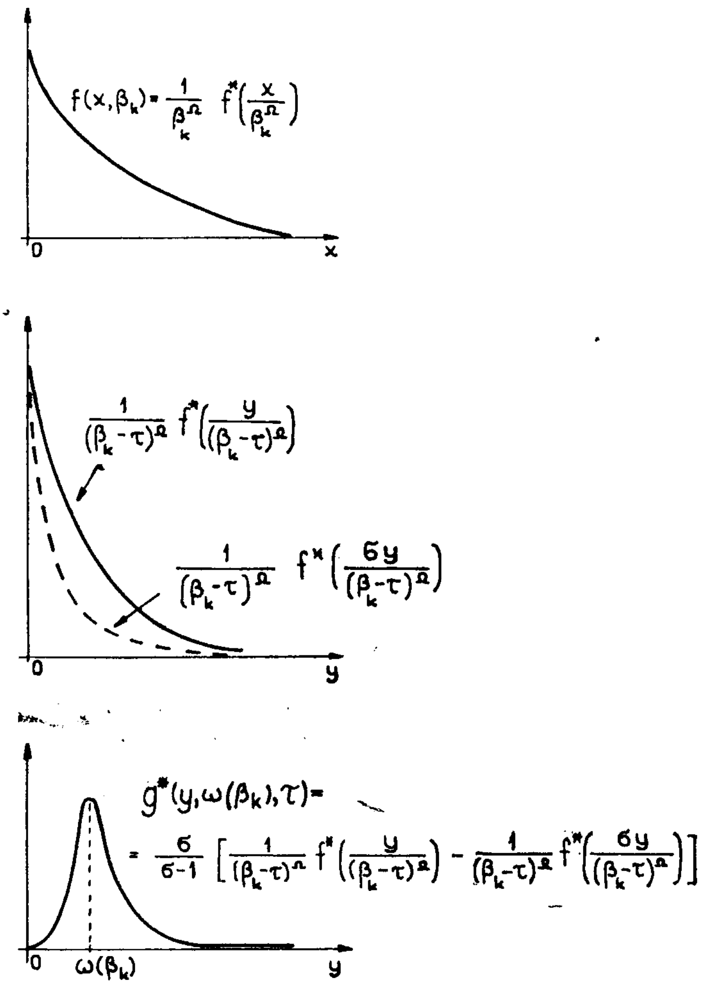
A $\mathscr{B}$-módszer jelen speciális esete alkalmazhatóságának említett feltételei teljesülnek pl. abban az esetben, amidőn

1. $$f(x, \beta_k) = \frac{1}{\beta_k^\omega} f^*\left(\frac{x}{\beta_k^\omega}\right) \qquad (A_1 < \beta_1 < \dots < \beta_N < A_2)$$

($\omega > 0$ adott), — ahol $f^*(x)$ (0) egycsúcsú és $\frac{\sigma}{\sigma - 1} [f^*(x) - f^*(\sigma x)]$ ($\sigma > 1$) ($m_\sigma$) egycsúcsú $(0, \infty)$-en és 2. $\mathscr{A}$-nak a formáns egyszerű csökkentését vesszük (l. III. 1. §. 1.1.; $\tau$ helyett ott $\lambda$ állt); ez alkalmazható, $\frac{1}{\beta_k^\omega} f^*\left(\frac{x}{\beta_k^\omega}\right)$ típusú komponensek esetében; a $k$-adik görbéjének $\beta_k$ $(A_2, 0)$ monoton formánsa. A (0) egycsúcsú jelleg fennáll például, ha $f^*(x)$ (0) szimmetrikus stabilis sűrűségfüggvény (vö. III. 1. §. 1.1.1.—III. 1. §. 1.1.1.1.) — 1. fennállásakor a III. 2. §. II. feltétele teljesül, mert

$$g^*(y, \omega(\beta_k), \tau) = \frac{\sigma}{\sigma-1}\left[\frac{1}{(\beta_k-\tau)^\omega} f^*\left(\frac{y}{(\beta_k-\tau)^\omega}\right) - \frac{1}{(\beta_k-\tau)^\omega} f^*\left(\frac{\sigma y}{(\beta_k-\tau)^\omega}\right)\right]$$

és ez a függvény $((\beta_k-\tau)^\omega m_\sigma)$ egycsúcsú, azaz $\omega(\beta_k) = (\beta_k-\tau)^\omega m_\sigma$, csúcsmagassága növekedik, ha $\tau \uparrow \beta_k$ és $g^*(y, \omega(\beta_k), \tau)$ és $g^*(y, \omega(\beta_l), \tau)$ csúcshelyeinek távolsága $m_\sigma[(\beta_l-\tau)^\omega - (\beta_k-\tau)^\omega]$ $(k \neq l)$, mely nagyobb, mint $\frac{1}{\beta_l^\omega} f^*\left(\frac{x}{\beta_l^\omega}\right) - \frac{1}{\beta_l^\omega} f^*\left(\frac{\sigma x}{\beta_l^\omega}\right)$ és $\frac{1}{\beta_k^\omega} f^*\left(\frac{x}{\beta_k^\omega}\right) - \frac{1}{\beta_k^\omega} f^*\left(\frac{\sigma x}{\beta_k^\omega}\right)$ csúcshelyeinek távolsága, $m_\sigma(\beta_l^\omega - \beta_k^\omega)$. Ebből következnek állításaink.



37. ábra

A gyakorlatban a $k(x)$ szuperpozícióra először a formáns egyszerű csökkentésének módszerét alkalmazzuk, egy már tárgyalt módon, s azután — akár grafikus eljárással is — az $R_\sigma(y)$ függvény képezési utasítását. Ezzel megkapjuk a most $b(y, \lambda)$-val jelölhető tesztfüggvényt.

Az $f(x, \beta_k) = \frac{1}{\beta_k^\omega} f^*\left(\frac{x}{\beta_k^\omega}\right)$ ($\omega > 0$, adott) esetben elvégzendő lépéseket szemlélteti a 37. ábra.

$\sigma$-t *előre* nehéz megadni; több $\sigma$-értékkel megszerkesztjük a tesztfüggvény-görbe közelítését és az ábrák egybevetésével igyekszünk megkapni a felbontást; ez rámutat az „optimális" $\sigma$-értékre.

Mindezt legjobban egy konkrét példa szemlélteti, melyből az alapelv jól látható.

PÉLDA

(0) szimmetrikus normális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása. Legyen

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{x^2}{4\beta_k}}}{\sqrt{4\pi\beta_k}} \qquad (0 < \beta_1 < \dots < \beta_N < A_2).$$

A komponensek eleget tesznek a leírt feltételeknek, mert szimmetrikus stabilis sűrűségfüggvények és az

$$R_\sigma^*(x) = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}} - \frac{e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}}\right] \qquad (\sigma > 1)$$

függvény $\left(2\sqrt{\frac{\log \sigma^2}{\sigma^2 - 1}}\right)$ egycsúcsú $(0, \infty)$-en. A komponensek $\frac{1}{\beta_k^{1/2}} \varphi\left(\frac{x}{\beta_k^{1/2}}\right)$ $\left(\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}}\right)$ típusúak; $\beta_k$ $(A_2, 0)$ monoton formánsa a $k$-adik görbéjének. A $\beta_k$-t $\beta_k - \tau$-ba $(0 < \tau < \beta_1)$ tagonként átviszi a formáns egyszerű csökkentésének módszere, alkalmazva a III. 1. §. 1.1.-ben leírt valamelyik módon $k(x)$-re. Végrehajtása után $R_\sigma(y)$ képzési módját alkalmazva, az ekkor előálló szuperpozíció

$$g^*(y, \beta_k^{1/2}, \tau) = \left(\frac{\sigma}{\sigma - 1}\right)\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4(\beta_k - \tau)}}}{\sqrt{4\pi(\beta_k - \tau)}} - \frac{e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{4(\beta_k - \tau)}}}{\sqrt{4\pi(\beta_k - \tau)}}\right)$$

komponenseire a III. 2. §. II. feltétele teljesül (ezek $\left(\sqrt{\beta_k - \tau} \cdot 2\sqrt{\frac{\log \sigma^2}{\sigma^2 - 1}}\right)$ egycsúcsúak) é.i.t.. Végül a tesztfüggvény:

$$b(y, \tau) = \sum_{k=1}^{N} p_k \left(\frac{\sigma}{\sigma - 1}\right)\left(\frac{e^{-\frac{y^2}{4(\beta_k - \tau)}}}{\sqrt{4\pi(\beta_k - \tau)}} - \frac{e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{4(\beta_k - \tau)}}}{\sqrt{4\pi(\beta_k - \tau)}}\right).$$

Így tehát a problémát korábban tárgyaltra vezettük vissza. — Gyakorlatban először elvégezzük a formáns-csökkentés módszerét $k(x)$ *„mért"* adatain, majd az eredményből — pl. grafikusan — megszerkesztjük az $R_\sigma(y)$ függvény képzésének megfelelően $b(y,\tau)$ görbéje közelítését, mindezt különböző $\tau$ és $\sigma$ értékekre; az egyes ábrákat összehasonlítva kapjuk a felbontást.

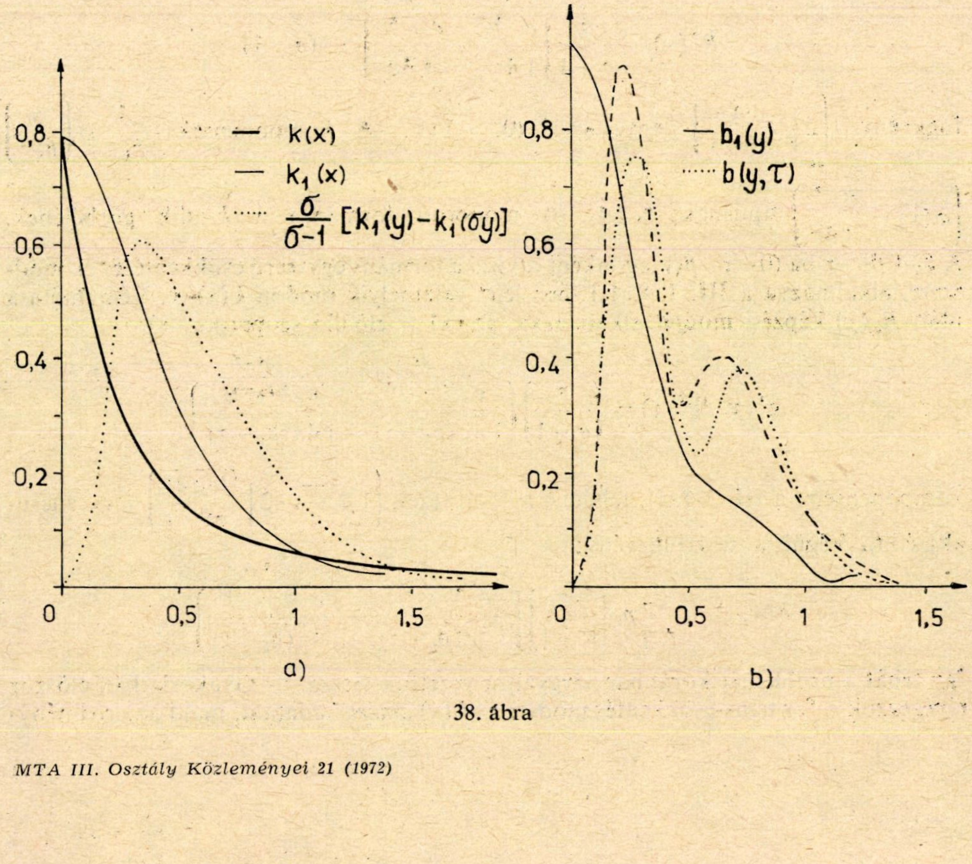
A következő példa fontossága miatt külön pontba kerül.

### 1.1. Exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása

Exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása esetében a felbontandó

$$k(x)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{e^{-\frac{x}{\beta_k}}}{\beta_k} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}\qquad (0<\beta_1<\dots<\beta_N<\Lambda_2)$$

szuperpozíciót az $x\to y^2$ transzformációval és az ordinátatengely körüli tükrözéssel átvisszük (0) szimmetrikus normális sűrűségfüggvények egy $k_1(x)=\sum_{k=1}^{N} p_k^* \dfrac{e^{-\frac{x^2}{4\beta_k^*}}}{\sqrt{4\pi\beta_k^*}}$ szuperpozíciójába, ahol $p_k^*=p_k\sqrt{\pi/\beta_k}$, $\beta_k^*=\beta_k/4$, és ezt az előbb leírt módon felbontjuk.




38. ábra

Az ekkor szereplő tesztfüggvény stb. könnyen felírható. — A gyakorlatban mindehhez elég nagy intervallumból kellenek *„mért"* $k(x)$ értékek.

PÉLDA. Metodologiai példaként tekintsük a III. 2. §-ban már vizsgált

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2x} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-8x} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

szuperpozíció felbontását, táblázatbeli, 4 tizedesjegyre lekerekített értékek felhasználásával. A 38a részábrán ——— vonallal $k(x)$ görbéjét, ——— vonallal pedig $k_1(x)$-ét rajzoltuk meg.

Az 38b részábrán $x>0$ esetére a ——— vonallal megrajzolt görbe a formáns egyszerű csökkentése alapján kapott $b_1(y)$ függvény közelítésének görbéje, $\tau=1/16$ mellett, melyet az V. 2. §. módszerével kaptunk, ................ pedig a $b(y, \tau)$ tesztfüggvény görbéje ($\tau=1/16, \sigma=3/2$), — ahogy azt III. 2. §. 1.-ben leírtuk. A görbe elég jól megmutatja — még az eredményhibák figyelembevétele mellett is — hogy $k(x)$-nek két komponense van. — — — — a pontos tesztfüggvény görbéje, összehasonlításul.

Érdekességként bemutatjuk a 38a ábrán ............. vonallal megrajzolva $\frac{\sigma}{\sigma-1}[k_1(y)-k_1(\sigma y)]$ görbéjét is, $\sigma=3/2$ mellett. Ez különvált csúcsokat nem mutat.

**Kiegészítések és problémák III. 2. §-hoz**

1. A III. 1. §. *Kiegészítések és problémák* III. 1. *§-hoz* részében az $\mathscr{A}$-módszerrel kapcsolatban tett megjegyzések értelemszerűen a $\mathscr{B}$-módszerre is érvényesek.

2. A 2. §. 1.-ben leírt módszerben a tesztfüggvény könnyen felírható a felbontandó szuperpozíció karakterisztikus függvénye segítségével is, ez a kifejezés azonban túl bonyolult ahhoz, hogy pl. az V. 2. §-beli módszerrel belőle tesztfüggvény-közelítést szerkesszünk.

3. A 2. §. példájának megoldása *korrekt* probléma, a 2. §. 1. módszerének végrehajtása azonban *inkorrekt*. Ez hátrányos, de az előzőnek is van hátránya: nagy intervallumból kellenek „mért" szuperpozícióadatok. — *Korrekt problémára vezető* tesztfüggvény-képzés bevezetésének — legalábbis elméleti — lehetőségére mutatnak a következők. Legyen a felbontandó szuperpozíció

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\beta_k^{\Omega}} f\left(\frac{x}{\beta_k^{\Omega}}\right) \qquad (0<p_1 \leqq \dots \leqq \beta_N < A_2;\ \Omega>0),$$

ahol $f(x)$ (0) egycsúcsú és vagy 1. ($A_1$) sűrűségfüggvény, vagy 2. ($A_2$) sűrűségfüggvény — és mindkét esetben létezik minden momentuma; végül $\Omega=1/2$ ha $f(x)$ páros, és egyébként $\Omega=1$. Definiálja a III. 2. §. I. feltételebeli, az $\frac{1}{\beta_k^{\Omega}} f\left(\frac{x}{\beta_k^{\Omega}}\right)$ függvénnyel összefüggésbe hozandó $g\left(y, \omega(\beta_k), \tau\right)$ függvényt (l. III. 2. §.)

$$g(y, \omega(\beta_k), \tau) = \frac{1}{\tau^p} \Phi\left(\frac{\beta_k y - R}{\tau^p}\right) \qquad (0<\tau<T_2),$$

ahol $R>1, p>0$ adott, $\Phi(x)$ egész függvény, és egy (0) egycsúcsú sűrűségfüggvény konstansszorosa. Mivel $\tau$ $(T_2, 0)$ monoton formánsa ez utóbbi sűrűségfüggvény görbéjének, a III. 2. §-ban szereplő I., II. és III. feltételek teljesülnek, ha tesztfüggvénynek a

$$b(y)=\sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\tau^p} \Phi\left(\frac{\beta_k y-R}{\tau^p}\right)$$

függvényt vesszük. $R, p$ változtatásával a tesztfüggvény használhatósága javítható.

Az $\frac{1}{\beta_k^\Omega} f\left(\frac{x}{\beta_k^\Omega}\right)$ függvénnyel összefüggésbe hozandó III. 2. §-beli $g(y, \omega(\beta_k), \tau)$ függvény konkrét alakját úgy kapjuk meg, hogy a

$$\Phi\left(\frac{\beta_k y-R}{\tau^p}\right)=\Phi\left(\frac{\beta_k y}{\tau^p}-\frac{R}{\tau^p}\right)$$

függvényt *Taylor*-sorba fejtjük és az ebben fellépő $\beta_k$ hatványt $f(x)$ megfelelő momentumával fejezzük ki; végül is (a szereplő szumma és integrál felcserélhetőségét feltételezve)

$$g(y, \omega(\beta_k), \tau)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x^{\frac{1}{\Omega}} y, R, \tau) \frac{1}{\beta_k^\Omega} f\left(\frac{x}{\beta_k^\Omega}\right) dx,$$

ahol

$$K(x^{\frac{1}{\Omega}} y, R, \tau)=\frac{1}{\tau^p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(R/\tau^p)(-1/\tau^p)^n x^{n/\Omega} y^n}{n!\, \mu_{n/\Omega}}$$

$$\left(\mu_n=\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, dx\right).$$

A tesztfüggvény ekkor

$$b(y)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x^{\frac{1}{\Omega}} y, R, \tau)\, k(x)\, dx.$$

Elméletileg ezzel a feladat megoldott, mert ezen integráltranszformáció végrehajtása korrekt probléma. *Numerikus* szempontból azonban nehézségek vannak. Nem a végtelen integrál-határok — az ezek okozta nehézség a V. 4. §. 1.-ben leírtakhoz hasonlóan hidalható át —, hanem főleg az, hogy a $K(x^{\frac{1}{\Omega}} y, R, \tau)$ mag integrálja végtelen, ami a $k(x)$ „mért" értékeiben levő hibát, amit szintén transzformál az eljárás, hatalmasan megnöveli. Így tehát a gyakorlatban mindezt csak óvatosan lehet alkalmazni.

(0) *szimmetrikus normális sűrűségfüggvények szuperpozíciója felbontásának* alesete gépiesen kiszámítható az előzőkből; csak mint elméleti érdekességet említjük meg, hogy a feltételeknek megfelelő $\Phi(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ függvényt használva és $\Omega=1/2$,

$p = 1/2$-del $\left(\text{itt } \mu_{2n+1} = 0,\ \mu_{2n} = \dfrac{(2n)!}{n!}\ (n=0, 1, \ldots)\right)$

$$K(x^2y, R, \tau) = \frac{e^{-\frac{R^2}{2\tau}}}{\sqrt{2\pi\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{He_n(R/\sqrt{\tau})(1/\sqrt{\tau})^n x^{2n} y^n}{(2n)!}.$$

*Exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciója felbontásának* esetében pedig, az előbbi $\Phi(x)$-et véve és $\Omega=1$, $p=1/2$-del (itt $\mu_n=n!$, $(n=0, 1, \ldots)$)

$$K(\xi, R, \tau) = \frac{e^{-\frac{R^2}{2\tau}}}{\sqrt{2\pi\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{He_n(R/\sqrt{\tau})(-1/\sqrt{\tau})^n \xi^n}{(n!)^2}.$$

Az $\dfrac{1}{\tau^p}\Phi\left(\dfrac{\beta_k x - R}{\tau^p}\right)$ függvény persze nem az egyetlen szóba jövő típus. Vehető helyette egyes esetekben pl. a

$$\Psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta_k^{\frac{1}{\tau}+1} x^{\frac{1}{\tau}} e^{-\frac{\beta_k x}{\tau}}}{\tau^{\frac{1}{\tau}+1}\Gamma(1/\tau+1)} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

Gamma-sűrűségfüggvény, ahol $1/\tau$ egész szám. Ez $(1/\beta_k)$ egycsúcsú bármely $\tau$-ra és ha $\tau$ csökken, görbéje elkeskenyedik; ez pl. abból látható, hogy karakterisztikus függvénye, $\psi(t) = \dfrac{1}{(1-i\tau t/\beta_k)^{\frac{1}{\tau}+1}} e^{\frac{it}{\beta_k}}$-hoz tart, ha $\tau \downarrow 0$. Az ehhez tartozó, a tesztfüggvényt előállító magfüggvény a fenti $K(x^{\frac{1}{\Omega}} y, R, \tau)$-nál leírt módon könnyen kiszámítható, de nem lesz csupán $x^{\frac{1}{\Omega}} y$ függvénye.

*Exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása* esetében ezt a $\Psi(x)$ sűrűségfüggvényt véve $\Phi(x)$ helyett, a tesztfüggvényt szolgáltató integráltranszformáció magja

$$K(x, y, \tau) = \frac{(xy/\tau)^{\frac{1/\tau+1}{2}}}{y(1/\tau)!} J_{1/\tau+1}\left(2\sqrt{xy/\tau}\right)$$

lesz ($1/\tau$ egész szám), ahol $J_n(x)$ első fajú Bessel-függvény.

4. Elméletileg érdekes, hogy *exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása* megkísérelhető úgy is, hogy

$$k(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} p_k \dfrac{e^{-\frac{x}{\beta_k}}}{\beta_k} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

-hez nem valamelyik fenti tesztfüggvényt rendeljük hozzá, hanem olyan integrál-transzformációt hajtunk végre rajta, mely az egyes komponenseket cosinus-függvényekbe viszi át (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*). Az így kapott függvényt azután a *periodogram-analízis* eszközeivel kezelve határozzuk meg az ismeretlen paramétereket. A fenti $K(x^{\frac{1}{\Omega}}y, R, \tau)$ mag megszerkesztésekor használt módszerrel igazolható hogy ilyen transzformáció

$$b(y) = \int_0^\infty \operatorname{ber}(2\sqrt{xy})\; k(x)\,dx,$$

ahol

$$\operatorname{ber}\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \xi^{4\nu}}{2^{4\nu}[(2\nu)!]^2}$$

a *Thomson*-féle ber-függvény; ekkor

$$b(y) = \sum_{k=1}^{N} p_k \cos \beta_k y.$$

Erre kell periodogram-analízist alkalmazni (l. SZEREBRENNIKOV, PERVOZVANSZKIJ *(1965)*). A módszer gyakorlati alkalmazásának azonban ugyanolyan nehézségei vannak, mint fentebb a $b(y)$-ra vezető transzformáció elvégzésének.

5. *Exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása* az utóbbi évtizedben egyre inkább előtérbe került nem egy kísérleti tudományban. A fenti ötletekhez hasonlók korábban is felmerültek. Egy ilyen a BROWNELL, CALLAHAN *(1963)* cikkében leírt. A szerzők a

$$k(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{e^{-\frac{x}{\beta_k}}}{\beta_k} & (x > 0) \qquad (0 < \beta_1 < \cdots < \beta_N < \Lambda_2) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

szuperpozícióra a

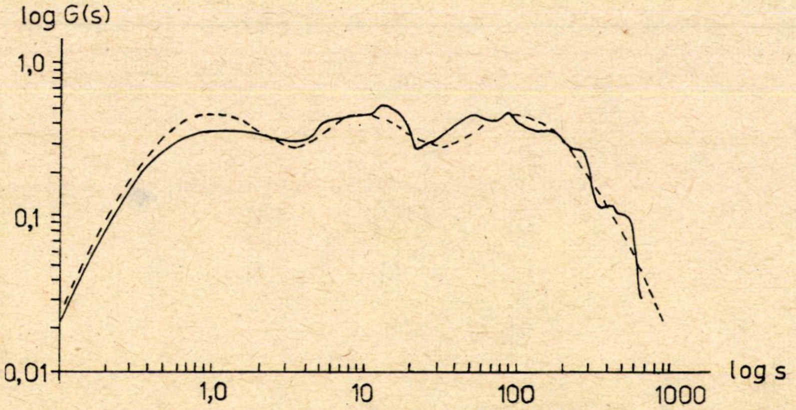
$$G(s) = \int_0^\infty sx \sin sx \cdot k(x)\,dx$$

transzformációt alkalmazták; ennek eredménye

$$G(s) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{2s^2\beta_k^2}{(s^2\beta_k^2+1)^2}.$$

E tesztfüggvény-komponensek görbéinek $s = 1/\beta_k$-nál vannak csúcsaik, így — főleg ha $p_k\beta_k = p_l\beta_l$ $(k \neq l)$ is nagyjából fennáll — $G(s)$ görbéjében a komponensek külön csúcsokkal mutatkoznak meg.

E módszer numerikus végrehajtásának számos nehézsége van (pl. a mag integrálja végtelen), ami a „mérési" hibák befolyását nagyon megnöveli. Mindezeket részletesen ismerteti MEDGYESSY *(1971d)* munkája. Az említett szerzők munkájának két — metodológiai példát képviselő — ábráját mutatja egyesítve a 39. ábra. Ezen ———————— vonallal rajzoltuk meg a $G(s)$ tesztfüggvény közelítésének a leírt módon kapott görbéjét, ha $k(x)=e^{-kx}+10\,e^{-10kx}+100\,e^{-100kx}$, melyre még 10%-os




39. ábra

normális eloszlásfüggvényű véletlen hiba van rávive ($k$ adott). Itt $p_k\beta_k=p_l\beta_l=1/k$ ($k\neq l$). Három csúcs látható, ami a három komponensre utal. A — — — — — — vonalú görbe az egzakt $G(s)$ tesztfüggvény görbéje, az eljárás jóságának jellemzésére.

Rokon módszereket, főleg kritikájukat közli LANDAHL *(1963)*.

6. Az előbbi *exponenciális sűrűségfüggvény-szuperpozíció felbontása* régebbi módszerei közül ide kívánkozik GARDNER, GARDNER, MEINKE *(1959)* módszere. Ez ugyan *inkorrekt* problémára vezet, mindenesetre azonban a legelterjedtebbek közé számítható. Lényege a következő. Új paramétereket bevezetve, a szuperpozíciót

$$k(x)=\sum_{k=1}^{N}p_k^*e^{-\beta_k^*\lambda}=\int_0^\infty e^{-\lambda x}g(\lambda)\,d\lambda$$

alakra hozták, ahol — *formálisan* —

$$g(x)=\sum_{k=1}^{N}p_k^*\delta(x-\beta_k^*)$$

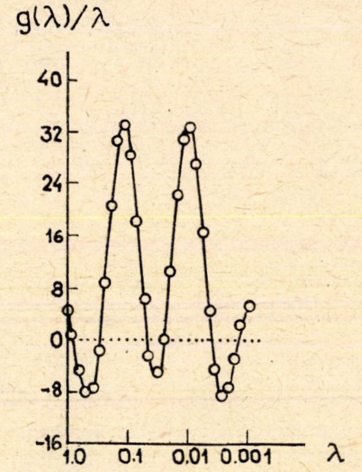
($\delta(x)$ a *Dirac*-féle „deltafüggvény"). Formálisan $g(x)$-re tehát integrálegyenlet áll fenn, melynek megoldása megadja a $p_k$-kat, vagyis $N$-t. A $\lambda=e^{-y}$, $x=e^v$-vel bevezetett új változókkal a szerzők ezt az integrálegyenletet átalakították az

$$e^vf(e^v)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-e^{(v-y)}}e^{(v-y)}g(e^{-y})\,dy$$

konvolúciós integrálegyenletté, majd annak *Fourier*-transzformáltakkal felírt

$$g(e^{-y}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iyt}F(t)}{K(t)}dt \quad \left(F(t) = \mathbf{F}[e^{y}f(e^{y});t],\ K(t) = \mathbf{F}[e^{-e^{y}}e^{y};t]\right)$$

megoldását numerikus módszerekkel közelítették $k(x)$ „mért" adatai felhasználásával. Ennek során a *Dirac*-féle „deltafüggvényt" is hegyes csúccsal közelítették. Numerikus részletek és számos példa az idézett cikkben található; egy részüket közli MEDGYESSY *(1971d)* is. — Az egyik metodologiai példát mutatja be a 40. ábra.




40. ábra

Ebben $k(x) = 1000\,e^{-0{,}1x}+1000\,e^{-0{,}01x}$ szerepelt, az ordinátaértékeket véletlen (mesterséges) „hibákkal" torzították el, hogy egy tényleges bomlási görbe ordinátaértékeihez hasonlítsanak. Az o-ök $g(\lambda)/\lambda$ közelítő értékei; ez — a jelzett numerikus módszerrel — közvetlenebbül megkapható, mint $g(\lambda)$. A két uralkodó csúcs utal a két komponensre.

A módszer általában elég sikeres. A numerikus nehézségek egyik oka az, hogy a fenti integrálegyenlet megoldása — még ha $g(x)$ nem is állna Dirac-delta „függvényekből", *inkorrekt* probléma.

MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)* megmutatta, hogy a *Dirac*-féle „deltafüggvény" használata könnyen kikerülhető, ugyanis a

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y, \tau)\ g^{*}(y)\,dy \quad (x>0)$$

integrálegyenlet megoldása, ahol

$$K(x, y, \tau) = e^{-yx-\tau x^2},$$

$$g^{*}(y) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(y-\beta_k^{*})^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}},$$

ami kis $\tau$ esetén alkalmas tesztfüggvénynek, $\beta^*$ és $N$ meghatározásához. ($\tau\downarrow 0$ esetén egyébként $g^*(y)$ formálisan átmegy a fenti $g(y) = \sum_{k=1}^{N} p_k\delta(x-\alpha_k)$ kifejezésbe.) Mivel

$$e^{\tau x^2}k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy}g^*(y)\,dy,$$

a feladat egy *kétoldali Laplace-transzformáció invertálása.* — A probléma *inkorrekt* voltán mindez, persze, nem változtat.

7. A 2. §. 1.1.-hez csatlakozhat azonos rendű Gamma-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása, a következő módon: Legyen

$$k(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{x^{\gamma-1}e^{-\frac{x}{\beta_k}}}{\beta_k^{\gamma}\Gamma(\gamma)} & (x>0) \\ 0 & (x\leqq 0) \end{cases} \qquad (0<\beta_1<\dots<\beta_N<\Lambda_2)$$

($\gamma$ adott). Ez $x^{\gamma-1}$-gyel való osztással exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciójára vezethető vissza, ami az idézett helyen közöltek szerint tárgyalható.

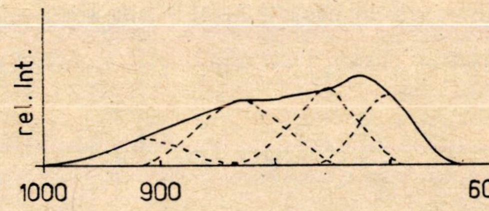
## 3. §. „Ad hoc" módszerek

Ebben a paragrafusban sűrűségfüggvény-szuperpozíciók felbontásának az eddigiektől lényegileg eltérő, mindazonáltal a gyakorlatban ma is használt módszereit foglaljuk össze, — amennyire egyáltalán osztályozni lehet őket az alábbi szempontok szerint.

### A) Grafikus módszerek

1. Az adott szuperpozíció-grafikon végén levő komponensek görbéjének bal, illetve jobb felét a többitől nem befolyásoltnak tételezik fel. — E szakaszokról — a komponens analitikus alakját ismerve — felveszik egyes pontok koordinátáit s azokból a szélső komponensek ismeretlen *paramétereit kiszámítják.* Ezzel a legszélső két komponens analitikus alakja megvan; görbéjüket megrajzolják és grafikusan levonják a kiindulásiból. A maradékon az eljárást megismétlik é.í.t.. Így végül az összes komponensek paramétereit — vagyis számukat is — megkapják. — Ha több komponens megmutatkozik eleve, az eljárás első lépése rögtön alkalmazható azokra is.

Normális sűrűségfüggvény-szuperpozíciók esetére ilyen eljárást közölt többek közt SCHELLENBERG *(1932);* KISS, SÁNDORFY *(1948);* WALLNER, ULKE *(1952);* IDU, CUCU *(1959).* — SCHELLENBERG *(1932)* egy spektrumintenzitás-eloszlásgörbe felbontását a 41. ábra mutatja be. Ezen ———— vonallal megrajzolva CaOAg ultraviolet emissziós spektrumának relatív intenzitáseloszlás-görbéje látható; normális sűrűségfüggvény-szuperpozíció jelenlétét tételezték fel. A — — — — — vonallal megrajzolt görbe mutatja a komponensek görbéit; ezeket a leírt eljárással kapták. Az eredmény jó összhangban volt a valósággal.



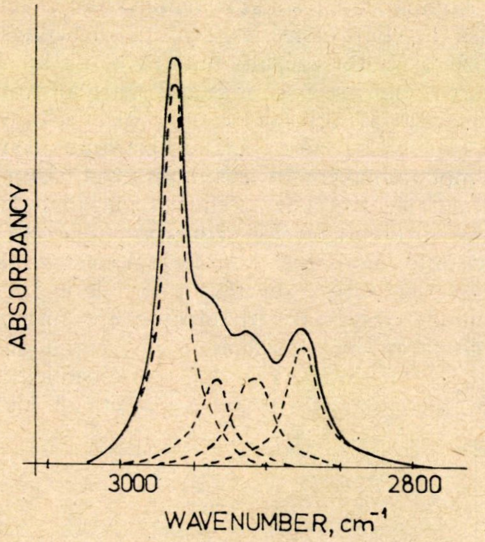

41. ábra

A módszer egy módosítását közli — eltorzított normális sűrűségfüggvények esetére — MEDGYESSY, MAGOS *(1954)*. Exponenciális sűrűségfüggvény-szuperpozíció esetére is számos szerző leírta a — különben triviális — eljárást.

2. Az előbbi eljárás úgy módosítható, hogy görbepont-koordináták leolvasását mellőzve, „szemre" adott típusú görbéket *illesztve* vagy szélső görbeszakaszokat a valószínű csúcsmagasságvonal körül áttükrözve — esetleg „görbevölgyeknél" függőlegeseket húzva és az így kapott részleteket egy-egy komponenshez rendelve — emelünk ki komponens-görbéket. Bizonyos korrigáló eljárások is szerepelnek e nehezen áttekinthető csoportban. Normális sűrűségfüggvény-szuperpozíciók esetére ilyen eljárást közöl WIEDEMANN *(1947)*; IDU, CUCU *(1959)*; MORISON SMITH, BARTLET *(1961)*; KAPLAN, GURVICS *(1963)*. POULIK, PINTERIC *(1956)* elektronikus számológéppel végeztették el eljárásukat. — Emberi vér-szérum *Tiselius*-féle készülékkel történt elektroforézise diagramjába a szélek befelé tükrözésével, ill. „szemre" hozzáillesztéssel belerajzolt normális sűrűségfüggvény-görbék láthatók ........ vonallal feltüntetve III. 1. §. 1.1.1.1.-ben a 23b ábrán (MEDGYESSY *(1953)*, *(1954c)*).

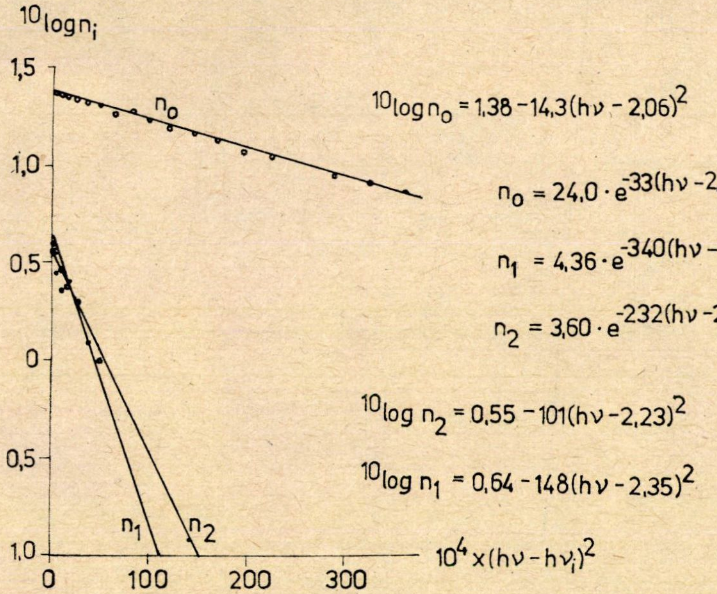
3. Elsősorban a szélső, ismert típusú komponensgörbéket könnyű azonosítani ismert paraméterűvel úgy, hogy adott paraméterűek képét megfelelően felnagyítva, sorra *rávetítjük* a felbontandó szuperpozíció görbéjére és a legegyezőbbet tekintjük az ott szereplőnek. A rávetített kép oda is rajzolható; grafikus levonás után megismételik az eljárást. Normális sűrűségfüggvény-szuperpozíciókhoz szerkesztett ilyen készüléket ír le LABHART *(1947)*. Ebben azonos magasságú, különböző szórású *Gauss*-görbék diapozitívjai vannak (a cikk közli képüket is); magasságváltoztatásukat a kivetített kép nagyságának változtatásával érik el.

4. Ettől már csak egyetlen lépés volt *elektronikusan előállítani* adott típusú és paraméterű *görbéket*, ill. adott számú ilyen szuperpozícióját és katódsugárcső ernyőjén megjelenő képüket paramétereik változtatásával az ernyőre ragasztott, átlátszó papírra rajzolt felbontandó szuperpozíció-képpel *egyeztetni*. — Normális és *Cauchy*-sűrűségfüggvény-szuperpozíciók esetére ilyen készüléket ír le NOBLE, HAYES, jr., EDEN *(1959)*, normális sűrűségfüggvények esetére SYDOW, DITTMANN *(1963)*, példákkal illusztrálva leírását. Az elsőként említett szerzők egyik példáját mutatja be a 42. ábra. Ezen ———————— vonallal iso-oktán (2,2,4)-trimetilpentán abszorbencia-eloszlás görbéjét mutatjuk be, melyet *Cauchy*-sűrűségfüggvény („*Lorentz*-eloszlás") szuperpozícióhoz tartozónak tételeztek fel. Az említett készülékkel végrehajtott felbontás eredményét a — — — — — vonallal megrajzolt görbe mutatja. Négy komponens jelenléte volt megállapítható. — Ezek a berendezések tulajdonképpen *illesztést* végeznek, a komponens-számot ennek jóságából határozzák meg, — ami nem okvetlenül a tényleges számuk.




42. ábra

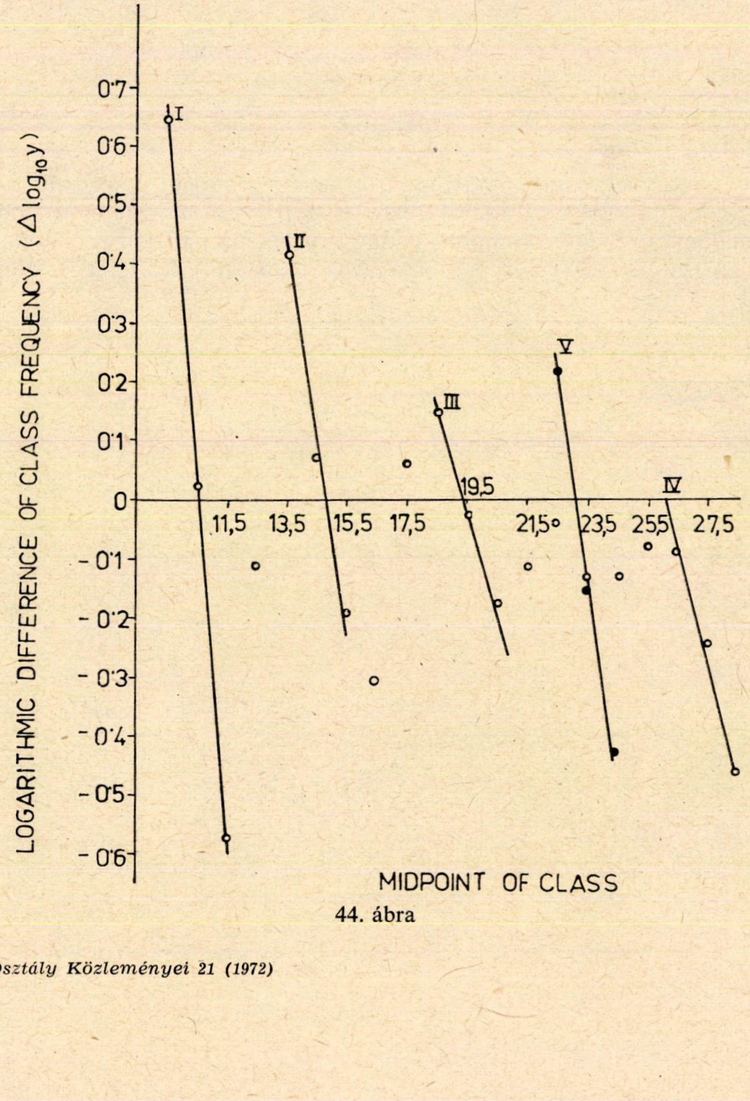
5. A grafikus felbontási módszerekben nagyon elterjedt a speciális *koordinátapapírok* használata, illetve az adatok bizonyos *áttranszformálás* utáni felrajzolása lineáris léptékben. Az adott komponens-típushoz készült papíron egy komponensnek egyszerű görbetípus (egyenes, parabola, hiperbola stb.) felel meg, szuperpozíció




43. ábra

felrajzolása esetén a komponensek sokszor különváltan mutatkoznak meg. Egyes komponensek levonása, az eljárás ismétlése stb. itt is lehetséges. — Normális sűrűségfüggvény-szuperpozíciók esetét szépen mutatja be — nem a lineáristól eltérő osztású koordináta-papír, hanem a koordináták leírt áttranszformálása révén — Szigeti *(1947)*. Ez látható a 43. ábrán. A o o o o o-ök cink-beryllium-szilikát emissziós spektruma intenzitás-eloszlása mérési adatai logaritmusát mutatják, a rezgésszám bizonyos másodfokú polinomjaként. A leírt módszerrel három egyenest illeszthettek az adatpontokhoz; ez alátámasztotta azt az elméleti meggondolásokkal nyert feltevést, hogy három normális sűrűségfüggvény szuperpozíciója van a háttérben.

Tulajdonképp hasonló módszerek szerepelnek a *matematikai statisztikában*, amidőn normális sűrűségfüggvények keveréke a sűrűségfüggvénye annak a sokaságnak, amelyből vett mintát vizsgálnak; itt tulajdonképp hisztogrammot vizsgálnak, ami a sokaság sűrűségfüggvényének közelítése és így vizsgálódásunk körébe tartozik. Példaként megemlítjük a Bhattacharya *(1967)* cikkében leírtakat, melyek normális sűrűségfüggvény-szuperpozíciók felbontására is közvetlenül alkalmazhatók. (E cikk-




44. ábra

ben $\log f(x+h)-\log f(x)$ van felrajzolva; ekkor egy-egy komponensnek egyenes vonal felel meg.) A cikk egyik példája a 44. ábrán látható. A ooooo-ök $\log f(x+h)-$ $-\log f(x)$ egy speciális hisztogramból kiszámított közelítő értékeit mutatják, ahol $f(x)$ ismeretlen számú normális sűrűségfüggvény szuperpozíciója és $h$ alkalmas konstans. Ekkor egy *Gauss*-görbének egy egyenes felel meg; ennek figyelembevételével illesztették az adatokhoz az I.—IV. egyeneseket. A jobb szélső egyenes adatait grafikusan levonva, még egy komponens megmutatkozott (ezt a ........ vonallal rajzoltuk meg; V.). Összesen öt komponens volt felfedezhető a szuperpozícióban.

Hasonló módszereket ír le HARDING *(1949)* (lognormális sűrűségfüggvények szuperpozíciója felbontására is); CASSIE *(1954)*; DAEVES, BECKEL *(1958)*.

Exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciója szemilogaritmikus papír segítségével való felbontásának egy a szokásosnál tökéletesebb módszerét adja DEFARES, SNEDDON *(1960)*; l. még PETER, PETER *(1960)*. Bár az A) alatti eljárások nemegyszer eleve *hatástalanok* — pl. ha egyes komponensek túl közel vannak egymáshoz — mégis igen népszerűek mindmáig.

### B) Algebrai jellegű módszerek

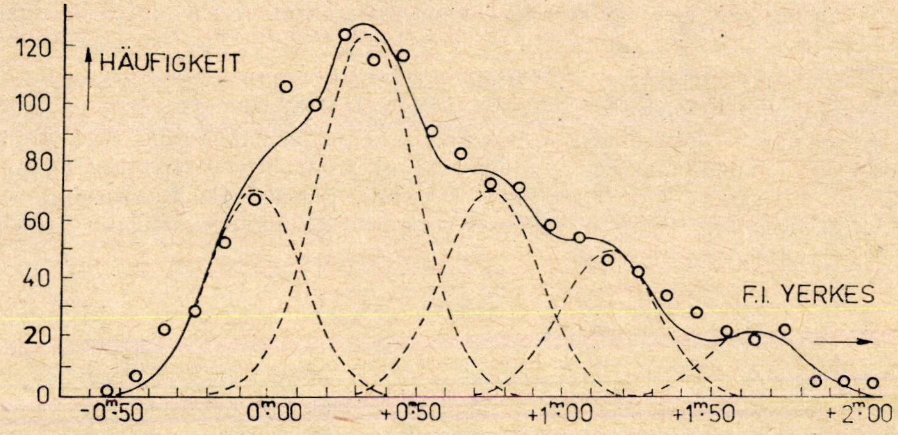
1. Ezek egy része tulajdonképp *approximálja* a felbontandó szuperpozíciót *adott* $N$ komponensszámú, hasonló típusú szuperpozícióval, melynek ismeretlen paramétereit a legkisebb négyzetek vagy a momentumok elve stb. alapján határozzák meg. $N=2, 3, \ldots$-ra elvégezve ezt, a (valamilyen értelemben) legjobban illeszkedő megoldáshoz tartozó $N$ és egyéb paraméterértékeket fogadják el az igazinak. — A legkényelmesebb persze a momentumok módszerét alkalmazni. Normális sűrűségfüggvények szuperpozíciója esetére — *egyenlő* szórásokat feltételezve — DOETSCH *(1928)* cikke nagyon jellemző. Ebben — $N$ értékét rögzítve — az adott szuperpozíció-görbéből numerikus, grafikus, vagy gépi módszerrel kiszámított momentumokat egzakt kifejezésükkel azonosítja; ez magasabb fokú algebrai egyenletrendszert szolgáltat az ismeretlen paraméterekre. Ha a szórás ismert, ez az egyenletrendszer egy $N$-ed fokú egyenlet és egy $N$ lineáris egyenletből álló egyenletrendszer megoldása révén klasszikus módszerrel megoldható (GAUSS *(1866)* pp. 165—196; RUNGE, KÖNIG *(1924)*). Bizonyos általánosításokat ért el ezzel kapcsolatban MEDGYESSY *(1954a)*, *(1961a)* pp. 217—219. — A megoldás képviselhet *inkorrekt* problémát is (vö. V. 1. §.).

DOETSCH *(1928)* feltételezte, hogy ha $N$-re valamilyen felső korlát ismert és ezzel dolgoznak, akkor a paraméterek egy részére közel zérust kapnak az eljárással, amiből aztán $N$ tényleges értékére lehet következtetni; ez azonban nem mindig igaz.

E módszert sikerrel alkalmazta DOETSCH *(1928)* ugyanazon $H_\alpha$ spektrumvonal intenzitáseloszlás-görbéje vizsgálatakor, amelyet a formáns egyszerű csökkentése módszerével is kezelt (vö. III. 1. §. 1.1.1.1.). — Nagyobb hibájú adatokból indulva ki, két komponens feltételezése értelmezhetetlen eredményt adott; ebből arra következtetett, hogy harmadik komponens is van; $N=3$-mal azonban ugyanazon görbével már nem ismételte meg az eljárást, hanem egy későbbi, jobb felvételt használt fel és meg is kapta három komponens adatait. A felbontást aztán az általa bevezetett egzakt módszerrel is elvégezte; ekkor három komponens mutatkozott meg (vö. III. 1. §. 1.1.1.1.), ami a fentieket csak támogatta.

Elvileg e módszerre támaszkodott SCHELLENBERG *(1932)* is; egyenlő szórások esetében szép eredménnyel alkalmazta STICKER *(1930a)*, *(1930b)*. Ezekről részletesen tájékoztat többek közt MEDGYESSY *(1971d)* is.

A 45. ábra STICKER *(1930a)* egyik eredménye. Ezen a ooooo-rel jelölt pontok egy bizonyos csillag-összesség 1404 tagja színfrekvencia-eloszlási adatai, amelyeket nor-




45. ábra

mális sűrűségfüggvények szuperpozíciójából valóknak tekintettek. A — — — — vonal mutatja a momentum-módszerrel kapott komponensek görbéit, amidőn $N=5$-öt vettek. A ———— vonallal rajzolt görbe ez utóbbi *Gauss*-görbék szuperpozíciója. Minthogy ez jól illeszkedett a mérési adatokhoz, az $N=5$ feltevést elfogadták és az ennek alapján kapott paramétereket a valóságos állapotra jellemzőknek tekintették.

Világos, hogy a fenti momentum-módszernek megfelel minden olyan *matematikai statisztikai* eljárás, mely a momentumokból vezet le becsléseket egy sokaság keverék-sűrűségfüggvényének paramétereire, mert a momentumok egy szuperpozíció görbéjéből is kiszámíthatók. — Klasszikus példa PEARSON *(1894)* cikke, melyben egy sokaság jellemzője sűrűségfüggvényét két normális sűrűségfüggvény keverékével közelíti meg. A K. PEARSON által adott megoldás azonban 9-ed fokú algebrai egyenlet gyökeinek kiszámítását kívánta; ezt a megoldásmenetet később sem tudták lényegesen leegyszerűsíteni. — Újabb eszközökkel az utóbbi évtizedben többször is nekifogtak a kérdéskör tárgyalásának, — kis $N$ esetében elég jó eredménnyel.

*Exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása* is tárgyalható a momentum-módszerrel; ötletek meríthetők matematikai statisztikai munkákból (GUMBEL *(1939)*, RIDER *(1961)*). A momentumok felírásával itt is magasabb fokú algebrai, de kezelhető egyenletrendszerre jutunk. A legkisebb négyzetek módszerével vizsgálta ugyanezt a problémát többek közt GIACCARDI *(1939)*.

2. Nemcsak kiszámított momentumokkal, hanem a szuperpozíció ekvidisztáns pontokban „mért" értékeivel is megalkotható *egyenletrendszer*, melynek megoldása az ismeretlen paramétereket szolgáltatja. Megkönnyíti a dolgot, ha a komponensek bizonyos rekurzív összefüggésnek tesznek eleget. Utóbbira klasszikus példa expo-

nenciális sűrűségfüggvények (ismert komponensszámú) szuperpozíciójának felbontása, a szuperpozíció ekvidisztáns pontokban felvett $y_i$ értékeivel megalkotott

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{N} P_i z_i^{2N-1} \qquad (i=1, \dots, 2N)$$

típusú egyenletrendszernek a $P_i$, $z_i$ ismeretlenekre való megoldása révén, amelyekből a szuperpozíció paraméterei kiszámíthatók *(Prony-féle módszer)*. — Ennek módosításai közül fontosak azok, amelyekben közelítőleg ismertek egyes paraméterek, és emellett iterációval is kombinálták (LANCZOS (1957) pp. 272—280.). Ismeretlen $N$ esetére is alkalmas módszer: HOUSEHOLDER (1950) pp. 28—32. — Az $y_i$ mennyiségek rekurziós egyenleteknek is eleget tesznek. Ezen az alapon is felírható egy egyenletrendszer, melynek megoldása az ismeretlen paraméterek közelítéseit adja (VARGA (1966)).

Az említettekben szereplő speciális egyenletrendszer megoldása a gyakorlatban egyáltalán nem egyszerű, részben azért, mert maga a probléma is sokszor *inkorrekt*. ALEKSZANDROV *(1970)* a feladatot a regularizációs módszerrel tárgyalta (vö. V. 1. §.), jó eredménnyel. Ismeretlen $N$ esetében $N$ valamilyen kínálkozó $N_1 > N$ korlátjával végezte el a számításokat, azt várva, hogy a valóságban nem létező komponensek paraméterértékeire közel zérust kap. — Numerikus kísérletek mindezt támogatták is.

3. Az 1. alatti ötletek akkor is megvalósíthatók, ha a felbontandó szuperpozíció komponenseire speciális *differenciálegyenletek* állnak fenn (THIONET *(1966)*). Ezen egyenleteket diszkrétizált alakra hozva és megfelelő számú $x$-értékre felírva, egyenletrendszert kapunk — a szuperpozíció „mért" értékeivel — az ismeretlen paraméterekre. A hibák befolyása itt nagyobb, mint a korábbi módszerekben.

4. *Cauchy-sűrűségfüggvények szuperpozíciója felbontásakor,* ahol

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\pi\beta_k} \frac{1}{1+(x-\alpha_k)^2/\beta_k^2},$$

felhasználható a következő

1. TÉTEL. *Annak, hogy egy* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *irreducibilis, racionális, valós együtthatós törtfüggvény előállítható legyen a*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\pi\beta_k} \frac{1}{1+(x-\alpha_k)^2/\beta_k^2}$$

$(p_k > 0, \beta_k > 0, (\alpha_k, \beta_k) \neq (\alpha_l, \beta_l) \quad (k \neq l))$ *alakban, szükséges és elégséges feltétele, hogy 1.* $Q(x)$*-nek csak egyszeres, komplex* $z_k$ *gyökei legyenek, 2.* $P(x)$ *fokszáma* $Q(x)$*-énél kisebb. 3.* $\operatorname{Re}\dfrac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = 0$ $(k=1, 2, \dots)$, *4.* $\operatorname{Im}\dfrac{P(z_k)}{Q'(z_k)} \operatorname{Im} \bar{z}_k > 0$ $(k=1, 2, \dots)$. *Ha* $p_k$ *negatív is lehet, 4. elmarad* (MEDGYESSY *(1961a)* pp. 162—163).

Ha adva van egy ilyen $k(x)$ szuperpozíció görbéje, ennek alkalmas „mért" ordinátaértékeivel $N=2, 3, \dots$-ra megszerkesztjük $k(x)$ racionális törtfüggvénnyel való közelítését; erre szolgáló módszert közöl többek közt SZOLODOVNIKOV

*(1952)* pp. 219—234. Ha megvan a legjobb közelítés, azt

$$\frac{T_k}{x^2+2U_k x+V_k} \quad (T_k>0)$$

típusú parciális törtekre bontjuk és meghatározzuk belőlük $T_k$, $U_k$, $V_k$-t, majd ezekből az ismeretlen paramétereket. — Persze, a valóságostól különböző $N$ mellett is kaphatunk igen jó közelítést; ez a módszer egyik gyengéje.

Mindezek gépiesen kiterjeszthetők általánosabb, irreducibilis *racionális tört-függvénnyel megadott sűrűségfüggvények szuperpozíciói* esetére is.

### C) Egy analitikus jellegű módszer

Valamilyen fizikai stb. rendszer a $t_j$ időpontokban szolgáltassa elméletileg a

$$Q_j = \sum_{k=1}^{R} \beta_k^{(j)} y_k(t_j) \qquad (j=1,\dots,k)$$

(„output") mennyiségeket ($\beta_k^{(j)}$ adott). $Q_j$ „mért" értékei legyenek $b_j$; továbbá, az $y_k(t)$ függvények elégítsék ki az

$$\dot{y}_\varrho(t)=f_\varrho[y_1(t),\dots,y_R(t)] \quad (\varrho=1,\dots,N;\ N\leqq R),$$

$$\dot{y}_{N+1}(t)=\dots=\dot{y}_R(t)=0$$

differenciálegyenlet-rendszert, ahol $y_k(0)=c_k$ és $f_\varrho[\xi_1,\dots,\xi_R]$ adott függvény. Meghatározandó $c_k$ a

$$\sum_{j=1}^{K}\left\{\sum_{k=1}^{R}\beta_k^{(j)} y_k(t_j)-b_j\right\}^2 = \min$$

feltételből. — E probléma — specializálva — azonos azzal, hogy a mért $b_j$ értékekhez adott típusú (s komponensszámú) szuperpozíciót kell illeszteni. Bellman, Kagiwada, Kalaba *(1965)*, Bellman, Kalaba *(1965)* munkáiban a *„differenciális approximációnak"* elnevezett módszerrel oldják meg a fenti feladatot, s ezzel együtt a szuperpozícióval való közelítés problémáját, a B) alattiakhoz hasonlóan, amivel aztán a felbontási problémát is megoldottnak tekintik.

### D) R. Bellman egy módszere

Bellman *(1960) exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontására*, ha annak alakja

$$f(x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{N} p_k \dfrac{e^{-\frac{x}{\beta_k}}}{\beta_k} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases} \qquad (0<\beta_1<\dots<\beta_N<\Lambda_2),$$

a következő módszert közölte. Megfelelő skálaválasztással írható $f(n)=f_n=$ $=\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k}{\beta_k}(e^{-\beta_k})^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Tekintsük a

$$C_r(i)=\begin{vmatrix} f_i & f_{i+1} & \cdots & f_{i+r} \\ f_{i+1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ f_{i+r} & \cdots & \cdots & f_{i+2r} \end{vmatrix} \qquad (i=0, 1, 2, \ldots;\ r=1, 2, \ldots)$$

*Casorati*-féle determinánsok sorozatát. Abból, hogy $f_n$ eleget tesz az

$$f_{i+N}=a_N f_i+a_{N-1}f_{i+1}+\cdots+a_1 f_{i+N-1} \qquad (i=0, 1, 2, \ldots)$$

differenciaegyenletnek $\left(a_v\ (v=1, \ldots, N)\right.$ alkalmas konstans$\left.\right)$, levezethető, hogy

$$C_r(i)\begin{cases} \neq 0 \\ =0 \end{cases} \text{ha} \quad \begin{matrix} r<N \\ r\geqq N, \end{matrix}$$

vagyis a $C_0(i)$, $C_1(i)$, ... sorozatban az *első* 0 értékű determináns indexe megadja $N$-t. Mindez közelítőleg igaz, ha $f_n$ „mért" értékeivel dolgozunk.

MEDGYESSY *(1966b)* megmutatta, hogy minden

$$k(x)=\sum_{k=1}^{N}p_k f(x, \beta_k)$$

típusú sűrűségfüggvény-szuperpozíció, mely alkalmas $x=a_n$ $(n=0, 1, \ldots)$ értékekre a

$$k(a_n)=\sum_{k=1}^{N}q_k\Phi(n)A_k^n$$

alakra hozható, ahol $\Phi(n)$ csak $n$-től függ, és $q_k>0$, $A_k>0$ $\beta_k$ függvényei, a jelen módszerrel tárgyalható, az előzőkben $k(a_n)/\Phi(n)$-t írva $f_n$ helyett. Például (0) *szimmetrikus normális sűrűségfüggvények szuperpozíciója felbontásakor,*

$$k(x)=\sum_{k=1}^{N}p_k\frac{e^{-\frac{x^2}{4\beta_k}}}{\sqrt{4\pi\beta_k}} \qquad (0<\beta_1<\cdots<\beta_N)$$

alakot tételezve fel,

$$a_n=\sqrt{n}, \quad A_k=e^{-\frac{1}{4\beta_k}}, \quad \Phi(n)\equiv 1, \quad q_k=\frac{p_k}{\sqrt{4\pi\beta_k}}$$

mellett a $k(\sqrt{n})=\sum_{k=1}^{N}q_kA_k^n$ kifejezést kapjuk, amely a fentiek szerint tárgyalható. — MEDGYESSY *(1966b)* megmutatta továbbá, hogy $\hat{f}_n=f_n+\varepsilon_n$ értékeket mérve, ez az analitikusan elegáns módszer csak óvatosan alkalmazható, mert az $\varepsilon_n$ hibák jelenléte a $C_r(i)$ determináns mintájára az $\hat{f}_n$-okból képezett $\hat{C}_r(i)$ determinánsok értékeiben — a gyakorlatban csak ezek állnak rendelkezésre — nagy ingadozást okozhat. Ha pl. $|f_n|\leqq M$, $|\varepsilon_n|\leqq\varepsilon$, a *Hadamard*-féle egyenlőtlenség segítségével levezethető, hogy

$$|\hat{C}_r(i)-C_r(i)|\leqq\left(M\sqrt{r+1}\right)^{r+1}\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{M}\right)^{r+1}-1\right]$$

és ez a korlát $r$-rel rohamosan növekedik. Ilyenformán bizonytalan, hogy $\hat{C}_r(i)$ zérus lesz-e, amikor $C_r(i)$ az, — és ezzel a közölt kritérium használhatósága is.

A felsorolt hátrányokat bizonyos fokig kiküszöböli PARSONS *(1968)*, *(1970)* munkáiban. Ezzel a módszer ismét előtérbe került.

### E) Különböző rendű Gamma-sűrűségfüggvények szuperpozíciója felbontásának két speciális esete

1. A

$$k(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{x^{k-1}e^{-x}}{\Gamma(k)} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

szuperpozíció felbontható annak alapján, hogy az $\left\{\int\limits_0^\infty L_n(x)\,k(x)dx\right\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ sorozat tagjai, ahol $L_n(x)$ *Laguerre*-polinom, az utóbbi ortogonalitási tulajdonságai folytán zérusok, ha $n \geqq N$, vagyis a sorozat-tagokat kifejező integrálok zérussá válását kell figyelni (MEDGYESSY *(1971d)*). Ha $N$ megvan, a $p_k$-ra könnyű egy egyenletrendszert megszerkeszteni. — A gyakorlatban a leírt kritérium alkalmazása stb. kényes feladat.

2. A

$$k(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{B^k x^{k-1}e^{-Bx}}{\Gamma(k)} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases} \qquad (B>0)$$

szuperpozíció felbontása, ha $B$ ismeretlen, úgy is lehetséges, hogy képezzük $k(x)$ *Laplace*-transzformáltját; ez $L(s) = \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{1}{(1-s/B)^k}$, ami $s=B$-re végtelenné válik. $B$ ismeretében a $k(x)e^{Bx}$ polinomot megszerkesztve, annak együtthatóiból $p_k$-t is meghatározhatjuk (MEDGYESSY *(1954c)*). A gyakorlatban mindez nem egykönnyen hajtható végre.

### F) Egy a formáns-változtatás módszerével rokon módszer

A formáns-változtatás módszerének alábbi kiterjesztése (MEDGYESSY *(1955a)*, *(1961a)* pp. 107—121) túlnő a III. fejezet keretein. Tegyük fel, hogy a

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k, \beta_k) \qquad (\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j);\ A_1 \leqq \beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_N < A_2)$$

szuperpozícióhoz, melyben $\beta_k$ $(A_2, 0)$ monoton formánsa a $k$-adik komponens görbéjének, *nem* szerkeszthető meg $k(x)$ alapján egy

$$b(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k, \beta_k-\lambda) \qquad (0<\lambda<\beta_1)$$

tesztfüggvény, viszont *megszerkeszthető* a

$$b_1(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{2} [f(x-\alpha_k, \beta_k - \lambda) + f(x-\alpha_k, \beta_k + \lambda)]$$

függvény, melyben $\lambda$ $(A_2, \beta_1)$ *tágabb értelemben monoton formánsa* $b_1(y, \lambda)$ komponensei görbéinek (vö. II. 4. §.), mikor is $b_1(y, \lambda)$ tesztfüggvénynek vehető.

Hogy konkrétizáljuk mondanivalónkat, legyen a fenti szuperpozíció

$$k^*(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k s_A(x-\alpha_k, B, \beta_k),$$

ahol $s_A(x, B, c)$ stabilis sűrűségfüggvény (vö. II. 8. §. 3., 4.), melyben $A$ és $B$ az alábbi táblázatbeli:

| $A$ | 1/2 | 1/2 | 1 | 3/2 | 3/2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | 1 | −1 | 0 | 1 | −1 |
| $A_2$ | −2 | 2 | −1 | −2 | 2 |
| $m$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |

A II. 8. §. 3.-ban láttuk, hogy ezekben és *csakis* ezekben az esetekben

$$\frac{\partial^2 s_A}{\partial C^2} - A_2 \frac{\partial^m s_A}{\partial x^m} = 0,$$

— ahol $A_2$ és $m$ a táblázatbeliek — $0<\lambda<\beta_1$ mellett ugyanilyen parciális differenciálegyenlet áll fenn a

$$b^*(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{2} [s_A(x-\alpha_k, \beta_k - \lambda) + s_A(x-\alpha_k, \beta_k + \lambda)]$$

függvényre is. Ha $\lambda$ $b^*(y, \lambda)$ komponenseinek $(A_2, \beta_1)$ tágabb értelemben monoton formánsa, $b^*(y, \lambda)$ tesztfüggvénynek vehető $k^*(x)$ felbontásához, ha $b^*(y, \lambda)$ $k^*(x)$ révén való meghatározásához felhasználjuk a II. 8. §. 6. tételét, azzal a megszorítással, hogy az $A=1$, $B=0$ esetet kivéve a szereplő paraméterértékek folytán $\lambda$ 0-tól csupán $\beta_1/\sqrt{2}$-ig változhat. Ekkor ugyanis

$$b^*(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} A_2^n \frac{d^{mn} k^*(x)}{dx^{mn}}.$$

Mivel a differenciálás *inkorrekt* probléma numerikus esetben (vö. V. 1. §.), e képlet a gyakorlatban csekély értékű; javulást pl. az hozna, ha az inkorrekt problémák tárgyalásakor bevezetett ún. regularizációs módszert a jelen sorfejtés esetére is kidolgoznák (vö. V. 1. §.) — de ez jelenleg még megoldatlan probléma.

Egyes esetekben — mint metodológiai példák mutatják — a leírt módszer, illetve sorfejtés alkalmazható. Vegyük például Cauchy-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontását, azaz legyen $A=1$, $B=0$ és így, az itteni $k^*(x)$ helyett $k_1^*(x)$-et írva,

$$k_1^*(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{\pi\beta_k} \frac{1}{1+(x-\alpha_k)^2/\beta_k^2} \qquad (\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j) \quad 0 < \beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_N < \Lambda_2)$$

és a megfelelő tesztfüggvény

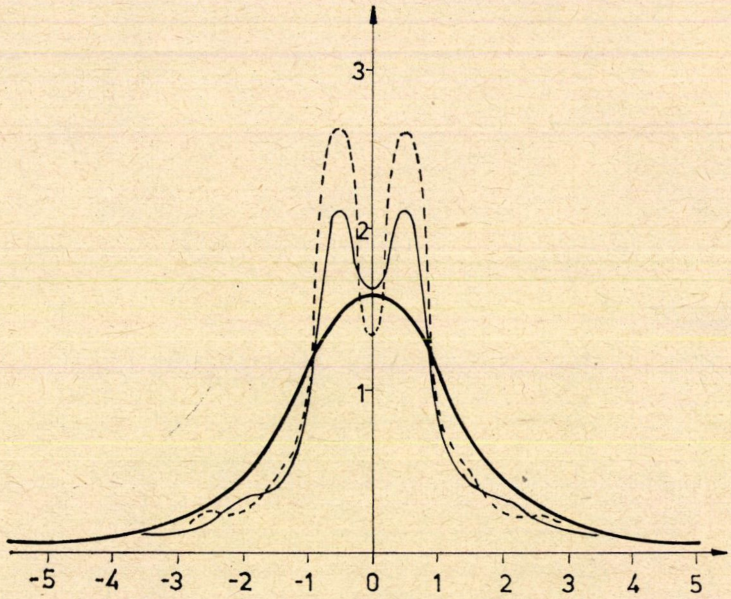
$$b^*(y, \lambda) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\pi(\beta_k - \lambda)} \frac{1}{1+(y-\alpha_k)^2/(\beta_k-\lambda)^2} + \frac{1}{\pi(\beta_k+\lambda)} \frac{1}{1+(y-\alpha_k)^2/(\beta_k+\lambda)^2} \right].$$

Emlékeztetünk arra, hogy a II. 4. §.-ban láttuk, hogy $\lambda$ $(0, \beta_1)$ tágabb értelemben monoton formánsa e $b^*(y, \lambda)$ görbéjének. $\lambda$ növekedésekor $b^*(y, \lambda)$ egyik tagjának görbéje elkeskenyedik, és magasabb lesz, a másiké ellapul, ezáltal $b^*(y, \lambda)$ görbéje végül is magasabb és bizonyos magasságtól kezdve keskenyebb lesz. Minthogy itt $m=2$, $A_2 = -1$,

$$b^*(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} (-1)^n \frac{d^{2n} k_1^*(y)}{dx^{2n}}.$$

PÉLDA. A 46. ábrán (MEDGYESSY *(1955a); (1961a)* p. 120) a ———— vonal a




46. ábra

$$k_1^*(x) = \frac{1}{1+(x-0{,}5)^2} + \frac{1}{1+(x+0{,}5)^2}$$

*Cauchy*-sűrűségfüggvény szuperpozíció görbéjét mutatja (egzakt értékét csak bizonyos számú tizedesjegyig írva fel, vagyis „hibát” hozva be), a ———— vonal pedig az ehhez tartozó $b^*(y, \lambda)$ tesztfüggvény görbéjének közelítését $\lambda = 3/4$ mellett, melyet

$k_1^*(x)$ ekvidisztáns értékei felhasználásával, a sorfejtésből 5 tagot véve, a deriváltakat 11, 0,5—0,5 távolságú rácspontbeli adatból centrális differenciákkal közelítve kaptunk. A — — — — — vonal a pontos eredmény,

$$b^*(y, 3/4) = \frac{1}{0{,}25}\,\frac{1}{1+(y-0{,}5)^2/0{,}25^2} + \frac{1}{0{,}25}\,\frac{1}{1+(y+0{,}5)^2/0{,}25^2} +$$

$$+\frac{1}{1{,}75}\,\frac{1}{1+(y-0{,}5)^2/1{,}75^2} + \frac{1}{1{,}75}\,\frac{1}{1+(y+0{,}5)^2/1{,}75^2}$$

görbéjét mutatja. A közelítés jól megadja az egzakt tesztfüggvény görbéje két csúcsát, vagyis utal a különben egycsúcsú $k_1^*(x)$ két komponensére. Érdemes e példát összehasonlítani III. 1. §. 1.1.1. 1. példájával, melyben ugyanezt a szuperpozíciót más módszerrel bontottuk fel. — Ha a $k_1^*(x)$ értékek csak nagy hibával „mérhetők”, nem várható, persze, még ilyen eredmény sem.

A leírt módszer elvileg alkalmazható Pearson-féle V. típusú sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása esetében is, $A=1/2$, $B=-1$, $m=1$, $A_2=2$ és

$$b^*(y, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} 2^n \frac{d^n}{dx^n} k^*(y) \qquad \left(0<\lambda<\frac{\beta_1}{\sqrt{2}}\right)$$

általános formulával, *ha* $b^*(y, \lambda)$ görbéjének $\lambda$ tágabb értelemben monoton formánsa (Medgyessy *(1961a)*, pp. 110—121). Mivel azonban a III. 1. §. 1.1.1. 2.b) példájában a csúcshelyek változásáról mondottak itt is érvényesek, a numerikus deriválás kényes eljárás, stb. stb., az eljárás haszna kétséges és ezért nem is foglalkozunk vele tovább.

### Kiegészítések és problémák III. 3. §-hoz

1. A grafikus szuperpozíció-felbontási módszerek sikerét elősegítheti a szuperpozíció komponenseinek előzetes elkeskenyítése — pl. az $\mathcal{A}$-módszer révén.

2. Speciális *koordináta-papírok* vagy felrajzolás alkalmazására adatok találhatók többek közt a következő matematikai statisztikai munkákban: Buchanan—Wollaston, Hodgeson *(1929)*; Daeves *(1933)*; Husung *(1938)*; Knoll *(1942)*; Daeves, Beckel *(1948)*; Ramsthaler *(1949)*; Daeves *(1951)*; Hald *(1952)* pp. 155—158; Oka *(1954)*; Graf, Henning *(1960)* pp. 66—70; Weichselberger *(1961)*; Tanaka *(1962)*.

3. Egyes paraméterek meghatározására alkalmas, érdekes, a szuperpozíció görbéjén végzett manipulációkból álló *grafikus eljárást* mutat be Papoulis *(1955)*; ennek kiterjesztése sűrűségfüggvény-szuperpozíciók felbontásának általános módszerévé ma még megoldatlan probléma.

4. Algebrai módszer alkalmazásakor úgy is eljárhatunk, hogy elegendő számú pontban felírjuk — a „mért” szuperpozíció-érték segítségével — a szuperpozíció kifejezését, az $N$ komponensszámnak valamilyen értéket adva. Ezzel transzcendens *egyenletrendszert* kapunk az ismeretlen paraméterekre; ennek a megoldása azonban nehéz feladat.

5. A Doetsch *(1928)*-ban leírt és korábbi eredmények alapján megoldott transzcendens egyenletrendszer egyike azon *nem-lineáris egyenletrendszereknek*, me-

lyek explicite megoldhatók. Az ilyen egyenletrendszerek rendszeres felkutatása, ill. összegyűjtése nagyon hasznos volna; ez azonban jelenleg megoldatlan probléma.

6. Az előzőhöz hozzáfűzzük, hogy momentumok, vagyis $\int_{-\infty}^{\infty} x^{\varrho} k(x)dx$ mennyiségek helyett célszerűbb volna $\int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\varrho}(x) k(x) dx$-et venni, $\omega_{\varrho}(x)$-et úgy választva meg, hogy ezzel *egyszerűbben* kezelhető egyenletrendszerre jussunk, mint a momentumokkal. $\omega_{\varrho}(x)$ megkeresése azonban — általánosságban — megoldatlan probléma.

7. A DOETSCH *(1928)*-ban bevezetett momentum-módszerről, illetve módosításairól említést tesz STICKER *(1930a)*, *(1930b)*; SCHELLENBERG *(1932)*. STONE *(1927)*, TRICOMI *(1935)*, *(1936)* megmutatták, hogy bizonyos feltételek mellett *tetszőleges* függvény *approximálható* a $(-\infty, \infty)$ szakaszon normális sűrűségfüggvények lineáris kombinációjával. Ez nyilván csökkenti az itteni módszer értékét. — Érdekes megemlíteni, hogy a momentumokra épített eljárás egy részének végrehajtásához egy — egyébként más célú — sztochasztikus jellegű készüléket is felhasznált BERNSTEIN *(1932)*, ugyanannak a $H_{\alpha}$ vonalnak a vizsgálatával foglalkozva, mint G. DOETSCH.

8. A *matematikai statisztika* momentumos becslési módszereinek felhasználásával, illetve K. PEARSON vizsgálataival kapcsolatban megjegyezzük, hogy a MEDGYESSY *(1961a)* munkájában közöltektől eltérőleg PEARSON *(1894)* cikke célja *nem* normális sűrűségfüggvények szuperpozíciójának *felbontása* volt, hanem a már említett *approximálás;* ő az e típusú közelítéstől a vizsgált empirikus sűrűségfüggvény aszimmetrikus voltának valamilyen jellemzési lehetőségét remélte. Az, hogy esetleg keverék van a háttérben, nem befolyásolta különösebben a vizsgálatokat. (Hasonló célkitűzés: MESZÉNA, SCHERF *(1960)*). — A PEARSON *(1894)* cikkében leírtak módosítását, egyszerűsítését illetőleg l. CHARLIER *(1905)*; PEARSON, LEE *(1909)*; PEARSON *(1915)*; CRUM (1923); SCSIGOLEV *(1924)*; CHARLIER, WICKSELL *(1925)*; BROWN *(1933)*; POLLARD *(1934)*; BURRAU *(1934)*; STRÖMGREN *(1934)*; GOTTSCHALK *(1948)*. — A momentumokon alapuló módszerhez újabb kezelési technikát közölt RAO *(1948)*, *(1952)* pp. 300—304; az ezekhez csatlakozó PRESTON *(1953)*; COHEN, JR. *(1967)*.

9. A PRONY-féle módszer egyenletrendszere szerepel többek közt egyenlő szórású normális sűrűségfüggvények szuperpozíciója ismeretlen paramétereinek a momentumokra alapozott, fentebb ismertetett kiszámításában. — A *Prony*-féle módszert, illetve javításait illetőleg l. DE PRONY *(1795)*; WILLERS *(1923)* pp. 74—84; RUNGE, KÖNIG *(1924)* pp. 231—235; WHITTAKER, ROBINSON *(1949)* pp. 369—371; WILLERS *(1950)* pp. 243—247; HOUSEHOLDER *(1950)* pp. 28—32; HILDEBRAND *(1956)* pp. 378—379; LANCZOS *(1957)* pp. 272—280; BUCKINGHAM *(1957)* pp. 329—333; BELLMAN, KAGIWADA, KALABA *(1956)* 907—910; BELLMAN, KALABA *(1965)*.

10. A **B)** 1.—3. alatt tárgyalt módszereknek egyformán hátránya, hogy az $N$ komponens-számra feltevést kell tenni. Nincs azonban semmilyen *teszt* arra, hogy egy feltett $N$ érték jobb-e egy másiknál. PEARSON *(1894)* a momentumok módszere alapján nyert közelítések közül azt tekintette a legjobbnak, melynél a közelítő függvényből kiszámított $(n+1)$-edik momentum a legközelebb esik az adatokból számított $(n+1)$-edik momentumhoz, amidőn a közelítés megszerkesztéséhez $n$ számú momentumot használnak fel. Ez a kritérium azonban jogosan kritizálható. — Megemlítjük itt a LANCZOS *(1957)* pp. 272—280-on közölt híres példát: *három* exponenciális sűrűségfüggvény adott

$$k(x) = 0{,}0951\, e^{-x} + 0{,}8607\, e^{-3x} + 1{,}5576\, e^{-5x}$$

szuperpozícióját kitűnően approximálni lehetett a csupán *két* komponensből álló, hasonló típusú

$$f(x) = 2{,}202\, e^{-4{,}45x} + 0{,}305\, e^{-1{,}58x}$$

szuperpozícióval és ha a „mért” adatok mérési hibája bizonyos korlátnál nagyobb volt, lehetetlen volt oly kritériumot találni, mely három komponensű approximáló szuperpozíciót mutatott volna a legmegfelelőbbnek. — Ezért a gyakorlatban nagyon óvatosnak kell lenni a leírt módszerek alkalmazásakor és az eredmény interpretálásában, ha a kísérleti háttér nem ad támpontokat.

11. R. BELLMAN **D)** alatt leírt módszerének alapgondolata megtalálható már KÜHNEN *(1909)* cikkében. — A módszer hibája az itt közöltnél jobban is becsülhető volna *valószínűségelméleti* meggondolások alapján, figyelembe véve, hogy sztochasztikus változókból álló determinánsokat rendszeresen tanulmányoznak pl. a sztochasztikus programozásban.

12. Az **E)** 1. alatt leírtakhoz hasonlóan kezelhető különböző rendű $\chi$-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása, ahol (a konstansokat egyesítve)

$$k(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k x^k x^{-x^2} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases};$$

itt *Hermite*-polinomokkal kell dolgozni. — Más ortogonális függvényrendszerek súlyfüggvényére vezető szuperpozíció-esetek is hasonlóan tárgyalhatók.

13. Az **F)** alatti példában szükséges, 11 rácspontbeli értékre támaszkodó közelítő derivált-képletek megtalálhatók MEDGYESSY *(1955a)*, *(1961a)* pp. 216—217-en. — Az itt szereplő $b^*(y\, \lambda)$ tesztfüggvény közelítése persze a $b^*(y, \lambda)$-ra egyszerűen felírható parciális differenciálegyenlet numerikus megoldásával is megkapható volna, — emögött azonban valószínűleg *inkorrekt* probléma rejlik. Megpróbálható tehát az egyenletet véges differencia-egyenlettel közelíteni és azt megoldani, ennek eredményessége azonban nem lesz biztosítva.

14. Ha az **F)** alatt vizsgált, felbontandó szuperpozícióban

$$\mathbf{F}[f(x, \beta_k); t] = \psi(t)^{\beta_k},$$

ahol $\psi(t)$ ismert, akkor $k(x)$ és $b_1(y, \lambda)$-t az

$$\mathbf{F}[k(x); t] = \left[\frac{1}{2}\{\psi(t)^{\lambda} + \psi(t)^{-\lambda}\}\, \mathbf{F}[b_1(y, \lambda); t\right] \qquad (0<\lambda\leqq\beta_1)$$

összefüggés kapcsolja össze ($b_1(x, \lambda)$-ra integrálegyenlet azonban nem írható fel, mert $\mathbf{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}[\psi(t)^{\lambda} + \psi(t)^{-\lambda}]; x\right]$ nem létezik). — A közölt speciális esetek ide tartoznak. — Belátható, hogy $b_1(x, \lambda)$ olykor előállítható $k(x)$ deriváltjainak függvénysorával, de ennek gyakorlati alkalmazásakor ismét *inkorrekt* problémába ütközünk; ez csak növeli a nehézségeket, hisz $b_1(y, \lambda)$ amúgy sem ideális tesztfüggvény. A gyakorlatban tehát óvatosan kell bánnunk ezzel a módszerrel (egyéb részleteket l. MEDGYESSY *(1961a)* pp. 105—110).

A speciális stabilis sűrűségfüggvényekhez **F)**-ben bevezetett $b^*(y, \lambda)$ tesztfüggvény egy közelítése elvileg az V. 2. §.-ban leírt „zajszűrő” módszerrel is megkapható; az analitikus részletek kidolgozása és — főleg — annak eldöntése, hogy az eljárás korrekt-e, egyelőre megoldatlan probléma.

Az F)-ben a $k^*(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k s_A(x-\alpha_k, B, \beta_k)$ szuperpozíció felbontására közölt módszer a *Kiegészítések és problémák II. 8. §-hoz* 7. pontja folytán felhasználható egy

$$k_1^*(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \int_{-\infty}^{\infty} s_A(x-y-\alpha_k, B, \beta_k)\, A(y)\, dy$$

szuperpozíció felbontására is, ahol $A(y)$ $\alpha_k, \beta_k$-t nem tartalmazó sűrűségfüggvény.

15. Az eddig tárgyalt felbontási módszerek jórészének numerikus végrehajtásakor a $b(y)$ tesztfüggvény *közelítését* egy $b^*(y) = \sum_{j=-m}^{m} a_j k(x+jh)$ alakú kifejezés adta meg, ahol $k(x)$ a felbontandó szuperpozíció, $h$ egy konstans. Felmerül a kérdés, nem adhat-e egy ilyen kifejezés *egzakte* is tesztfüggvényt? Ha igen, ezzel a legkevésbbé pontatlan — emellett korrekt — felbontási eljáráshoz jutnánk, mert mentes volna a numerikus módszerekben kikerülhetetlen elhanyagolásoktól (vö. a III. 2. §-ban a PÉLDA végén mondottakkal). — Támpontot adhat ez irányú vizsgálatokhoz Laplace-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása a következő módon.

Legyen

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{|x-\alpha_k|}{\beta_k}}}{2\beta_k} \qquad (\alpha_i \neq \alpha_j \;\; (i \neq j),\; i, j = 1, \ldots, N; \quad 0 < \beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_N < A_2)$$

egy *Laplace*-sűrűségfüggvény szuperpozíció. A

$$b(y) = \sum_{j=-1}^{1} a_j k(x+jh) \quad \Big(a_{-1} = a_1,\; \sum_{j=-1}^{1} a_j = 1\Big)$$

függvény a III. 1. §-ban mondottak alapján alkalmas $a_j$ és $h$ értékek mellett vehető a $k(x)$-hez tartozó tesztfüggvénynek. Könnyen belátható ugyanis, hogy ha $a_1$ tetszőleges és $0 < h < \xi\beta_1$, ahol $\xi = \operatorname{Ar\,ch}(1+1/2a_1)$ és $a_1 = a_{-1}$, $a_0 = 1-2a_1$, akkor $b(y)$ $(\alpha_k)$ egycsúcsú sűrűségfüggvények szuperpozíciója ($k=1, \ldots, N$) és $h \uparrow \xi\beta_1$ esetén $b(y)$ $k$-adik komponensének szórásnégyzete kisebb $k(x)$ $k$-adik komponense szórásnégyzeténél (bár 0-t *nem* éri el) és így — a komponensek „keskenységét" szórásnégyzetükkel jellemezve — komponensei „keskenyebbé" válnak $b(y)$ képzésekor, vagyis különváltabban mutatkozhatnak meg $b(y)$ grafikonjában. — Lényegében itt is az $\mathscr{A}$-módszer szerepel. (Könnyen kiszámítható, hogy $h = \xi\beta_1$ esetén $b(y)$ első komponensének szórásnégyzete $k(x)$ első komponense szórásnégyzetének $[1-a_1 \cdot \cdot \operatorname{Ar\,ch}^2(1+1/2a_1)]$-szerese lesz; továbbá hogy nagy $a_1$ — és így kis $h$ — értékekkel kapunk erős különváltást.)

A gyakorlatban — minthogy $\beta_1$-et nem ismerjük — $a_1$ rögzítése után egyre növekvő $h$ értékekkel előállítjuk a megfelelő $b(y)$-grafikonokat és ezeket egybevetjük. Az eljárás során $k(x)$ komponenseinek szórásnégyzeteiből itt is levonunk bizonyos mennyiséget, épp úgy, mint a korábbi módszerekben általában (MEDGYESSY *(1972d)*).

A leírt módszer általános vizsgálata egyelőre megoldatlan probléma. Megjegyezzük, hogy alapgondolata alkalmazható *Cauchy-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontására* is.

## IV. DISZKRÉT ELOSZLÁSOK SZUPERPOZÍCIÓINAK FELBONTÁSA

### 1. §. Első szuperpozíció-típus. A $\mathscr{C}$-módszer

E fejezetben az I. fejezetbeli 2. problémával foglalkozunk — sokban a III. fejezetben mondottak analógiájára. A gyakorlatban elég

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\right\} \qquad (n=0, 1, \ldots; \ A_1<\delta_1\leqq\cdots\leqq\delta_N<A_2)$$

típusú szuperpozíciók felbontására szorítkozni, melyekben $\{f_n(\delta_k)\}$ $(n=0, 1, \ldots; f_\nu(\delta_k)=0$, ha $\nu<0)$ (egycsúcsú) ($A_2$) vagy ($A_3$) eloszlás és az $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ eloszlások csúcshelyei különbözők.

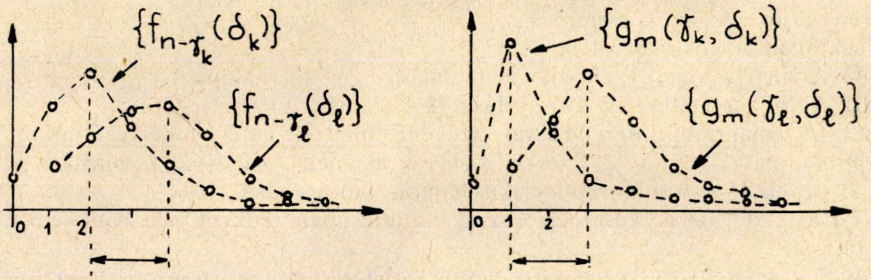
A $\{k_n\}$ szuperpozícióhoz rendeljük hozzá a

$$\{b_m\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k g_m(\gamma_k, \delta_k)\right\} \qquad (m=0, 1, \ldots)$$

úgynevezett teszteloszlást, amelyre a következő *feltételek* állnak fenn:

I. a $\{g_m(\gamma_k, \delta_k)\}$ $(m=0, 1, \ldots)$ eloszlás $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ $(k=1, \ldots, N)$ egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltja (l. II. 7. §.); az ennek értelmében $\{g_m(\gamma_k, \delta_k)\}$ és $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ közt fennálló összefüggés $\gamma_k$, $\delta_k$-tól független.

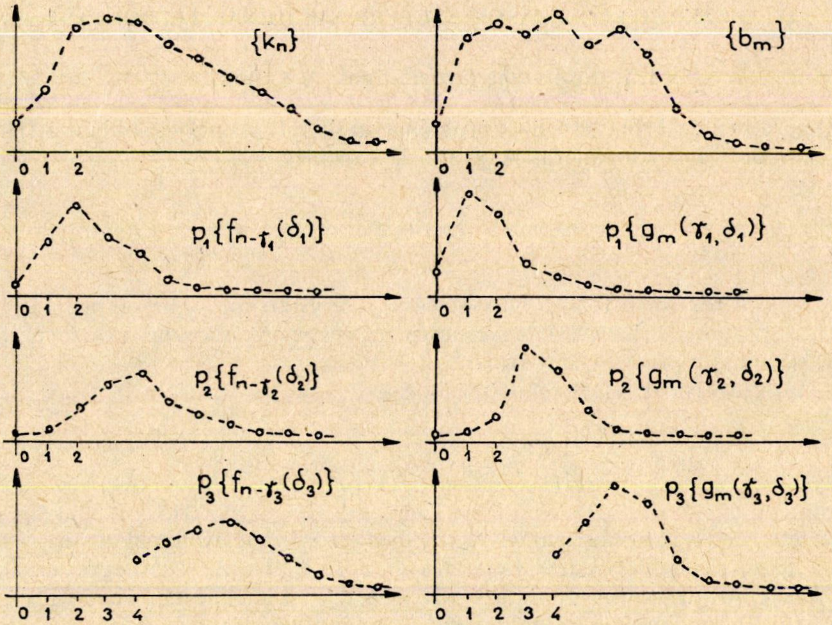
II. $\{g_m(\gamma_k, \delta_k)\}$ és $\{g_m(\gamma_l, \delta_l)\}$ csúcshelyének távolsága legfeljebb 1-gyel kevesebb, mint $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ és $\{f_{n-\gamma_l}(\delta_l)\}$ csúcshelyeinek távolsága $(k\neq l)$ (l. az 47. ábrát).




47. ábra

III. $\{b_m\}$ előállítható pusztán $\{k_n\}$ segítségével, $N, p_k, \gamma_k, \delta_k$ ismerete nélkül, esetleg $\{g_m(\gamma_k, \delta_k)\}$ és $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ összefüggése felhasználásával. $\{b_m\}$ nyilván a $\{g_m(\gamma_k, \delta_k)\}$ komponens-eloszlások szuperpozíciója.

$\{g_m(\gamma_k, \delta_k)\}$ diagramja keskenyebb, mint $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ diagramja. $\{b_m\}$ komponenseinek csúcshelyei majdnem annyira szétszórtan — de legtöbbször szétszórtabban is — helyezkednek el, mint $\{k_n\}$ komponenseinek csúcshelyei. Ezért *várható,* hogy $\{b_m\}$ diagramjában a komponensek diagramjai *különváltabban* mutatkoznak meg, mint $\{k_n\}$ diagramjában, erős különválás esetén szinte egyenként. Így *várható*, hogy a teszteloszlás diagramjából kiolvasható $N$, a komponensszám, — esetleg a kevéssé torzított komponens-diagramok csúcshelyei, ordinátaértékeiből stb. egyes más




48. ábra

paraméterértékek is kiszámíthatók. (l. a 48. ábrát). — A komponens-diagramok diszkrét jellege folytán persze mindez nem áll fenn általában oly mértékben, mint sűrűségfüggvény-szuperpozíciók esetén.

Tekintsük a következő lépéseket:

A) A leírt $\{g_m(\gamma_k, \delta_k)\}$ eloszlás megtalálása $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ alapján.

B) A $\{b_m\}$ teszteloszlás kiszámítása $\{k_n\}$ alapján A) segítségével;

C) $\{k_n\}$ diagramja *mért* ordinátaértékeire, mint egyedül rendelkezésünkre álló adatokra támaszkodó, a $\{b_m\}$ teszteloszlás értékeinek *közelítő* kiszámítására alkalmas, B)-re épülő optimális numerikus eljárás kidolgozása.

(C) a teszteloszlás *közelítését* szolgáltatja csupán. Többet azonban nem érhetünk el.)

A $\{b_m\}$ teszteloszlás ezen közelítésének diagramjára a „pontos" teszteloszlás-diagram kiértékelésére vonatkozó fenti megállapítások közelítőleg igazak.

A $\{k_n\}$ szuperpozíció felbontására szolgáló $\mathscr{C}$-módszernek nevezzük a $\{b_m\}$ teszteloszlás ezen *közelítése* diagramjának megszerkesztését és abból az ismeretlen paraméterértékekre való következtetést (=felbontás). — Alapötletét l. MEDGYESSY *(1954a)*, *(1954c)*, *(1961a)* Ch. II.

### 1. $\mathscr{C}$-módszer első speciális esete: A formáns-változtatás módszere

Legyen a

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\right\} \qquad (n=0, 1, \dots; \ \Lambda_1 < \delta_1 \leqq \dots \leqq \delta_N < \Lambda_2)$$

szuperpozícióban $\delta_k \{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ diagramjának *monoton formánsa.*

Tekintsük a

$$\{b_m\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_{m-\gamma_k}(\theta(\delta_k))\right\} \qquad (m=0, 1, \ldots)$$

számhalmazt, ahol $\theta(x)$ szigorúan monoton, $\delta_k$-t nem tartalmazó függvény, $\theta(\delta_k)$ $\delta_k$ egy másik megengedett értéke és $\theta(x)$ úgy van megválasztva, hogy $\mathcal{G}\{f_{m-\gamma_k}(\theta(\delta_k))\} \overset{w}{\prec} \mathcal{G}\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$. Mivel $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ szigorúan egycsúcsú, $\{f_{m-\gamma_k}(\theta(\delta_k))\}$ is az. *Tegyük fel*, hogy $\{f_{m-\gamma_k}(\theta(\delta_k))\}$ és $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ közt jól definiált, $\gamma_k$ és $\delta_k$-tól független összefüggés áll fenn. Ekkor IV. 1. §. I. feltétele teljesül $\{f_{m-\gamma_k}(\theta(\delta_k))\}$-ra, vagyis $\{f_{m-\gamma_k}(\theta(\delta_k))\}$ $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ *azonos* típusú, egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltja. Ha $\{f_n(\delta_k)\}$ csúcshelye $\delta_k$-tól *független*, IV. 1. §. II. feltétele is teljesül $\{f_{m-\gamma_k}(\theta(\delta_k))\}$-ra; ellenkező esetben *tegyük fel*, hogy e feltétel teljesül. Végül *tegyük fel*, hogy $\{b_m\}$ $\{k_n\}$ segítségével, $N, p_k, \gamma_k, \delta_k$ ismerete nélkül, esetleg $\{f_{m-\gamma_k}(\theta(\delta_k))\}$ és $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ összefüggése felhasználásával előállítható. Ekkor IV. 1. §. III. feltétele is teljesül. Így tehát $\{b_m\}$ vehető a $\{k_n\}$-hez rendelt teszteloszlásnak és a IV. 1. §. A), B) és C) lépéseit elvégezve, a $\mathcal{C}$-módszer alkalmazható.

Ez esetben a $\mathcal{C}$-módszert — érthető okokból — itt is a formáns-változtatás módszerének nevezzük (MEDGYESSY *(1954a)*, *(1954c)*, *(1961a)* pp. 121—129).

Minél közelebb van $\theta(\delta_k)$ $\Lambda_1$, ill. $\Lambda_2$-höz, annál jobban különválnak a teszteloszlás-komponensek diagramjai, vagyis annál jobb felbontás várható.

### 1.1. A formáns egyszerű csökkentése

A IV. 1. §. 1-ben vizsgált teszteloszlás legegyszerűbb esete az, amidőn $0<\delta_1 \leqq \leqq \delta_2 \leqq \cdots \leqq \delta_N < \Lambda_2$, $\delta_k$ $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ diagramjának $(\Lambda_2, 0)$ monoton formánsa és $\theta(\delta_k) = \delta_k - \lambda$, ahol $\lambda$ egy paraméter és $0<\lambda<\delta_1$; ez utóbbi feltétel alapvető fontosságú. Ekkor $\mathcal{G}\{f_{m-\gamma_k}(\delta_k-\lambda)\} \overset{w}{\prec} \mathcal{G}\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$. *Tegyük fel*, hogy $\{f_{m-\gamma_k}(\delta_k-\lambda)\}$ és $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ közt jól definiált, $\gamma_k$ és $\delta_k$-tól független összefüggés áll fenn. Ekkor IV. 1. §. II. feltétele teljesül $\{f_{m-\gamma_k}(\delta_k-\lambda)\}$-ra, vagyis $\{f_{m-\gamma_k}(\delta_k-\lambda)\}$ $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ *azonos* típusú, egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltja. Ha $\{f_n(\delta_k)\}$ csúcshelye $\delta_k$-tól független, IV. 1. §. II. feltétele is teljesül $\{f_{m-\gamma_k}(\delta_k-\lambda)\}$-ra; ellenkező esetben *tegyük fel*, hogy e feltétel teljesül. Végül *tegyük fel*, hogy $\{b_m\}$ $\{k_n\}$ segítségével $N, p_k, \gamma_k, \delta_k$ ismerete nélkül, esetleg $\{f_{m-\gamma_k}(\delta_k-\lambda)\}$ és $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ összefüggése felhasználásával előállítható. Ekkor IV. 1. §. III. feltétele is teljesül. $\{b_m\}$ helyett most $\{b_m(\lambda)\}$-t írva,

$$\{b_m(\lambda)\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_{m-\gamma_k}(\delta_k-\lambda)\right\}$$

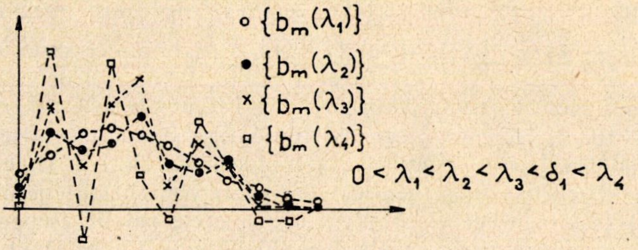
vehető a

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\right\}$$

szuperpozícióhoz rendelhető teszteloszlásnak és a IV. 1. §. A), B) és C) lépéseit elvégezve, a $\mathcal{C}$-módszer alkalmazható.

Ez esetben a $\mathcal{C}$-módszert a formáns egyszerű csökkentésének nevezzük (MEDGYESSY *(1954a)*, *(1954c)*, *(1961a)* pp. 121—127).

A teszteloszlás közelítő előállítását itt 0-tól kezdve egyre nagyobb és nagyobb $\lambda$-értékekre külön-külön elvégezzük, mert $\delta_1$-et nem ismerjük. Közelítő diagramjaik egybevetésekor látható lesz egyes komponensek különválása; összevissza oszcilláló, az abszcissza-tengely alá is le-lesüllyedő diagram fellépése általában arra mutat — bár $\lambda=\delta_1$ mellett is lehet még jó a diagram — hogy $\lambda$ túllépte $\delta_1$-et. — Ebből esetleg $\delta_1$ értékére is következtethetünk (l. a 49. ábrát).




49. ábra

Megjegyzendő, hogy $\lambda>\delta_1$ esetén *sem* lépnek fel okvetlenül ingadozó, nagy pozitív, ill. negatív eloszlásértékek, — mint metodológiai példákkal igazolható.

PÉLDA

Binomiális eloszlások szuperpozíciójának felbontása. Legyen ahol

$$\{k_n\}=\left\{\sum_{k=1}^{N} p_k \binom{M}{n} e^{-\delta_k n}(1-e^{-\delta_k})^{M-n}\right\} \qquad (n=0,1,\ldots;\ 0<\delta_1<\cdots<\delta_N<\log 2)$$

$M$ nem szükségképpen adott, és az identifikálhatóság megkövetelése miatt $M \geqq 2N-1 \geqq 2$ (vö. II. 3. §.); a másik paramétert $e^{-\delta_k}$ alakban írtuk a komponensekben. $\delta_k$ korlátai *lényegesek*. Tegyük fel, hogy a komponensek csúcshelyei *különböző* egész számok. $\delta_k$ (log 2, 0)monoton formánsa a $k$-ik komponensnek (vö. II. 5. §.).

Teszteloszlásnak vehető

$$\{b_m(\mu)\}=\left\{\sum_{k=1}^{N} p_k \binom{M}{m} e^{-(\delta_k-\mu)m}(1-e^{-(\delta_k-\mu)})^{M-m}\right\} \qquad (m=0,1,\ldots,M,\ 0<\mu<\delta_1)$$

Ennek komponenseire IV. 1. §. I. II. és III. feltétele teljesül mert a komponensek egycsúcsúak és — mint könnyen igazolható — $\{b_m(\mu)\}$ komponensei csúcstávolságai legfeljebb 1-gyel csökkennek $\{k_n\}$ komponensei csúcstávolságaihoz viszonyítva; figyelembe véve továbbá, hogy $\{b_m(\mu)\}$ és $\{k_n\}$ összefüggése (minthogy $\{b_m(\mu)\}$ és $\{k_n\}$ komponenseinek összefüggése is ilyen típusú)

$$\mathbf{G}[\{k_n\};z]=\sum_{k=1}^{N} p_k[e^{-\delta_k}z+(1-e^{-\delta_k})]^M$$

és

$$\mathbf{G}[\{b_m(\mu)\};z]=\sum_{k=1}^{N} p_k[e^{-(\delta_k-\mu)}z+(1-e^{-(\delta_k-\mu)})]^M$$

folytán

$$\mathbf{G}[\{b_m(\mu)\};z]=\mathbf{G}[\{k_n\};\ e^{\mu}z+1-e^{\mu}] \qquad (0<\mu<\delta<\log 2),$$

és ez összefüggés $p_k$, $\delta_k$-tól független; a generátorfüggvényeket felírva, együttható-összehasonlítással

$$\{b_m(\mu)\} = \left\{\sum_{\varrho=m}^{M} e^{\mu m}\binom{\varrho}{m}(1-e^{\mu})^{\varrho-m}k_\varrho\right\},$$

$$b_m(\mu) = e^{\mu m}\sum_{\varrho=m}^{M}\binom{\varrho}{m}(1-e^{\mu})^{\varrho-m}k_\varrho \qquad (m=0,1,\ldots,M,\ 0<\mu<\delta_1)$$

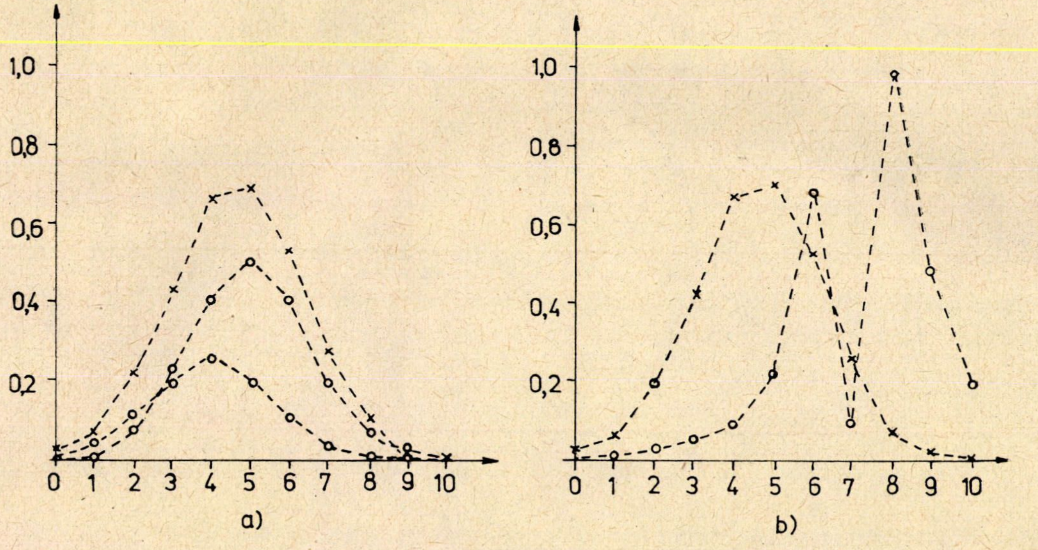
vagy, ha a kinduláskor a binomiális eloszlásokat a szokásos alakban írjuk, $e^{-\delta_k}$ helyett $\delta_k^*$-gal, $(1/2\leqq\delta_1^*<\cdots<\delta_N^*<1)$, és ekkor $e^{\mu}$ helyett $\lambda$-t, $b_m(\mu)$ helyett $b_m^*(\lambda)$-t írunk,

$$b_m^*(\lambda) = \lambda^m\sum_{\varrho=m}^{M}\binom{\varrho}{m}(1-\lambda)^{\varrho-m}k_\varrho \qquad (1/2<\delta_1^*<\lambda<1).$$

A $\mathscr{C}$-módszer alkalmazása szempontjából $b_m(\mu)$ előállításának fontos jellemzője, hogy numerikusan *közvetlenül* — analitikus kifejezések numerikus közelítései nélkül — felhasználható. Ez az előállítás egyben *korrekt* probléma is. A hibabecslés nyilvánvaló (MEDGYESSY *(1954a)*, *(1954c)*, *(1961a)* pp. 129—133, *(1971c)*, *(1971d)*). A gyakorlatban sokszor a $0<\delta_1<\cdots<\delta_N<\log 2$ megszorítás *nélkül* is eredményes a módszer, bár ekkor a keskenyebbé válás stb. részletei nem ilyen egyszerűek.

PÉLDÁK

1. Az 50a részábrán × × × × a



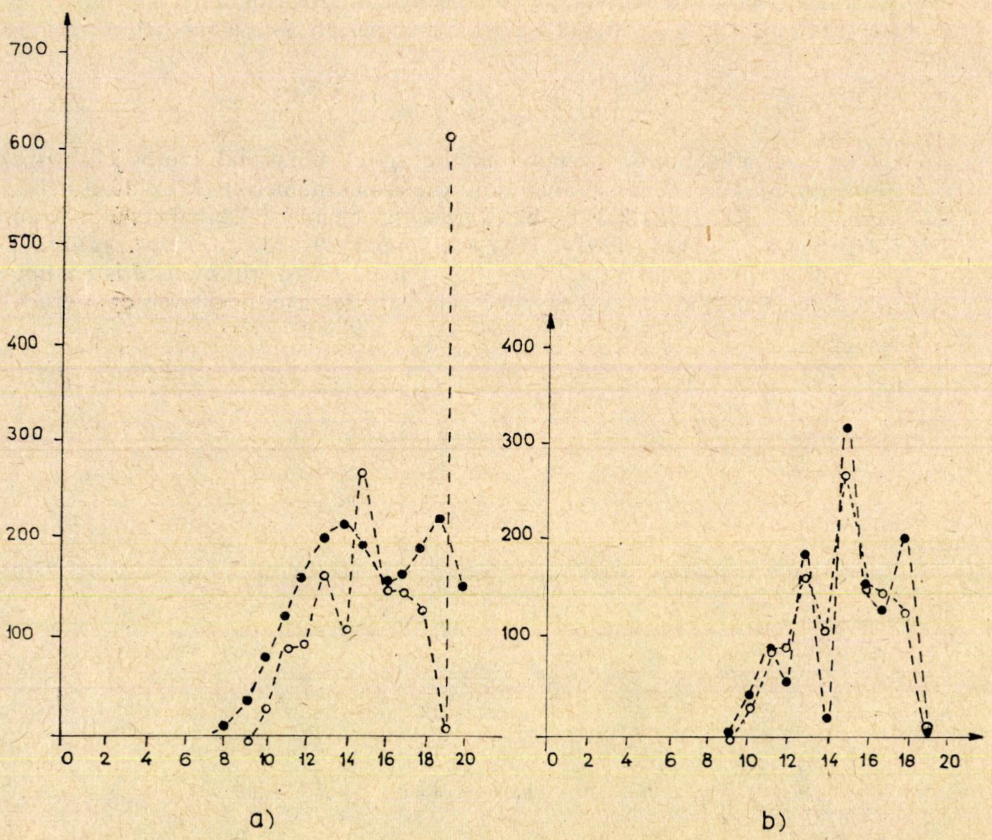

50. ábra

$$\{k_n\} = \left\{\binom{10}{n}0{,}4^n\cdot 0{,}6^{10-n}+2\binom{10}{n}0{,}5^n\cdot 0{,}5^{10-n}\right\} \qquad (n = 0, 1, \ldots, 10)$$

binomiális eloszlás-szuperpozíciót mutatja, $k_n$ értékeit bizonyos tizedesjegyig tartva meg. o o o o a komponenseket mutatja. A megfelelő $\{b_m^*(\lambda)\}$ teszteloszlás diagramját $\lambda=10/6$-dal az 50b részábrán o o o o mutatja; ugyanitt × × × ×-vel ismét feltüntettük

$\{k_n\}$ diagramját. A teszteloszlás diagramja világosan mutatja a két komponenst, jóllehet $\{k_n\}$ diagramja egycsúcsú; egyes paraméterértékek is leolvashatók (MEDGYESSY *(1954a)*, *(1961a)* pp. 132—133).

2. Az 51a részábrán ········ mutatja egy kémiai frakcionáló megosztás anyageloszlását celláról-cellára (vö. I. 1. §.), mely binomiális eloszlások szuperpozíciójának tételezhető fel. A fenti módon, $\lambda = 1{,}073$-mal megszerkesztett teszteloszlás diagramját




51. ábra

o o o o mutatja. Több mint három komponens kivehető, egyikük közel elfajult. Ezt kihagyva és a maradékon a felbontási eljárást $\lambda = 1{,}026$-tal megismételve, az 51b) részábra ······ diagramját kapjuk. Összehasonlításul az előző felbontási fázis eredménye is fel van tüntetve, o o o o-rel. Legalább három komponens felismerhető és paraméterértékek is leolvashatók. — A kapott adatok helyességét itt a gyakorlat is igazolta. (MEDGYESSY *(1954a)*, *(1967b)*).

E példákban az $1/2 \leq \delta_1^* < \cdots < \delta_N^* < 1$ feltétel nem teljesült, de ez nem okozott zavart, s így nem is lett volna érdemes teljesülése ellenőrzésével vesződni.

### 1.1.1. Egy speciális eset

A IV. 1. §. 1.1. speciális eseteként tekintsük azon

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\right\} \qquad (n=0, 1, \dots;\ \Lambda_1 < \delta \leqq \dots \leqq \delta_N < \Lambda_2)$$

szuperpozíciókat, amelyekben

$$\mathbf{G}[\{f_n(\delta_k)\};z] = h(z)^{\delta_k}$$

és $\delta_k$ az $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ eloszlásnak $(\Lambda_2, 0)$ monoton formánsa és $h(z)$ egy generátorfüggvény. A

$$\{b_m(\lambda)\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_{n-\gamma_k}(\delta_k - \lambda)\right\} \qquad (0 < \lambda < \delta_1)$$

eloszlásra a IV. 1. §. 1.1.-ben felsorolt feltételek közül most teljesül az, hogy $\{f_{m-\gamma_k}(\delta_k - \lambda)\}$ és $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ közt jól definiált, $\gamma_k$ és $\delta_k$-tól független összefüggés áll fenn, mert

$$\mathbf{G}[\{f_{m-\gamma_k}(\delta_k - \lambda);z] = \frac{1}{h(z)^{\lambda}}\mathbf{G}[\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\};z] \qquad (0 < \lambda < \delta_1).$$

Így tehát IV. 1. §. I. feltétele teljesül. IV. 1. §. II. feltétele teljesül; továbbá IV. 1. §. III. feltétele is teljesül, mert az előbbi egyenlőség folytán

$$\mathbf{G}[\{b_m(\lambda)\};z] = \frac{1}{h(z)^{\lambda}}\mathbf{G}[\{k_n\};z] \qquad (0 < \lambda < \delta_1),$$

vagyis, a generátorfüggvények kifejtései együtthatóit összehasonlítva, $\{b_m(\lambda)\}$ és $\{k_n\}$ összefüggése

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} f_{n-\varrho} b_\varrho(\lambda)\right\} \qquad (n=0, 1, \dots;\ 0 < \lambda < \delta_1),$$

vagyis a teszteloszlás tagjait az ebből felírható egyenletrendszer megoldása adja. (MEDGYESSY *(1954a)*, *(1954c)*, *(1961a)* pp. 72—76). — Ez *inkorrekt* probléma is lehet numerikus esetben, mely az V. 1. §. módszerével — elvileg — kezelhető. — A $\mathscr{C}$-módszer ezek után alkalmazható.

*Korrekt* lesz a probléma például abban a fontos speciális esetben, amidőn

$$\frac{1}{h(z)^{\lambda}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu(\lambda)\, z^\nu,$$

ugyanis ekkor, mint könnyen belátható,

$$\{b_m(\lambda)\} = \left\{\sum_{\varrho=0}^{m} h_{m-\varrho}(\lambda)\, k_\varrho\right\}.$$

Ekkor tehát $\{b_m(\lambda)\}$, a $\{k_n\}$ szuperpozícióhoz rendelhető teszteloszlás, *közvetlenül* előállítható, mivel

$$b_m(\lambda) = \sum_{\varrho=0}^{m} h_{m-\varrho}(\lambda)\, k_\varrho \qquad (m=0, 1, \dots;\ 0<\lambda<\delta_1).$$

A hibabecslés triviális.

PÉLDA

Poisson-eloszlások szuperpozíciójának felbontása. Legyen

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k e^{-\delta_k} \frac{\delta_k^{n-\gamma_k}}{(n-\gamma_k)!}\right\} \qquad (n=0, 1, \dots;\ 0<\delta_1 \leqq \dots \leqq \delta_N < \Lambda_2),$$

ahol $\gamma_k$ természetes szám és $(n-\gamma_k) < 0$ esetén a megfelelő komponens tagjai zérusok. Tegyük fel, hogy a komponensek csúcshelyei *különböző* egész számok. $\delta_k$ $(\Lambda_2, 0)$ monoton formánsa a $k$-adik komponensnek (vö. II. 5. §.) és

$$\mathbf{G}\left[\left\{e^{-\delta_k}\frac{\delta_k^n}{n!}\right\}; z\right] = e^{\delta_k(z-1)},$$

azaz a fenti típusú; ezenfelül az $e^{\lambda(z-1)}$ generátorfüggvény reciproka is hatványsorba fejthető. A fenti formulával végül is a teszteloszlást

$$\{b_m(\lambda)\} = \left\{\sum_{\varrho=0}^{m} e^{\lambda}\frac{(-\lambda)^{m-\varrho}}{(m-\varrho)!} k_\varrho\right\} \qquad (0<\lambda<\delta_1)$$

adja, azaz

$$b_m(\lambda) = e^{\lambda}\sum_{\varrho=0}^{m} \frac{(-\lambda)^{m-\varrho}}{(m-\varrho)!} k_\varrho \qquad (m=0, 1, \dots;\ 0<\lambda<\delta_1);$$

(ez már korábban is ismert volt (MEDGYESSY *(1954a)*, *(1954c)*, *(1961a)* pp. 77—79)), minthogy a formáns-csökkentés módszere alkalmazhatóságának feltételei itt teljesülnek — pl. a teszteloszlás komponenseinek csúcshelyei legfeljebb 1-gyel vannak közelebb egymáshoz, mint a felbontandó eloszlás komponenseinek csúcshelyei. — A gyakorlati alkalmazásról és a hibabecslésről fentebb mondottak jelen esetben való alkalmazása triviális (MEDGYESSY *(1954a)*, *(1954c)*, *(1961a)* pp. 77—79, *(1971c)*, *(1971d)*).

## 2. A $\mathscr{C}$-módszer második speciális esete

Legyen a

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\right\} \qquad (n=0, 1, \dots;\ \Lambda_1<\delta_1 \leqq \dots \leqq \delta_N < \Lambda_2)$$

szuperpozíció olyan, hogy $\mathbf{G}[f_n(\delta_k); z] = g(z, \delta_k)$ $(k=1, \dots, N)$-re fennáll; 1. $g(z, 0)=1$; 2. $g(z, \delta_k)$ egy korlátlanul osztható diszkrét eloszlás generátorfüggvénye; 3. $\dfrac{g(z, \delta_k)}{g(z, \lambda)}$ $(0<\lambda<\delta_k)$ egy $f_m^*(\delta_k, \lambda)$ korlátlanul osztható, egycsúcsú eloszlás generátorfüggvénye, ahol $\lambda$ $\{f_m^*(\delta_k, \lambda)\}$-nak $(0, \delta_k)$ monoton formánsa.

Tekintsük a

$$\{b_m(\lambda)\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f^*_{m-\gamma_k}(\delta_k, \lambda)\right\} \qquad (m=0, 1, \dots)$$

számhalmazt. Erre a IV. 1. §. 1. feltétele teljesül a jelen feltevések folytán és mert $\{f^*_{m-\gamma_k}(\delta_k, \lambda)\}$ $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ egycsúcsú, megnövelt keskenységű transzformáltjának tekinthető és $\{f^*_{m-\gamma_k}(\delta_k, \lambda)\}$ és $\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}$ közt fennáll a $\gamma_k$, $\delta_k$-tól független

$$\mathbf{G}[\{f^*_{m-\gamma_k}(\delta_k, \lambda)\}; z] = \frac{1}{g(z, \lambda)} \mathbf{G}[\{f_{n-\gamma_k}(\delta_k)\}; z] \qquad (0<\lambda<\delta_1)$$

összefüggés. IV. 1. §. II. feltétele teljesülését *fel kell tenni;* IV. 1. §. III. feltétele azonban teljesül, mert az előbbi egyenlőség folytán

$$\mathbf{G}[\{b_m(\lambda)\}; z] = \frac{1}{g(z, \lambda)} \mathbf{G}[\{k_n\}; z] \qquad (0<\lambda<\delta_1),$$

vagyis a generátorfüggvények kifejtései együtthatóit összehasonlítva, $\{b_m(\lambda)\}$ és $\{k_n\}$ összefüggése, $g(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\lambda) z^n$ folytán

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{\varrho=0}^{n} f_{n-\varrho}(\lambda)\, b_\varrho(\lambda)\right\} \qquad (n = 0, 1, \dots; \ 0<\lambda<\delta_1),$$

vagyis a teszteloszlás tagjait az ebből felírható egyenletrendszernek a megoldása adja (MEDGYESSY *(1961a)*, pp. 58—63). Ez *inkorrekt* probléma is lehet numerikus esetben, mely az V. 1. §. módszerével — elvileg — kezelhető. — A $\mathscr{C}$-módszer ezek után alkalmazható.

*Korrekt* lesz a probléma például abban a fontos esetben, amidőn

$$\frac{1}{g(z, \lambda)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\lambda) z^\nu,$$

mert ekkor

$$\{b_m(\lambda)\} = \left\{\sum_{\varrho=0}^{m} a_{m-\varrho} k_\varrho\right\}.$$

Ekkor tehát $\{b_m(\lambda)\}$, a $\{k_n\}$ szuperpozícióhoz rendelhető teszteloszlás *közvetlenül* előállítható, mivel

$$b_m(\lambda) = \sum_{\varrho=0}^{m} a_{m-\varrho} k_\varrho \qquad (m=0, 1, \dots; \ 0<\lambda<\delta_1).$$

A hibabecslés triviális.

Világos, hogy az 1. §. 1.1.1. tárgya az előbbiek alesetének is felfogható; az ottani tárgyalásmód azonban egyszerűbbnek látszott.

PÉLDA

Negatív binomiális eloszlások szuperpozíciójának felbontása. Legyen

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k \binom{R-1+n}{R-1} (1-\delta_k)^R \delta_k^{n-\gamma_k}\right\} \qquad (n=0, 1, \dots; \ 0<\delta_1 \leqq \dots \leqq \delta_N < 1)$$

($R=1, 2, \dots,$ adott, $\gamma_k$ természetes szám, $n-\gamma_k<0$ esetén a megfelelő komponens tagjai zérusok). Tegyük fel, hogy a komponensek csúcshelyei *különböző* egész számok (ez *kizárja* $R=1$-et, a geometriai eloszlások szuperpozíciója esetét). E szuperpozíció a fenti típusú, mert egy negatív binomiális eloszlás korlátlanul osztható (GNEDENKO, KOLMOGOROV *(1954)* pp. 73—75), továbbá

$$\mathbf{G}\left[\left\{\binom{R-1+n}{R-1}(1-\delta_k)^R\delta_k^{n-\gamma_k}\right\}; z\right] = \left(\frac{1-\delta_k}{1-\delta_k z}\right)^R = g(z, \delta_k)$$

folytán

$$\frac{g(z, \delta_k)}{g(z, \lambda)} = \left(\frac{1-\delta_k}{1-\lambda}\right)^R\left(\frac{1-\lambda z}{1-\delta_k z}\right)^R \qquad (0<\lambda<\delta_k),$$

amely egy $\{f_m^*(\delta_k, \lambda)\}$ egycsúcsú, korlátlanul osztható eloszlás generátorfüggvénye, és ezen eloszlásnak $\lambda$ monoton formánsa (vö. II. 5. §.; 8.§.2.)).

Tekintsük a

$$\{b_m(\lambda)\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_{m-\gamma_k}^*(\delta_k, \lambda)\right\} \qquad (m=0, 1, \dots)$$

számhalmazt. Erre a IV. 1. §-beli feltételek közül a II. feltétel teljesülése általánosságban *nem* ellenőrizhető itt (sőt még $\{b_m(\lambda)\}$ komponensei csúcshelyeinek különbözősége sem), de ez nem nagyon lényeges a gyakorlatban, mert úgyis diagramokat hasonlítunk össze — ha egyáltalán mutatkoznak azokban különvált csúcsok. Ezért alkalmazhatónak *fogadjuk el* most is a fenti eljárást. A $g(z, \lambda)$ generátorfüggvény reciprokának hatványsorba fejtése után végül is a teszteloszlásnak elfogadott eloszlás

$$\{b_m(\lambda)\} = \left\{\sum_{\varrho=0}^{m} \frac{1}{(1-\lambda)^R}\binom{R}{\varrho}(-\lambda)^{m-\varrho}k_\varrho\right\},$$

azaz

$$b_m(\lambda) = \frac{1}{(1-\lambda)^R}\sum_{\varrho=0}^{m}\binom{R}{\varrho}(-\lambda)^{m-\varrho}k_\varrho \qquad (m=0, 1, \dots, 0<\lambda<\delta_1)$$

(MEDGYESSY *(1961a)* pp. 66—71). Ha az eljárás eredményes, mindenesetre mondható, hogy $\{b_m(\lambda)\}$ és $\{k_n\}$ összefüggése a kívánt típusú, ha a $\mathscr{C}$-módszer alkalmazásáról itt egzakte nem is beszélhetünk. — A gyakorlati alkalmazásra és a hibabecslésre vonatkozó egyéb tények triviálisak.

### 3. Első típusú szuperpozíciók felbontása a szuperpozíció transzformációja segítségével

Egyes $\{k_n\}$ szuperpozíciók nem bonthatók fel az eddig közölt módszerekkel, alkalmas lineáris transzformációval azonban áttranszformálhatók felbonthatókba, s felbontásuk megadja a keresett ismeretlen paramétereket. — Egy példát közlünk erre; a szereplő transzformáció numerikusan is megvalósítható.

PÉLDA

Geometriai eloszlások szuperpozíciójának felbontása. Legyen

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k(1-\delta_k)\delta_k^n\right\} \qquad (n=0, 1, \dots; \ 1/2 \leqq \delta_1 < \dots < \delta_N < 1).$$

A komponensek (0) *egycsúcsúak*, ezért az előző példa körébe *nem* esnek; a $\mathscr{C}$-módszer formálisan alkalmazható ugyan, de a teszteloszlás komponensei egybeesnek, és így használhatatlan lesz.

Tegyük fel, hogy található egy, a $(K_n^{(m)})(n=0, 1, \dots; m=0, 1, \dots)$ mátrixszal képviselt, $\{k_n\}$ elemeire alkalmazott $\sum_{n=0}^{\infty} K_n^{(m)} k_n$ lineáris transzformáció, melyre fennáll:

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} K_n^{(m)} k_n\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k \binom{M}{m} \delta_k^m (1-\delta_k)^{M-m}\right\} \qquad (n=0, 1, \dots; m=0, 1, \dots)$$

($M$ egész szám). A kapott *binomiális eloszlás-szuperpozíció* elég nagy $M$ esetén a fentebb (IV. 1. §. 1.1.) leírt módon általában felbontható, — vagy anélkül is *$M$ növekedésével egyre különváltabban mutatkoznak meg* komponensei diagramjában (analogonja III. 2. §. 1.1. módszerének); ez egyúttal $\{k_n\}$ felbontását is szolgáltatja.

Az ezen transzformáció konkrét alakját meghatározó ($\delta_n$-tól független) $K_n^{(m)}$ mennyiségekre fenn kell állnia a

$$\sum_{n=0} (1-\delta_k)\delta_k^n K_n^{(m)} = \binom{M}{m} \delta_k^m (1-\delta_k)^{M-m} \qquad (m=0, \dots, M)$$

összefüggéseknek (a szumma felső határát később rögzítjük). Ezen $K_n^{(m)}$ értékekkel $\{k_n\}$-t transzformálva, a fenti binomiális eloszlásra jutnánk. — Legyen egyelőre $m<M$. $\delta_k^n(1-\delta_k)^n$ kifejtése és átrendezés után $\delta_k^n$ együtthatóit egyeztetve azt kapjuk, hogy

$$K_n^{(m)} = \begin{cases} \binom{M}{n}\binom{M-m-1}{n-m}(-1)^{n-m} & \left(\begin{matrix} n = m, m+1, \dots, M-1; \\ m = 0, 1, \dots, M-1 \end{matrix}\right) \\ 0 & (n<m). \end{cases}$$

$m=M$-re azonban nem létezik megfelelő transzformáció. *Megengedve* ezt a fogyatékosságot, végül is — most már a szumma felső határa is rögzíthető —

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} K_n^{(m)} k_n\right\} = \left\{\sum_{n=m}^{M-1} \binom{M}{m}\binom{M-m-1}{n-m}(-1)^{n-m} k_n\right\} \qquad (m=0, 1, \dots, M-1).$$

Megjegyzendő, hogy $\{K_n^{(m)}\}$ $(m=0, \dots, M-1)$ *nem* diszkrét eloszlás tagjaiból áll.

Látható, hogy csupán *véges* számú $k_n$ érték szükséges a transzformációhoz; az a gyakorlatban *közvetlenül* előállítható. Az $m=M$ eset kizárása nehézséget is okozhat; legtöbbször azonban nem lényeges. — A hibabecslés triviális. (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

Ez a módszer más szuperpozíciók esetére is kidolgozható, mivel azonban a teszteloszlásokkal dolgozni nem a legelőnyösebb, inkább újabb általános módszert keresünk ezekhez (1.2. §.).

### Kiegészítések és problémák IV. 1. §-hoz

1. Világos, hogy egy felbontási eljárást megpróbálhatunk annak eldöntésére is felhasználni, hogy egy adott eloszlás adott típusú eloszlások *szuperpozíciója-e* vagy sem.

2. A „keskenyebb" megjelölés diszkrét eloszlás diagramjának esetében korántsem mond annyit, mint egy sűrűségfüggvény görbéje vizsgálatakor, mert az utóbbi görbéje valóban összenyomható, az előbbi azonban nem változik „folytonosan", diagramja csúcsai nem mozognak folytonosan stb., ha monoton formánsuk változik. Így aztán egy teszteloszlás diagramjában sohasem várható a komponensek olyan fokú szétválása egy felbontási eljárás során, mint tesztfüggvénynél. Ez a hátrány kiküszöbölhetetlen, az eljárások alkalmazhatóságát azonban nem befolyásolja nagyon.

3. Ha egy felbontási eljárásban az $N$ komponensszámot már meghatároztuk, a többi paraméter meghatározása *nemlineáris egyenletrendszer* megoldásával vagy illesztési feladattal ekvivalens (vö. IV. 3. §.).

4. Ha a felbontás során egyes komponensek diagramjából hegyes csúcs lett, ezek grafikusan levonhatók a kiindulási diagramból és a maradékra *újból* alkalmazhatjuk a felbontási eljárást. — Itt azonban ez nem igen fog szerepelni.

5. Világos, hogy a $\mathscr{C}$-módszer — és a később tárgyalandó egyéb módszerek is — *ismert* $N$ komponens-szám esetén is alkalmazhatók; ekkor az ismeretlen paraméterek meghatározásának speciális módszereként foghatók fel. — A módszer ilyen értelmű felhasználására több munka rámutatott (MEDGYESSY *(1954a)*, *(1961a)* pp. 129—133).

6. A formáns egyszerű csökkentésekor a teszt-diagram komponenseinek különválása nem „folytonos", hanem ingadozó, hisz a diagramok alakja sem „folytonosan" változik. Ez elkerülhetetlen. — Egyébként olykor előre azt sem tudjuk, különbözők-e a felbontandó szuperpozíció komponenseinek csúcshelyei, — vagyis hogy lesz-e egyáltalán felbontás; a felbontási eljárás elvégzése után láthatunk csak sok mindent.

7. Könnyen belátható, hogy *binomiális eloszlások szuperpozíciója felbontásának* közölt módszere akkor is használható, ha a komponensekben a tagszám *nem azonosan* $M$, hanem $M_1, M_2, \ldots, M_N$ (két azonos $(M_i, \delta_i)$ pár nincs) — és csak $\max\limits_{1 \leq k \leq N} M_k$ adott. Ekkor a teszteloszlás képlete ugyanaz, mint $M_1 = \cdots = M_N = M$ esetében, csak az összegezést $\max\limits_{1 \leq k \leq N} M_k$-ig kell elvégezni (MEDGYESSY *(1954a)*, *(1954c)*, *(1961a)* pp. 129—133). — A gyakorlatban ez ritkán fordul elő.

8. *Binomiális eloszlások szuperpozíciója felbontásakor* szerepelt az $e^\mu z + 1 - e^\mu$ $(\mu > 0)$ kifejezés behelyettesítése a komponensek generátorfüggvényébe. Ez a kifejezés felfogható, mint az $e^\mu, 1 - e^\mu$ tagokból álló eloszlás generátorfüggvénye. Ezen „eloszlás" egyik tagja tehát negatív; a szokott módon képezett „szórásnégyzete" is negatív. Az említett behelyettesítés tehát ezen „eloszlás" generátorfüggvényének egy (valódi) generátorfüggvénybe való behelyettesítése — ha valódi eloszlás szerepel, ez a behelyettesítés, mint tudjuk, ismét generátorfüggvényt ad. — Bevezettünk tehát technikai okokból egy negatív „szórásnégyzetű" eloszlást és eljárásunk a valódi szórásnégyzetet *lecsökkenti*, a diagramot *elkeskenyíti* (vö. *Kiegészítések és problémák* III. 1. §*-hoz*. 29.). — A leírtak felbontási problémákban való rendszeres felhasználása még megoldatlan probléma (vö. MEDGYESSY *(1966c)*).

9. Az 1.1.1. alatti módszer nyilván gépiesen kiterjeszthető — a feltételek alkalmas módosításával — oly esetekre, melyekben

$$\mathbf{G}[\{f_n(\delta_n)\}; z] = h_1(z) h(z)^{\delta_k},$$

ahol $h_1(z)$ valamilyen $\delta_k$-tól nem függő generátorfüggvény.

10. *Poisson-eloszlások szuperpozíciója felbontásakor* $\frac{1}{h(z)^{\lambda}}=e^{-\lambda(z-1)}$ úgy is felfogható, mint egy „negatív paraméterű *Poisson*-eloszlás" generátorfüggvénye. Ezen „eloszlás" egyes tagjai negatívok és a szokásos módon kiszámított „szórásnégyzete" negatív. Ekkor a teszteloszlás felfogható, mint a felbontandó szuperpozíció és ezen negatív „szórásnégyzetű" „eloszlás" kompozíciója, mely a valódi szórásnégyzetet *lecsökkenti*, a diagramot *elkeskenyíti*. — Mindennek technikai eszközként való rendszeres kidolgozása, valamint felbontási feladatokban való alkalmazása még megoldatlan probléma (vö. MEDGYESSY *(1966c)*).

11. Az, hogy korlátlanul osztható diszkrét eloszlásokhoz tartozó *két generátorfüggvény hányadosa* mikor lesz ismét generátorfüggvénye egy korlátlanul osztható diszkrét eloszlásnak, megfogalmazható kanonikus előállításaik nyelvén is (vö. I. 8. §. 2.).

12. A *$\mathscr{C}$-módszer második speciális esete* nyilván akkor is alkalmazható, ha a felbontandó szuperpozíciónak csupán *generátorfüggvényét* ismerjük.

13. A $\mathscr{C}$-módszer második speciális esete alkalmazásakor a komponensek szétválása „ingadozó" lesz a diszkrét jelleg miatt. Ez azonban kiküszöbölhetetlen, épp úgy, mint az, hogy előre nem tudjuk, különbözők-e a komponensek csúcshelyei, ill. hogyan változik távolságuk az eljárás során. — Mindez az eredményt nagyon befolyásolhatja; a gyakorlatban csak a teszteloszlás diagramja mutatja meg, történt-e komponens-különválás.

14. *Negatív binomiális eloszlások szuperpozíciója felbontásának* kidolgozásában szerepelt az

$$\frac{1}{q(z,\lambda)}=\left(\frac{1-\lambda z}{1-\lambda}\right)^{R}=\left(\frac{1}{1-\lambda}-\frac{\lambda}{1-\lambda}z\right)^{R}$$

függvény, egy generátorfüggvény reciproka. Ez is felfogható, mint egy negatív tagokkal is rendelkező, negatív „szórásnégyzetű" „eloszlás" (vö. 8., fentebb). Ekkor a megfelelő teszteloszlás felfogható mint a felbontandó szuperpozíció és ezen előbbi, negatív „szórásnégyzetű" eloszlás konvolúciója, melynek alkalmazásakor a szórásnégyzet *lecsökken*, és a diagram *elkeskenyedik*. Ez ismét negatív „szórásnégyzetű" „eloszlás" technikai jellegű bevezetése; ennek, valamint felbontási problémákban való alkalmazásának részletes vizsgálata azonban még megoldatlan probléma (vö. MEDGYESSY *(1966c)*).

15. A szuperpozíció transzformációja segítségével történő felbontásban e transzformáció és az elvégzése után alkalmazható, korábban már tárgyalt transzformáció persze egyesíthető is, de ez a formulák komplikáltsága folytán általában nem előnyös.

16. Egy szuperpozíciónak a paraméterek ismeretére nem támaszkodó *áttranszformálása* egy másikba sokszor diszkrét eloszlások $\{k_m\}=\{\sum_{n=0}^{\infty}K_n^{(m)}w_n\}$ típusú *keverésével* ekvivalens ($\{K_n^{(m)}\}$ ($m=0,1,\ldots$) az $n$ paramétert tartalmazó eloszlás, $\{w_n\}$ ($n=0,1,\ldots$) egy másik eloszlás). Problémánkban ugyan $\{w_n\}$-nek felelt meg az adott szuperpozíció, de formálisan ugyanaz a helyzet. Általában $\{K_n^{(m)}\}$-nek nem is kell valamilyen diszkrét eloszlásnak lennie. Egy említett típusú transzformáció, vagyis a lineáris transzformáció ismeretlen, és szuperpozíció-paramétereket nem tartalmazó $(K_n^{(m)})$ matrixa meghatározása — sőt már létezésének bizonyítása is — általánosságban megoldatlan probléma (vö. MEDGYESSY *(1961a)* p. 156).

17. Alkalmas teszteloszlás sokszor az eddig leírtaknál egyszerűbb módszerrel is bevezethető. Például (0) *egycsúcsú Poisson-eloszlások szuperpozíciójának felbontása* esetében, mikor is

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k e^{-\delta_k}\frac{\delta_k^n}{n!}\right\} \qquad (n=0, 1, \dots;\ 0<\delta_1<\dots<\delta_N<1)$$

— $0<\delta_k<1$ biztosítja a (0) egycsúcsúságot — értelmezze a $\{k_n\}$ komponenseire alkalmazandó transzformációt az, hogy a transzformáció révén kapott halmaz $m$-edik tagját az eloszlás $m$-edik tagjának $R^m$-mel való megszorzása adja, vagyis ez $\frac{e^{-\delta_k}\delta_k^m R^m}{m!}$, ahol $R$ ($R>1$) adott. Ekkor e transzformációt $\{k_n\}$-re alkalmazva, eredménye

$$\left\{\sum_{k=1}^{N} q_k e^{-\delta_k R}\frac{(\delta_k R)^m}{m!}\right\}$$

($q_k = p_k e^{(R-1)\delta_k}$), vagyis egy *Poisson*-eloszlás, melyben a paramétert $R$ alkalmas megválasztásával tetszőleges naggyá tehetjük és így alkalmazható rá a korábban leírt felbontási módszer. A gyakorlatban mindez számos nehézséggel jár (MEDGYESSY *(1971c), (1971d)*).

18. Exponenciális sűrűségfüggvények szuperpozíciója felbontásának problémája (vö. III. 2. §. 1.1.) visszavezethető binomiális eloszlások szuperpozíciója felbontására egy fentebb közölt ötlet segítségével. Legyen ugyanis a szuperpozíció

$$k(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{x}{\beta_k}}}{\beta_k} & (x>0) \\ 0 & (x\leqq 0) \end{cases} \qquad (0<\beta_1<\dots<\beta_N<\Lambda_2).$$

A $k(n) = k_n^*$ $(n=0, 1, \dots)$, $\frac{p_k}{\beta_k} = p_k^*$, $e^{-\frac{1}{\beta_k}} = \beta_k^*$ helyettesítésekkel ebből

$$k_n^* = \sum_{k=1}^{N} p_k^* \beta_k^{*n} \qquad (0<\beta_1^*<\dots<\beta_N^*<1)$$

lesz; vagyis összességük lényegében geometriai eloszlások szuperpozíciója. Ez a fentebb leírt módon kezelhető volna; amannál egyszerűbb azonban a

$$\sum_{n=m}^{M} K_n^{(m)} k_n^* = \sum_{k=1}^{N} p_k^* \binom{M}{m} \beta_k^{*m}(1-\beta_k^*)^{M-m}$$

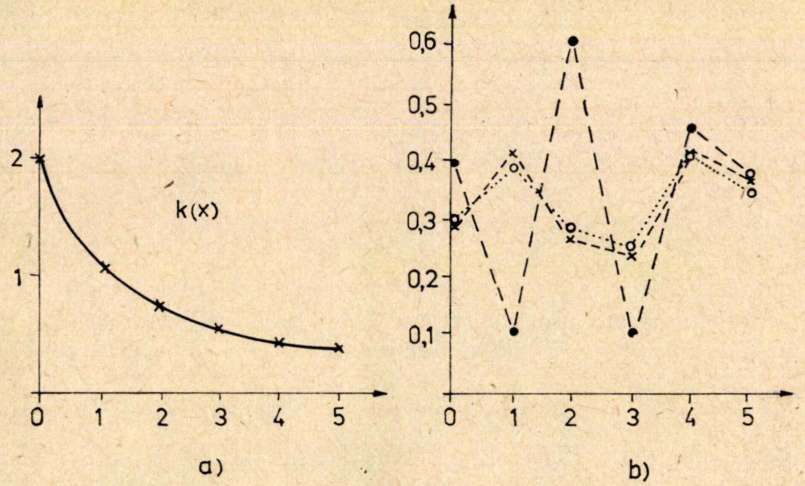
transzformációval dolgozni, ahol

$$K_n^{(m)} = \begin{cases} \binom{M}{m}\binom{M-m}{n-m}(-1)^{n-m} & (n=m, m+1, \dots, M;\ m=0, 1, \dots, M) \\ 0 & (n<m) \end{cases}$$

$\left(\text{minthogy } \sum_{n=0}^{M} K_n^{(m)} \beta_k^{*n} = \binom{M}{m} \beta_k^{*m}(1-\beta_k^*)^{M-m}\right)$.

A kapott binomiális szuperpozíció felbontása — ha sikerül — megadja $N$ értékét (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

Szuperpozíciónk egyébként (0) egycsúcsú *Poisson*-eloszlások szuperpozíciójára is visszavezethető — hasonló eszközökkel — melyet aztán a 8. alatti módon kezelünk.




52. ábra

PÉLDA.

Az 52. ábra a) részábráján láthatók a

$$k(x) = \begin{cases} e^{-0,2x} + e^{-1,5x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

szuperpozíció görbéjének $x = 0, 1, \ldots, 5$-höz tartozó pontjai. A b) részábra mutatja a most közölt eljárással megszerkesztett teszteloszlás diagramját, $M = 5$ mellett; $k(x)$ értékéből négy, három, ill. két tizedesjegyet tartva meg a számításokban (×, o, illetve •-rel jelzett pontok).

A ×××× és o o o o tesztfüggvény-diagramok két (binomiális) eloszlás — vagyis a felbontandó szuperpozícióban két komponens — jelenlétét mutatják, sőt $\beta_k^* = e^{-\frac{1}{\beta_k}}$ értékei is becsülhetők. A ••••• diagram már használhatatlan, a hibák, melyek $M$ növekedésével rohamosan nőnek, eltorzítják a teszteloszlást. Példánkban külön binomiális szuperpozíció-felbontást nem is kellett végezni. — Ha kis $M$ megfelel és a „mért" szuperpozíció-értékek elég pontosak, ez a módszer ajánlható. (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

19. A *𝒞-módszer* a következőképp általánosítható. Tekintsük egycsúcsú eloszlások

$$\{k_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{N} p_k f_{n-\gamma_k}(\delta_k) \right\} \qquad (n = 0, 1, \ldots; \quad \gamma_i \neq \gamma_j \ (i \neq j); \quad \Lambda_1 < \delta_1 \leqq \cdots \leqq \delta_N < \Lambda_2)$$

szuperpozícióját ($\gamma_k$ egész szám). Tegyük fel, hogy $\{f_n(\delta_k)\} = \{K_n(\lambda)\} * \{q_n(\delta_k)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, ahol $\{K_n(\lambda)\}$ $(\Lambda_1 \leqq \lambda \leqq \Lambda_2)$ nem függ $\delta_k$-tól, $\{q_n(\delta_k)\}$ egycsúcsú diszkrét eloszlás és a konvolúcióban résztvevő eloszlások szórásnégyzetei mind léteznek és bizonyos értelemben jellemzik az eloszlások diagramjai „keskenységét". Más szóval $\{f_n(\delta_n)\}$ *faktorizálható* (vö. LINNIK *(1960)*, LUKÁCS *(1964)*), két faktorral, melyek közül az egyik egycsúcsú; megjegyezzük, hogy *egycsúcsú* faktorokra bontás lehetősége jelenleg megoldatlan probléma. Ha $\{K_n(\lambda)\}$ szórásnégyzete növekedik, ha $\lambda$ növekedik, akkor

$$\{b_m(\lambda)\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k q_{n-\gamma_k}(\delta_k)\right\} \qquad (m=0, 1, \ldots)$$

vehető teszteloszlásnak, mert a konvolúcióban részt vevő eloszlások szórásnégyzeteinek összeadódása folytán komponenseinek diagramja „keskenyebbé" válik, ha $\lambda$ növekedik. Nyilván $\{k_n\}=\{K_n(\lambda)\} * \{b_m\}$, azaz

$$k_n = \sum_{\varrho=\nu}^{n} K_{n-\varrho}(\lambda) b_\varrho \qquad (n=0, 1, \ldots),$$

amiből $b_\varrho$ meghatározható numerikusan is, a $k_n$-ek lineáris kifejezéseként, — számos esetben $\{b_m\}$ *analitikus alakja pontos ismerete nélkül* is; már a generátorfüggvény ismerete is elegendő.

Számos szuperpozíció-típus sorolható ide; az alapötlet rendszeres vizsgálata azonban még megoldatlan probléma.

20. Megemlítünk egy érdekes diszkrét eloszlás-szuperpozíciót, mely kívül esik az eddig tárgyaltak körén; felbontására utaló megjegyzésekkel együtt tárgyalja már (MEDGYESSY *(1961a)* pp. 72—77; újabb tárgyalása MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

Tekintsük különböző rendű binomiális eloszlások szuperpozíciójának felbontását, azaz legyen

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k \binom{M_k}{n} p^n q^{M-n}\right\} \qquad (n=0, 1, \ldots, M_N;\ M_k=1, 2, \ldots;\ M_1 < \cdots < M_N);$$

$p$ adott, $p, q>0, p+q=1, p<q$, $M_k$ egész szám. A II. 3. §-ban láttuk, hogy ez a szuperpozíció *identifikálható.* Itt monoton formáns nem vezethető be, eddigi módszereink tehát használhatatlanok. A

$$\{b_m(\lambda)\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k \binom{M_k-\lambda}{m} p^m q^{M_k-\lambda-m}\right\} \qquad (m=0, 1, \ldots, M_N-\lambda)$$

eloszlás azonban vehető *teszteloszlásnak* szuperpozíciónkhoz, ha $\lambda$ *egész szám,* $0<\lambda<M_1$.

Valóban, ha $\lambda=1, 2, \ldots$, $\{b_m(\lambda)\}$ (egycsúcsú) komponenseinek diagramjai az $y$ tengely felé nyomódva elkeskenyednek és magasodnak, így aztán várható a komponensek diagramjainak különválása. A $\{b_m(\lambda)\}$-et $\{k_n\}$ segítségével szolgáltató lineáris transzformációt könnyű megtalálni:

$$\mathbf{G}\left[\binom{M_k-\lambda}{m} p^m q^{M_k-\lambda-m};\ z\right] = (pz+q)^{M_k}(pz+q)^{-\lambda}$$

folytán

$$\mathbf{G}[\{b_m(\lambda)\};z] = \frac{1}{(pz+q)^\lambda}\mathbf{G}[\{k_n\};z];$$

ilyen formailag már szerepelt IV. 1. §. 1.1.1.-ben. Ebből végül is

$$\{b_m(\lambda)\} = \left\{\sum_{\varrho=0}^{m} \frac{1}{q^\lambda}\binom{\lambda-1+m-\varrho}{\lambda-1}\left(-\frac{p}{q}\right)^{m-\varrho} k_\varrho\right\},$$

ahol egyes tagok zérussá is válhatnak.

A gyakorlatban növekedő egész számú $\lambda$ értékekkel sorra megalkotjuk a $\{b_m(\lambda)\}$ eloszlások diagramjait és összehasonlítjuk őket — akár csak a $\mathscr{C}$-módszernél.

Rámutatunk arra, hogy az $M_k$ paraméter itt úgy viselkedik, mint egy *monoton formáns* és így módszerünk a *formáns-változtatás módszere analogonjának* tekinthető. Ez azt is mutatja, hogy bizonyos esetekben értelmezhető diszkrét értékű monoton formáns is, persze a „keskenyebb" forgalom alkalmas új definíciójával egyetemben (vö. II. 4. §., 5. §.). — A leírt módszer könnyen kiterjeszthető különböző rendű negatív binomiális eloszlások szuperpozíciójának felbontása esetére is.

E kérdéskör rendszeres tárgyalása azonban egyelőre megoldatlan probléma

## 2. §. Második szuperpozíció-típus. A $\mathscr{D}$-módszer

Az első szuperpozíció-típust az jellemezte, hogy a komponensek csúcshelyei *különbözők* voltak; maga a $\mathscr{C}$-módszer is erre épült.

Most a

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_n(\delta_k)\right\} \qquad (n=0, 1, \ldots;\ \Lambda_1<\delta_1<\cdots<\delta_N<\Lambda_2)$$

típusú szuperpozíciók felbontását fogjuk vizsgálni, melyekben az $\{f_n(\delta_k)\}$ *egyparaméteres* eloszlások (egycsúcsú) $(A_2)$ vagy $(A_3)$ eloszlások, de az $\{f_n(\delta_k)\}$ eloszlások csúcshelyei azonosak és így rájuk a $\mathscr{C}$-módszer nem alkalmazható.

Klasszikus *példa* geometriai eloszlások fentebb vizsgált szuperpozíciója, vagy 1-nél kisebb paraméterű Poisson-eloszlások szuperpozíciója, melyekben az összes komponensek (0) egycsúcsúak.

$\{k_n\}$ felbontására egy az eddigiektől lényegileg különböző módszert adunk meg. Ez a felbontandó eloszlás-szuperpozícióhoz *nem egy teszteloszlást, hanem egy tesztfüggvényt* rendel hozzá, ami azért előnyös, mert tesztfüggvény görbéjéből könnyebb paraméterekre következtetni, mint teszteloszlás diagramjából. — A módszer rokon a $\mathscr{B}$-módszerrel.

A $\{k_n)$ szuperpozícióhoz rendeljük hozzá a

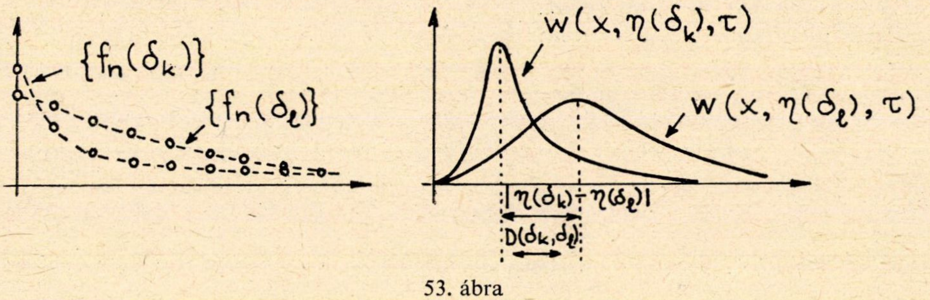
$$b^*(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k w(x, \eta(\delta_k), \tau) \qquad (0<\tau<T)$$

függvényt, melyet itt is tesztfüggvénynek nevezünk és amelyre a következő feltételek állnak fenn:

I. $\eta(x)$ adott, szigorúan monoton, $\delta_k$-t nem tartalmazó függvény és $w(x, \eta(\delta_k), \tau)$ $(0<\tau<T)$ $(\eta(\delta_k))$ *egycsúcsú sűrűségfüggvény*, vagy annak konstansszorosa, melyben az $\eta(\delta_k)$ csúcshely $\neq 0$, emellett $\tau$-tól is függhet és amelynek görbéje valamilyen adott értelemben egyre „keskenyebb" és annak csúcsmagassága egyre nő, ha $\tau\downarrow 0$ (vagy

$\tau \uparrow T$); végül, amely jól definiált, $\delta_k$-tól független összefüggésben van $\{f_n(\delta_k)\}$-val ($k=1, \ldots, N$).

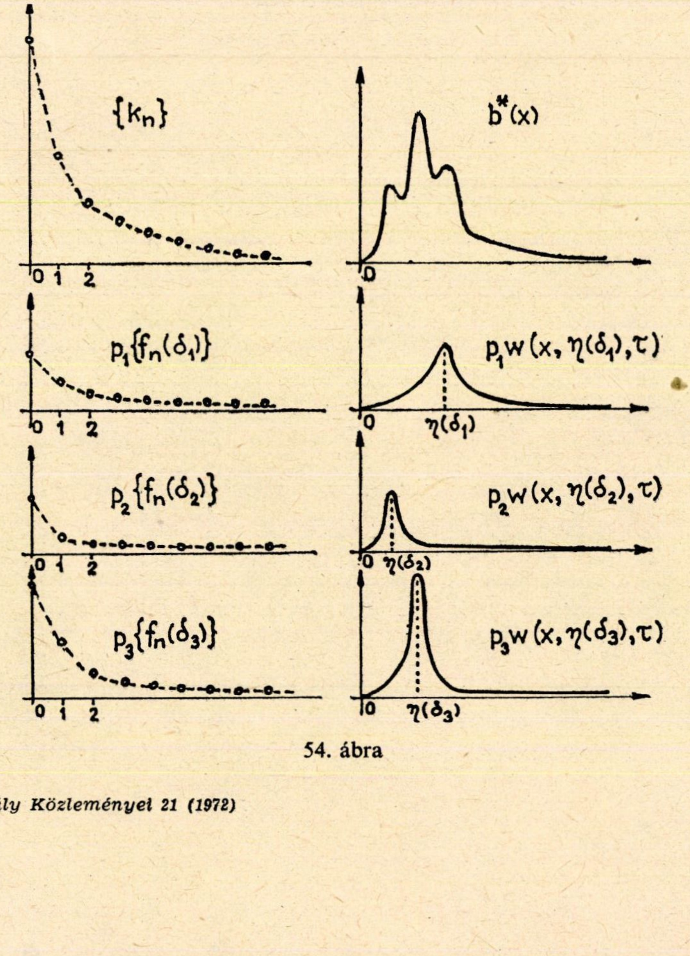
II. Bármely $\tau$ mellett $w(x, \eta(\delta_k), \tau)$ és $w(x, \eta(\delta_l), \tau)$ csúcshelyeinek távolsága, $|\eta(\delta_k)-\eta(\delta_l)|$ legalább akkora, mint bizonyos, *csak* $\delta_k$ és $\delta_l$-től függő, azaz $\tau$-tól *független* $D(\delta_k, \delta_l)$ mennyiség (l. az 53. ábrát).




53. ábra

III. $b^*(x)$ előállítható pusztán $\{k_n\}$ segítségével, $N, p_k, \delta_k$ ismerete nélkül, esetleg $w(x, \eta(\delta_k), \tau)$ és $\{f_n(\delta_k)\}$ összefüggése felhasználásával.

$b^*(x)$ nyilván egy sűrűségfüggvény-szuperpozíció.




54. ábra

Az I. alatti csúcsmagasság-növekedés — sőt, elkeskenyedés — fellép, ha pl. $\tau$ $(T, 0)$ vagy $(0, T)$ monoton formánsa $w(x, \eta(\delta_n), \tau)$ görbéjének.

0-hoz (vagy $T$-hez) elég közeli $\tau$ mellett $w(x, \eta(\delta_k), \tau)$ görbéje $\eta(\delta_k)$-ban éles csúcsot mutat. $b^*(x)$ komponenseinek csúcshelyei bármely $\tau$-nál valamennyire szétszórtan helyezkednek el (vö. a II. feltétellel), ezért *várható,* hogy $b^*(x)$ görbéjében a komponensek görbéi *különváltan* mutatkoznak meg, erős különválás esetén szinte egyenként. Így várható, hogy a tesztfüggvény görbéjéből kiolvasható $N$, a komponensszám — esetleg a kevéssé torzított komponens-görbék csúcshelyeinek ordinátaértékeiből stb. egyes más paraméterértékek is kiszámíthatók (l. az 54. ábrát).

Tekintsük a következő lépéseket:

A) a leírt $w(x, \eta(\delta_k), \tau)$ függvények megtalálása $\{f_n(\delta_k)\}$ alapján;

B) a $b^*(x)$ tesztfüggvény kiszámítása $\{k_n\}$ alapján, A) segítségével.

C) $\{k_n\}$ diagramja *mért* ordinátaértékeire, mint egyedül rendelkezésünkre álló adatokra támaszkodó, a tesztfüggvény értékeinek *közelítő* kiszámítására alkalmas, B)-re épülő optimális numerikus eljárás kidolgozása.

(C) a tesztfüggvény *közelítését* szolgáltatja csupán; többet nem érhetünk el.) A $b^*(x)$ tesztfüggvény ezen közelítésének görbéjére a „pontos" tesztfüggvénygörbe kiértékelésére vonatkozó fenti megállapítások közelítőleg igazak.

A $\{k_n\}$ szuperpozíció felbontása $\mathscr{D}$-módszerének nevezzük a $b^*(x)$ tesztfüggvény ezen *közelítése* görbéjének megszerkesztését, és abból az ismeretlen paraméterértékekre való következtetést (=felbontás) (alapötlete: MEDGYESSY *(1961a)*, pp. 152—158, *(1961b)*; l. még MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

## 1. A $\mathscr{D}$-módszer egy speciális esete

Tekintsük a

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k f_n(\delta_k)\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k \psi(n) A(\delta_k)\eta(\delta_k)^n\right\} \qquad (n=0, 1, \dots)$$

típusú szuperpozíciókat, ahol $\psi(n)$ adott és csak $n$-től függ, $A(\delta_k)$ $\delta_k$ adott függvénye és $\eta(\delta_k)$ a fenti. Tekintsük a következő $b^*(x)$ függvényt:

$$b^*(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k A(\delta_k) \frac{e^{-\frac{(x-R\eta(\delta_k))^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}}$$

($R > 1$ adott), vagyis a IV. 2. §-beli $w(x, \eta(\delta_k), \tau)$:

$$w(x, \eta(\delta_k), \tau) = A(\delta_k) \frac{e^{-\frac{(x-R\eta(\delta_k))^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}}.$$

A IV. 2. §. I., II. és III. feltételei itt nyilván teljesülnek, figyelembe véve többek között azt, hogy a *Taylor*-formula szerint

$$A(\delta_k) \frac{e^{-\frac{(x-R\eta(\delta_k))^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-R)^n \Phi^{(n)}(x)}{\psi(n) \cdot n!} f_n(\delta_k),$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} \quad (\tau > 0 \text{ és tetszőleges kicsi})$$

és ezt felhasználva,

$$b^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-R)^n \Phi^{(n)}(x)}{\psi(n) \cdot n!} k_n,$$

és így $b^*(x)$ vehető a $\{k_n\}$ szuperpozícióhoz rendelhető tesztfüggvénynek.

$R$ és $\tau$ szabályozzák a komponensek különválását. — A súlyok megváltozása lényegtelen (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*). — A IV. 2. §. A), B) és C) lépései után a $\mathcal{D}$-módszer alkalmazható.

PÉLDA

Poisson-eloszlások szuperpozíciójának felbontása. Legyen

$$\{k_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{N} p_k e^{-\delta_k} \frac{\delta_k^n}{n!} \right\} \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

ahol $0 < \delta_k < 1$, azaz a komponensek mind (0) egycsúcsúak. $A(\delta_k)$ stb. alkalmas megválasztása mellett az előző eredmény alkalmazható és a tesztfüggvény

$$b^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-R)^n \Phi^{(n)}(x)}{n!} k_n = \sum_{k=1}^{N} p_k e^{-\delta_k} \frac{e^{-\frac{(x-R\delta_k)^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}}.$$

A gyakorlatban az összegezés csak bizonyos indexig mehet, és így a képlet közvetlenül *nem* lesz alkalmazható. Ez a hibát növeli.

**Kiegészítések és problémák IV. 2. §-hoz**

1. A IV. 1. §. *Kiegészítések és problémák IV. 1. §-hoz* részében a $\mathcal{C}$-módszerrel kapcsolatban mondottak, megfelelő átfogalmazásban, a $\mathcal{D}$-módszerre is érvényesek, — ahol csak lehetséges ez.

2. A $\mathcal{D}$-módszer gyakran olyan esetekben is alkalmazható, amidőn egy szuperpozíció komponensei nem (0) egycsúcsak ugyan, de más felbontási módszer csődöt mond.

3. A IV. 1. §. 1.-ben leírt módszer numerikus megvalósításakor a $\infty$-ig való összegezés lehetetlensége nehézséget jelent. Jobb volna, ha $\Phi(x)$ helyett egy nem túl magas fokú *polinomot* lehetne használni; ekkor az összeg véges lenne. Egy ilyen polinom görbéjének adott $(-L, L)$ szakaszon *Gauss*-függvény görbéjéhez kellene hasonlítania; ekkor ui. a tesztfüggvény komponensei approximálnák a fent bevezetett tesztfüggvényeit (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*). — Megoldatlan probléma azonban ilyen polinom megszerkesztése; ez tulajdonképpen érdekes *konstruktív függvénytani* probléma.

4. A $w(x, \eta(\delta_k), \tau)$ függvény gyakran jól ismert *keverési* formulák alapján kapható meg. Tudjuk például, hogy különböző rendű Gamma-sűrűségfüggvényeknek geometriai eloszlás szerinti keveréke exponenciális sűrűségfüggvény, hiszen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x}x^n}{n!}(1-\delta_k)\delta_k^n = (1-\delta_k)e^{-(1-\delta_k)x} \qquad (0<\delta_k<1).$$

Ezt úgy is felfoghatjuk, mint az $\{(1-\delta_k)\delta_k^n\}$ $(n=0, 1, \dots)$ geometriai eloszlás *áttranszformálását* egy exponenciális *sűrűségfüggvénnyé* (MEDGYESSY *(1961a)* pp. 152—158, *(1961b)*; l. még MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*).

Tekintsük most *geometriai eloszlások szuperpozíciójának felbontását;* legyen

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k(1-\delta_k)\delta_k^n\right\} \qquad (n=0, 1, \dots;\ 0<\delta_1<\dots<\delta_N<1).$$

Az előző transzformációt $\{k_n\}$-re alkalmazva, a

$$b_1(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k(1-\delta_k)e^{-(1-\delta_k)x}$$

függvényt kapjuk (vö. IV. 1. §. 3.). Ez ugyan még nem felel meg tesztfüggvénynek, de a III. 2. §. 1.1. módszerével már felbontható. Az ottani műveleteket egyesítve az ittenivel, ezen új művelet a jelen geometriai eloszlás-szuperpozíciót alkalmas *tesztfüggvénybe* fogja áttranszformálni. — A gyakorlatban mindez sok nehézséggel jár. Diszkrét eloszlásoknak sűrűségfüggvénybe való áttranszformálásakor a transzformáció konkrét meghatározása — vagy csak létezésének a bizonyítása — általánosságban megoldatlan probléma (vö. MEDGYESSY *(1961a)* pp. 152—158, *(1961b)*).

## 3. §. „Ad hoc" módszerek

Ebben a paragrafusban diszkrét eloszlás-szuperpozíciók felbontásának az eddigiektől lényegileg eltérő, mindazonáltal a gyakorlatban ma is használt módszereit foglaljuk össze, — amennyire egyáltalán osztályozni lehet őket az alábbi szempontok szerint.

### A) Algebrai jellegű módszerek

1. Ezek közül egyesek (MEDGYESSY *(1954a)*, THIONET *(1966)*) lényegében a felbontandó szuperpozíciót *adott* $N$ komponensszámú hasonló típusú szuperpozícióval *approximálják*. Utóbbi ismeretlen paramétereit a felbontandó szuperpozíció „mért" ordinátaértékei alapján határozzák meg. Az eljárást $N=2, 3, \dots$-mal sorra elvégzik; ha valamilyen adott értelemben az approximáló illeszkedése a legjobb $N=N_0$-ra, felteszik, hogy $N_0$ az ismeretlen komponensszám és a hozzá tartozó paraméterértékek a keresettek.

Illusztrálásul tekintsük *Poisson-eloszlások szuperpozíciójának felbontását.* Legyen

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\beta_k}\beta_k^n}{n!}\right\} \qquad (n=0, 1, \dots;\ 0,<\beta_1<\dots<\beta_N<A_2)$$

és $\hat{k}_n$ $k_n$ „mért" értéke. $p_k e^{-\beta_k} = G_k$, $\hat{k}_n \cdot n! = H_n$-t írva, közelítőleg fennáll a

$$\sum_{k=1}^{N} G_k \beta_k^M = H_n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

egyenletrendszer $G_k, \beta_k$-ra. Ez a III. 3. §. **B.** 2.-ben leírt típusú, megoldásmódját ott közöltük már. Az eredményből — persze — $p_k, \beta_k$ is kiszámítható (MEDGYESSY *(1954a)*, *(1961a)* pp. 160—161).

*Binomiális eloszlások szuperpozíciójának felbontása* esetén hasonlóan járunk el (MEDGYESSY *(1954a)*; *(1961a)* pp. 160—161). A

$$\{k_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k \binom{M}{n} \beta_k^n (1-\beta_k)^{M-n}\right\} \qquad (n=0, 1, \ldots, M;\ 0<\beta_1<\cdots<\beta_N<1)$$

szuperpozícióban $k_n$ helyett a mért $\hat{k}_n$ mennyiséget véve, a

$$\frac{\hat{k}_n}{\binom{M}{n}} = D_n, \quad \beta_k = \frac{x_k}{1+x_k}, \quad B_k = \frac{p_k}{(1+x_k)^M}$$

összefüggések által definiált $B_k$, $x_k$ mennyiségekre (közelítőleg) a

$$\sum_{k=1}^{N} B_k x_k^n = D_n \qquad (n=0, 1, \ldots, M)$$

egyenletrendszert kapjuk, mely ugyanolyan típusú és ugyanúgy kezelendő, mint a fentebb a *Poisson* eloszlás-szuperpozíciónál kapott.

*Negatív binomiális eloszlások szuperpozíciójának felbontása* hasonlóan tárgyalható.

THIONET *(1966)* mindezek alapötletét kiterjesztette oly szuperpozíciók esetére, melyek komponensei bizonyos rekurzív összefüggéseknek tesznek eleget. Végeredményként az ismeretlen paraméterek bizonyos függvényeire kapott egyenletrendszert. Részletesen tárgyalta ezt az egyenletrendszert a vizsgált szuperpozíció diagramjából „mért" adatok hibájának figyelembevételével is.

2. A felbontandó szuperpozíció 1. alatt leírt approximációja a momentumok módszerével is megkapható. Ekkor felhasználható bármely olyan *matematikai statisztikai* módszer alapelve, mely momentum-becsléseket szolgáltat egy sokaság diszkrét eloszlás-keverék típusú eloszlása paramétereire, — minthogy momentumok nemcsak mintából, hanem egy diszkrét eloszlás „mért" értékeiből is számíthatók. Számos más oly cikk analitikus magva is felhasználható, melyek diszkrét eloszlások keverékének paraméterei és momentumai közt közölnek összefüggést; lásd pl.: SCHILLING *(1947)*; ROSENSTIEHL, GHOUILA-HOURI *(1960)*; RIDER *(1962)*; MCPHEE *(1963)*; BLISCHKE *(1962)*, *(1964)*, *(1965)*.

Természetesen a legkisebb négyzetek elvén alapuló alkalmas módszer is megalkotható.

Mindezen módszerek hátránya, hogy feltevést kell tennünk az $N$ komponensszámra, bár nincs kritérium annak eldöntésére, milyen $N$-érték lesz a legjobb. Így tehát óvatosan kell bánnunk e módszerekkel és eredményeik értelmezésével, ha $N$-re nincs semmi támpontunk.

**B) R. Bellman egy módszere**

BELLMAN *(1960)* III. 3. §. D)-ben leírt módszere különféle diszkrét eloszlás-szuperpozíciók esetében is alkalmazható. Ha pl. egy felbontandó diszkrét eloszlás-szuperpozíció

$$\{w_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} q_k \Phi(n) A_k^n\right\} \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

típusú $(q_k>0,\ A_k>0,\ \Phi(n)$ csak $n$-től függ$)$, az ismeretlen $N$ komponensszám elvileg meghatározható R. BELLMAN módszerével, vagyis a

$$C_r(i) = \begin{vmatrix} \dfrac{w_i}{\Phi(i)} & \dfrac{w_{i+1}}{\Phi(i+1)} & \cdots & \dfrac{w_{i+r}}{\Phi(i+r)} \\ \dfrac{w_{i+1}}{\Phi(i+1)} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ \dfrac{w_{i+r}}{\Phi(i+r)} & \cdots & \cdots & \dfrac{w_{i+2r}}{\Phi(i+2r)} \end{vmatrix} \qquad (i=0, 1, \ldots;\ r=1, 2, \ldots)$$

determinánsok sorozatának rögzített $i$ mellett való vizsgálatával: az első indexérték, mely mellett a determináns zérus (míg kisebb indexekre nem zérus), egyenlő az ismeretlen $N$-nel. Például

*Poisson-eloszlások szuperpozíciójának felbontása* esetében

$$\{w_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{N} p_k e^{-\beta_k} \frac{\beta_k^n}{n!}\right\} \qquad (n=0, 1, \ldots;\ 0<\beta_1<\cdots<\beta_N<A_2),$$

ami

$$q_k = p_k e^{-\beta_k}, \quad \Phi(n) = \frac{1}{n!}, \quad A_k = \beta_k$$

bevezetésével a fenti típusúvá alakul át és annak megfelelően tárgyalható. — A gyakorlatban persze $w_n$ „mért” $\hat{w}_n$ értékeivel lehet csak dolgozni. Ekkor azonban a módszer kényessé válik, mert a mért $\hat{w}_n$ értékekkel képezett $\hat{C}_r(i)$ determinánsok értékét a hibák $C_r(i)$-étől erősen különbözővé tehetik; ekkor azonban a zérussá-válás kritériuma nem lesz alkalmazható (MEDGYESSY *(1966b)*, *(1971c)*, *(1971d)*).

## Kiegészítések és problémák IV. 3. §-hoz

1. Felbontási problémával való bárminemű kapcsolat nélkül tekintsük a 3. . A) 1-ben szerepelthez hasonló

$$\sum_{k=1}^{N} x_k y_k^{\nu} = a_\nu \qquad (\nu=0, 1, \ldots;\ x_k, y_k,\ a_\nu>0;\ y_i \neq y_j\ (i\neq j))$$

speciális magasabb fokú *egyenletrendszert;* $x_k, y_k$ ismeretlenek. Ekkor pl. a 3. §. A) 1.-ben a *Poisson*-eloszlás-szuperpozíció felbontásakor szereplő gondolatsor megfordításával hozzárendelhető ehhez az egyenletrendszerhez egy *Poisson*-eloszlás-szuperpozíció. Legyen ui. $x_k = p_k\, e^{-y_k}$, $\nu!\,A_\nu = a_\nu$, akkor az egyenletrendszer a

$$\sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-y_k} y_k^\nu}{\nu!} = A_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

egyenletrendszerbe megy át, amelyben a $p_k$, $y_k$-k tekinthetők ismeretleneknek. Ez alakilag azonban *Poisson*-eloszlások szuperpozíciója. Felbontása — pl. a IV. 1. §. 1.1.1. módszerével — megadja $p_k$, $y_k$ közelítő értékeit; ezzel $x_k$, $y_k$ is megkapható közelítőleg. Így tehát *egyes felbontási módszerek új eszközt szolgáltathatnak bizonyos speciális egyenletrendszerek megoldására*, vagyis egy *algebrai* feladat megoldására. — Ezen észrevételek rendszeres feldolgozása még megoldatlan probléma.

2. R. BELLMAN B) alatt közölt módszerének hibája a gyakorlatban csak durván becsülhető. A hiba *valószínűségelméleti* vizsgálata gyümölcsözőbbnek ígérkezik, minthogy sztochasztikus változókból felépített determinánsokat az utóbbi évtizedben rendszeresen tanulmányoztak, — például a sztochasztikus programozásban.

## V. FELBONTÁSI MÓDSZEREK ALKALMAZÁSAKOR FELHASZNÁLHATÓ NUMERIKUS MÓDSZEREK

E fejezet áttekintés jellegű, és csak aránylag kis része a szerző eredménye. Új numerikus módszereket alkotni nem is volt célunk.

Az eddigiekben sokszor szerepeltek *Fredholm*-féle — és néha *Volterra*-féle — I. fajú konvolúciós típusú integrálegyenletek és numerikus megoldásuk. Ez — közismerten — *Hadamard* szerint *inkorrekt* probléma, amelynek megoldása, sok hasonlóéval együtt, új diszciplína — az ún. *regularizációs módszer* — megalkotására vezetett. Természetesen kitérünk erre is itt, de csak a munkánk szempontjából fontos említett integrálegyenletekre szorítkozva. Az általános tárgyalás pl. a következőkben található meg: LAVRENT'EV, VASZILEV *(1966)*; LAVRENT'EV *(1966)*; KIRILLOVA, PIONTKOVSZKIJ *(1968)*; MEDGYESSY *(1971a)* (terjedelmes irodalomjegyzékkel); RUST, BURRUS *(1972)*.

### 1. § Az A. N. Tihonov-féle regularizációs módszer

Számos matematikai probléma — pl. *Fredholm*- vagy *Volterra*- féle I. fajú integrálegyenletek, lineáris egyenletrendszerek, parciális differenciálegyenletek megoldása — ekvivalens egy

$$\mathbf{A}\,x = y$$

ún. I. fajú *operátoregyenlet* megoldásával, ahol $x \in X$, $y \in Y$; $X$, $Y$ teljes lineáris metrikus terek, **A** folytonos, nem okvetlenül lineáris operátor, adott értelmezési tartomány és értékkészlettel és $y$ adott. — Sok esetben e probléma *Hadamard* szerint nem korrekt, *inkorrekt* (mint tudjuk, *Hadamard* szerint korrektnek nevezünk egy problémát (HADAMARD *(1902)*, *(1932)*), ha rögzített „adatok” mellett létezik megoldás, az egyetlen és „folytonosan” függ az „adatoktól”).

Klasszikus példa erre egy $\int_a^b K(v-u)x(u)\,du = y(v)$ Fredholm-féle I. fajú integrálegyenlet: $y(v)$ „infinitezimális” megváltozásakor az $x(u)$ megoldás esetleg minden határon túl megváltozhat, — ami numerikus megoldás esetén a megoldás óriási oszcillálását és így használhatatlanságát eredményezheti.

Számos kísérlet történt, hogyan lehetne inkorrekt problémákhoz is megoldást *értelmezni.* Egyesek a korrektség fogalmának módosításával próbálták ezt elérni (TIHONOV *(1944)*; l. még JOHN *(1955a)*, *(1955b)*; LAVRENT'EV *(1962)*; fizikai mérések kiértékelése szemszögéből írt ugyanerről MAJOROV *(1965)*). Mások a lehetséges megoldások közül bizonyos típusúak (pl. a nem eléggé „simák") kizárásával (PHILLIPS *(1962)*, TWOMEY *(1963)*, HUNT *(1970)*), ismét mások a megoldás definíciójának megváltoztatásával („kvázi-megoldás") próbálták ezt elérni (IVANOV *(1962a)*, *(1962b)*, *(1963)*; l. még DOUGLAS *(1960)*, FRIDRIK *(1967)*, LISZKOVEC *(1968)*; hasonló alapgondolatok: SCHMAEDEKE *(1968)*, *(1969)*). Mindegyik útnak számos követője van. *Mindegyikre jellemző azonban, hogy az adott problémához* (pl. egy I. fajú integrálegyenlet megoldásához) *megalkot egy másikat, mely már korrekt* (pl. egy II. fajú integrálegyenlet megoldása lép fel), *emellett e korrekt probléma megoldása bizonyos paraméterek megváltoztatásakor konvergál az adott probléma megoldásához.*

Új módszert jelentett az *A. N. Tihonov*-féle ún. *regularizációs módszer* (TIHONOV *(1963a)*, *(1963b)*, *(1963c)*, *(1965a)*, *(1967)*), mely egy $Az=u$ egyenlet ($u\in U$, $z\in Z$; $U$, $Z$ metrikus terek) inkorrekt problémát képviselő megoldását a gyakorlatban előadódó helyzetnek megfelelően fogalmazta meg, kiindulva abból, hogy valamely $\bar{u}\in U$ helyett, melyhez feltételezzük egy $\bar{z}$ megoldás létezését, csak valamilyen „mért" $\tilde{u}_\delta\in U$ ismert, — ahol $\bar{u}$ és $\tilde{u}_\delta$ „távolsága" $\delta$-nál kisebb. Megmutatta, hogy megadható egy $\tilde{z}_\delta\in Z$, melyet az operátoregyenlet megoldásának tekint — melynek $\bar{z}$-től való „távolsága" $\leqq\varepsilon(\delta)$, ami 0-hoz tart, ha $\bar{u}$ és $\tilde{u}_\delta$ „távolsága" tart 0-hoz. A keresett $\tilde{z}_\delta$, pontosabban: egy az $\alpha=\alpha(\delta)$ ($\alpha(\delta)>0$, $\alpha(\delta)\to 0$, ha $\delta\to 0$) ún. *regularizáló paramétertől* függő, hasonló tulajdonságú $\tilde{z}_\delta^{(\alpha)}$ sereg, melynek $\bar{z}$-től való távolsága zérushoz tart, ha $\delta\to 0$, előállítható $\mathbf{R}_\alpha\tilde{u}_\delta=\tilde{z}_\delta^{(\alpha)}$ alakban ($\mathbf{R}_\alpha$ a *regularizátor*-nak elnevezett alkalmas operátor). Ez út helyett itt rögtön rátérünk $\tilde{z}_\delta^{(\alpha)}$ *közvetlen* meghatározásának lehetőségére (TIHONOV *(1963a)*, *(1963b)*), a munkánkban fontos

$$\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds=u(x)\qquad (c\leqq x\leqq d)$$

($Z=C^{(n+1)}[a,b]$, $U=L_2[c,d]$, $K(x,s)$ folytonos $x$ és $s$ szerint) Fredholm-féle I. fajú integrálegyenlet esetében. Fennáll az, hogy ha $u(x)=0$-hoz a $z(s)=0$ megoldás tartozik, akkor $\tilde{z}_\delta^{(\alpha)}$ minimalizálja az

$$M_n^{(\alpha)}[z,\tilde{u}_\delta]=\int_c^d\Big[\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds-\tilde{u}_\delta(x)\Big]^2dx+\alpha\int_a^b\left\{\sum_{i=0}^{n+1}K_i(s)\,z^{(i)}(s)^2\right\}ds$$

funkcionált, ahol $\alpha$-nak eleget kell tennie a $\dfrac{\delta^2}{\varepsilon_0(\delta)}\leqq\alpha\leqq\alpha_0(\delta)$ egyenlőtlenségeknek

($\alpha_0(\delta)$, $\varepsilon_0(\delta)$ $\delta$ bizonyos csökkenő függvényei, $K_i(s)$ ($i=0,1,\dots,n+1$) adott folytonos, nemnegatív függvények — $K_i(s)=1$ is vehető); ha $\delta\to 0$, $\alpha=\alpha(\delta)\to 0$ és $\tilde{z}_\delta^{(\alpha)}$ tart az egzakt megoldáshoz, ha $\delta\to 0$, ill. $\alpha\to 0$.

Bizonyítható az is (TIHONOV *(1963a)*, *(1963b)*), hogy ha $\tilde{u}_\delta(x)$ „mért" értékei az $x_i=c+ih_1-\dfrac{h_1}{2}$ $\left(h_1=\dfrac{c-d}{M},\ i=1,\dots,M\right)$ pontokban $\tilde{u}_i$, továbbá $\tilde{z}_{\alpha,j}=\tilde{z}_\delta^{(\alpha)}(s_j)$, ahol $s_j = a+jh-\frac{h}{2}$ $\left(h = \frac{a-b}{N},\ j=1, \ldots, N\right)$, akkor az integrálegyenletünk numerikus megoldását képviselő $\tilde{z}_{\alpha,j}$ mennyiségek minimalizálják a fenti $M_n^{(\alpha)}[z, \tilde{u}_\delta]$ funkcionál kvadraturaformulák stb. segítségével diszkrctizált alakját (mely például $n=2$ esetében, a $z_j$-k függvényeként felírva,

$$\sum_{i=1}^{M}\left\{\sum_{j=1}^{N} K_{ij}z_jh-\tilde{u}_i\right\}^2 h_1+\alpha\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{K_0^{(j)}(z_{j+1}-z_j)^2}{h}-K_1^{(j)}z_j^2h\right\}$$

alakú, ahol $K_{ij}$-t az $\int_a^b K(x,s)z(s)ds = \sum_{j=1}^{N} K_{ij}z_jh+O(h^\gamma)$ $(z_j=z(s_j),\ \gamma>0)$ kvadratúra-formula értelmezi, $K_\nu^{(j)}>0$ $(\nu=0,\ 1)$ pozitív konstansok, például $K_\nu^{(j)}=1$ is megfelel), — ha $\alpha=\text{const}\cdot\delta^2$, ahol a konstans, sajnos, csak kísérletezéssel határozható meg, — és az így kapott $\tilde{z}_{\alpha,j}$ mennyiségek az egzakt megoldás értékeihez tartanak, ha $\delta$ csökken és a diszkretizálást alkalmasan finomítjuk.

A gyakorlatban különböző $\alpha$ értékek mellett többször elvégzik a minimalizáló $\tilde{z}_{\alpha,j}$-k megkeresését, és a „legsimább" közelítést nyújtó eredményt fogadják el. A szereplő funkcionál minimalizálása nem egyszerű; külön irodalma van (l. például LEVITIN, POLJAK *(1966)* áttekintését). Sok esetben a (nem diszkrétizált) $M_n^{(\alpha)}[z, \tilde{u}_\delta]$ funkcionál minimalizálása visszavezethető az

$$\int_a^b \bar{K}(\eta,\xi)\,z(\xi)\,d\xi+\alpha\left\{\frac{d^2}{dy^2}\left[k_2\frac{d^2z}{d\eta^2}\right]-\frac{d}{d\eta}\left[k_1\frac{dz}{d\eta}\right]+k_0z\right\}=b(\eta)\qquad(a\leqq\eta\leqq b)$$

$(k_i>0$ $(i=0,\ 1,\ 2)$ adott függvény,

$$\bar{K}(\eta,\xi)=\int_c^d K(x,\eta)K(x,\xi)\,dx,\quad b(y)=\int_c^d K(x,\eta)\,\tilde{u}_\delta(x)\,dx)$$

*Euler*-egyenlet kerületi érték-problémájára (a deriváltak létezését feltéve), a

$$k_2(\eta)z''(\eta)|_{\eta=a,b}=0,\qquad k_1z'-\frac{d}{d\eta}\left(k_2\frac{d^2z}{d\eta^2}\right)\bigg|_{\eta=a,b}=0$$

kerületi feltételek mellett (TIHONOV, GLASZKO *(1964)*, metodológiai példával, melyben az optimális $\alpha$-értéket kísérletezéssel meg lehetett határozni). Ekkor a numerikus eljárás e probléma numerikus megoldásává alakul át.

Például $n=2$ esetén ez végül is a

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\tilde{z}_{\alpha,j}+\alpha\sum_{\varrho=i-k}^{i+k}\delta_{i\varrho}\tilde{z}_{\alpha,\varrho}=b_i\qquad(i=1,\ldots,M)$$

egyenletrendszer megoldására vezet (a diszkrétizált kerületi feltételek mellett (GLASZKO, ZAIKIN *(1966)*), ahol $a_{ij}=\bar{K}_{ij}\sigma_j$, $\bar{K}_{ij}=\bar{K}(x_i,s_j)$, a $\sigma_j$-k az $\int_a^b \bar{K}(\eta,\xi)\,z(\xi)d\xi$ integrál választott kvadratúra-formulájának együtthatói, a $\delta_{i\varrho}$-k az *Euler*-egyenletben szereplő deriváltak adott esetben használt, $k$ számú függvényértékre támaszkodó közelítő kifejezéseinek együtthatói, $b_i = b(x_i)$. — A szerzők részletes számológép-programot is közölnek ehhez.

A vizsgálatainkban szereplő konvolúciós típusú egyenletek esetében alkalmazandó formulák mindebből gépiesen levezethetők.

### Kiegészítések és problémák V. 1. §-hoz

1. Bár *I. fajú Fredholm- vagy Volterra-féle integrálegyenletek megoldása* inkorrekt probléma és így annak numerikus végrehajtása kényes feladat, rengeteg munka foglalkozott az utóbbival, mert pl. a fizikában vagy a csillagászatban újból és újból felvetődött. Elméletileg az egzakt megoldás legtöbbször felírható (vö. SCHMEIDLER *(1950)*). A korábbi numerikus módszerekben az integrál diszkretizálásával lineáris egyenletrendszer megoldására vezették vissza a kérdést, vagy $\sum_{n=0}^{M} a_n \varphi_n(x)$ típusú megoldást tételezve fel, ahol $\varphi_n(x)$ adott, az $a_n$ együtthatókat alkalmas algebrai egyenletrendszerből, vagy a legkisebb négyzetek, illetve a momentumok elve alapján számították ki. — Számos cikk stb. egyedül a konvolúciós típusú integrálegyenletekkel foglalkozott. — Nemegy módszer alapötlete lényegében már az itt leírandókhoz állt közel.

Felsorolunk néhány idevágó munkát, melyek jól bemutatják a főbb módszereket és még a gépi megoldást illetőleg is sok értékes gondolatot tartalmaznak: RUNGE *(1914)*; VAN CITTERT *(1931)*; ORNSTEIN, VAN WYK *(1932)*; BURGER, VAN CITTERT *(1932)*, *(1933)*; SCHULZ *(1934)*; CROUT *(1940)*; VAN DE HULST *(1941)*; KREMER *(1941)*; RIGHINI *(1941)*; HILDEBRAND, CROUT *(1941)*; REIZ *(1943)*; VAN DE HULST *(1946a)*, *(1946b)*; STOKES *(1948)*; KREISEL *(1949)*; KEATING, WARREN *(1952)*; ELSTE *(1953)*; BRUNK *(1953)*; TRUMPLER, WEAVER *(1953)*; YOUNG *(1954)*; BRACEWELL, ROBERTS *(1954)*; BRACEWELL *(1955)*; KAHN *(1955)*; UNSÖLD *(1955)*; CARVER, LOKAN *(1957)*; CHILDERS *(1959)*; LOEB *(1960)*; FLYNN, SEYMOUR *(1960)*; THIES *(1961)*; JONES *(1961)*; MEDGYESSY *(1961a)* pp. 80—93, 172—188; LARSON, KENNETH *(1967)*; LINZ *(1969)*; l. még a *Gauss*-függvény magú konvolúciós integrálegyenletekről a III. 1. §. 1.1.1.1.-ben mondottakat. Az utóbbiaknál használt módszerek egy része általánosabb esetekre is kiterjeszthető.

2. Az V. 1. §-ban csak megemlített, a kvázi-megoldásra épített módszer és a regularizációs módszer között összefüggés van (DOMBROVSZKAJA, IVANOV *(1965)*), erre azonban nem térünk itt ki.

3. A regularizációs módszerben igen fontos *α δ-tól való függésének* pontosabb ismerete, mert az eljárások lényegesen függnek attól, milyen α-értékkel dolgozunk; erről az összefüggésről számos cikk jelent meg, többek közt: TIHONOV, GLASZKO *(1964) (1965)*; IVANOV *(1966)*, *(1967)*.

4. A regularizációs módszerben $\bar{z}$ és $\tilde{z}_\delta$ *„távolságának" δ-tól való függése* (azaz: a közelítés jósága) szintén igen fontos; vizsgálatát közli pl. IVANOV *(1966)*.

5. Ha a kiindulási operátoregyenlet *analitikus* megoldása ismert, sokszor ennek alapján is megszerkeszthető alkalmas regularizátor, ill. közelítő megoldás. — Fontos továbbá, hogy ha található egy függvény, melynek az egzakt megoldástól való távolsága csökken az egyenlet jobb oldala δ „mérési" hibája csökkenésekor, akkor jogos azt közelítő megoldásnak tekinteni (a regularizáló paraméter ilyenkor valamelyik amúgy is szereplő paraméter lesz). Ez utóbbi esetben regularizátor megszerkesztésé-

vel, vagy egy funkcionál minimalizálásával nem kell vesződnünk (értelmezheti a megoldást pl. az adott jobb oldalra támaszkodó iterációs eljárás é. í. t.).

6. A regularizációs módszer alkalmazására az eddigiekben elég sok lehetőséget mutattunk be. Munkánkban betöltött szerepe folytán érdemes azonban az *I. fajú Fredholm-féle, konvolúciós típusú integrálegyenlettel* külön is foglalkozni (más módszerek szempontjából már volt róla szó 1. alatt). — Megoldásában a regularizációs módszerről mondottak gépiesen is alkalmazhatók volnának; külön speciális eljárást dolgozott ki azonban erre az esetre SZTRAHOV *(1968)*.

Megmutatta, hogy ha az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = f(x)$$

$(\varphi(x), f(x) \in L_2(-\infty, \infty))$ integrálegyenletről tudjuk, hogy létezik (egyetlen) $\hat{\varphi}(\xi)$ megoldása adott $\hat{f}(x)$ jobb oldal mellett és $\hat{f}(x)$ helyett csak a „mért" $\hat{f}_\delta(x)$ ismert, ahol $\hat{f}(x)$ és $\hat{f}_\delta(x)$ távolsága $\leqq \delta$, — akkor megszerkeszthető oly $\hat{\varphi}_\delta(x)$, melynek $\hat{\varphi}(x)$ től való „távolsága" a $\delta$-tól függő $\varepsilon(\delta)$-nál kisebb $\hat{\varphi}_\delta(x)$ $(\varepsilon(\delta)\downarrow 0$, ha $\delta\downarrow 0)$, pontosabban: egy $\alpha=\alpha(\delta)$, $(\alpha>0,\ \alpha(\delta)\downarrow 0$, ha $\delta\downarrow 0)$ paramétertől függő $\hat{\varphi}_\delta^{(\alpha)}(x)$ sereg, melynek tagjai tartanak az egzakt megoldáshoz, ha $\delta\to 0$, elvileg itt is egy a regularizátorhoz hasonló jellegű, $\alpha$-tól függő operátorral állítható elő. Ez utóbbi konkrét alakjára, ill. $\hat{\varphi}_\delta^{(\alpha)}(x)$-re fennáll: ha 1.

$$c_k \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\alpha}}^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{e^{ik\alpha t}}{k(t)}\,dt,$$

ahol

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-itx}\,dx \neq 0$$

majdnem mindenütt; 2. $\hat{\varphi}(x)$ normája $\leqq N$ és *Fourier*-transzformáltja valamilyen $(-\sigma, \sigma)$ szakaszon kívül azonosan zérus; 3. $\alpha>0$ mellett

$$\sup_{|t|\leqq\frac{\pi}{\alpha}} \left|\frac{1}{k(t)}\right| < \infty \quad \text{és} \quad \left|1-\frac{k(t)}{k_p^{(\alpha)}(t)}\right| \leqq C,$$

ha $|t|>\frac{\pi}{\alpha}$, ahol $C$ egy konstans és $k_p^{(\alpha)}(t)$ $k(t)$-nek a $\left[-\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}\right]$ szakaszon felvett értékeiből $\frac{2\pi}{\alpha}$ periódussal való periodikus ismétlésével előállított függvény; 4.

$$\frac{1}{k_p^{(\alpha)}(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\alpha t}$$

egyenletesen konvergens, ha $\alpha>0$; 5. $\alpha$ és $n$-t úgy választjuk meg, hogy minimalizálja a

$$\frac{\delta}{N} \sup_{|t|\leqq\sigma} \left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ik\alpha t}\right| + \sup_{|t|\leqq\sigma} \left|\frac{1}{k_p^{(\alpha)}(t)} - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ik\alpha t}\right|$$

kifejezést, — akkor

$$\hat{\varphi}_\delta^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \hat{f}_\delta(x+k\alpha) \qquad (\alpha=\alpha(\delta)).$$

E közelítés egyszerűbben kapható, mint a regularizációs módszer gépies alkalmazásával nyertek. $c_k$ $\delta$-tól függ. — $c_k$ más meghatározása elvileg lehetséges, ha a szumma által képviselt lineáris operátor bizonyos tulajdonságokkal rendelkezik, de ezzel itt nem foglalkozunk.

A 2. alattiak megszorítást jelentenek $\hat{\varphi}(x)$-re; nem követünk el azonban nagy hibát, ha a leírt eljárást bizonyos szakaszon kívül nem zérus értékű, csak gyorsan csökkenő *Fourier*-transzformáltú $\hat{\varphi}(x)$ függvény esetében is alkalmazzuk. Így nagy gyakorlati értéket tulajdoníthatunk ennek az eljárásnak.

7. A 6. alatt leírt módszer tulajdonképp egzakt megvalósítása szerzője egy korábbi módszerének, melyet az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(y-\xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x)$ $(\varphi(\xi)\in L_2(-\infty,\infty))$ *integrálegyenlet* megoldására adott (SZTRAHOV *(1963)*), melynek ötlete azonos a konvolúciós transzformáltak kiszámításában a szerző által alkalmazottéhoz (vö. *Kiegészítések és problémák* V. 4. §-*hoz*, 3). — A jelen egyenlet egzakt megoldását a legkisebb négyzetek elve alapján a $\bar{\varphi}(x) = \sum\limits_{j=-m}^{m} b_j f(x+jh)$ ($h$ adott) függvénnyel kívánta megközelíteni. Ha $\mathrm{F}[k(x);\, t] = \varkappa(t)$, $\mathrm{F}[\varphi(x);\, t] = \Phi(t)$, a szokásos feltételek mellett ezen eljárás $\delta$ hibájára, a *Parseval*-féle formula alapján fennáll

$$\delta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 \left|\frac{1}{\varkappa(t)} - \sum_{j=-m}^{m} b_j e^{ijkt}\right|^2 dt.$$

A szerző *feltette,* hogy $|\Phi(t)|^2 \leq |H(t)|^2$, ahol $H(t)$ már *ismert;* és ekkor $b_j$-nek a $\delta^2$-et majoráló

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(t)|^2 \left|\frac{1}{\varkappa(t)} - \sum_{j=-m}^{m} b_j e^{ijht}\right|^2 dt$$

integrált minimalizáló értékeket vette. Ezek után közelítő megoldásának az $f(x)$ „mért" $\hat{\varphi}(x)$ értékeivel megszerkesztett

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{j=-n}^{m} b_j \hat{f}(x+jh)$$

kifejezést vette. Korrektséget, hibát stb. nem vizsgált.

Speciális esetekben ezzel a módszerrel jó eredményt lehet elérni. Például az

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|}{\lambda}} d\xi$$

$\left(\varkappa(t) = \dfrac{1}{1+\lambda^2 t^2}\right)$ egyenlet esetén $H(t) = e^{-H|t|}$-vel, $m=5$, $\dfrac{H}{h} = 2$, $\dfrac{\lambda}{h} = 1$ mellett jó közelítést kapott, a fentiek szerint kiszámított, következő $b_j = b_{-j}$ értékekkel:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_j = b_{-j}$ | 2,2473 | –2,1640 | 0,5817 | –0,2345 | 0,0957 | –0,0279 |

8. A főszövegben csupán I. fajú *Fredholm*-féle integrálegyenletekkel kapcsolatos inkorrekt problémák regularizációs módszerrel való megoldását ismertettük. E módszerrel, — ill. módosításaival — azonban nagyon *sokféle más inkorrekt probléma* is tárgyalható volt, egyesekkel találkoztunk is munkánkban. A hatalmas irodalomból a következőket említjük meg, problémakörök szerint: *Numerikus differenciálás:* DOLGOPOLOVA, IVANOV *(1966)*; TIHONOV *(1967)*; RAMM *(1968)*; LISZKOVEC *(1968)*; VASZIN *(1969)*. — *Lineáris egyenletrendszerek megoldása:* TIHONOV *(1965c)*, *(1965e)*. — *Parciális differenciálegyenletek:* MOROZOV, IVANISCSEV *(1966)*; LISZKOVEC *(1966)*; GAVURIN *(1967)*; CSUDOV *(1967)*; VASZIN *(1968)*; ARCANGELI *(1968)*. — *Közönséges differenciálegyenletek:* GORBUNOV *(1967)*. — *Lineáris programozás:* TIHONOV *(1965d)*. — *Optimális folyamatok elmélete:* TIHONOV *(1965b)*, TIHONOV, GALKIN, ZAIKIN *(1967)*. — L. még 9.-et is.

9. Inkorrekt problémákat az utóbbi években *újabb eszközökkel* is tárgyaltak. Néhány munka e körből (tárgykör szerinti osztályozás nélkül): OETTLI, PRAGER *(1964)*; MILLER *(1964)*; BELLMAN, KALABA, LOCKETT *(1965a)*, *(1965b)*, *(1966)*; LATTÈS, LIONS *(1967)* (főleg Chap. 4, n°. 8 anyaga — elliptikus parciális differenciálegyenletek vizsgálata — hasonlít A. N. TIHONOV és iskolájának hasonló feladatokra alkalmazott regularizációs módszeréhez); BELLMAN *(1969)*; STALLMAN *(1970)*. — A regularizációs módszeréhez hasonló ötlet található GRABAR *(1967a)*, *(1967b)* munkáiban, bár fő céljuk ekvidisztanspontokon ortogonális *Csebüsev*-polinomok segítségével approximálni integrálegyenletek megoldását, ill. numerikus differenciálás eredményét.

Szerepel *valószínűségelméleti* hátterű tárgyalás is: SZUDAKOV, HALFIN *(1964)*; LAVRENT'EV, VASZIL'EV *(1966)*; PETROV *(1967)*; TURCSIN *(1967)*, *(1968)*; STRAND, WESTWATER *(1968a)*, *(1968b)*; FRANKLIN *(1970)*.

## 2. §. Egy speciális módszer bizonyos konvolúciós típusú integrálegyenletek numerikus megoldására

Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(y-x)f(x)\,dx = g(y)$$

konvolúciós integrálegyenlet numerikus megoldásához speciális módszert közöl MEDGYESSY, VARGA *(1968)* dolgozata. Ez rokon a regularizációs módszerrel. Alapgondolata, melyhez hasonlót — kidolgozatlanul — közöl HAMMING *(1962)* pp. 321—322 is, a következő: egyenletünk megoldása, a szokásos feltételek teljesülését feltételezve,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \frac{\mathrm{F}[g(y); t]}{\mathrm{F}[K(y); t]}\, dt.$$

Legyenek $g(y)$ „mért" értékei oly hosszú szakaszon ismertek, hogy annak végein $g(y)$ közel zérus; álljon rendelkezésünkre elég sok ekvidisztáns „mért" érték. $f(x)$ ezen kifejezését közelítőleg akarjuk kiszámítani. Először képezzük trapézformulával $\mathrm{F}[g(y); t]$ közelítését, $g(y)$ „mért" értékeivel, vagyis ezek „spektrumát" adott ekvidisztans $t$-értékekre. Ez a „spektrum" elméletileg közel zérus bizonyos intervallumon kívül; a valóságban $g(y)$ mérési hibáin, a *„zajon"* is elvégezzük az eljárást és így a „spektrum" a valóságban egy darabig csökkenő jelleget mutat, majd *csökkenés nélkül hullámzik.* Az utóbbi szakasz nagyjából csak a „zajtól" származik. Most ezt a szakaszt (szimmetrikusan) „levágjuk", majd szorozzuk $1/\mathbf{F}[K(x);\, t]$-vel és a szorzaton numerikusan elvégezzük az inverz *Fourier*-transzformációt a trapéz-formula segítségével; ezzel $f(x)$ egy közelítését kapjuk ekvidisztans $x$-pontokban. Ezzel az eljárással tehát a „zaj" hatását bizonyos fokig *„kiszűrtük",* de kis mértékben a $g(y)$ függvény kihatását is eltorzítottuk. Az utóbbit az előbbi jócskán ellensúlyozhatja, ha a „levágás" helyét ($T$) alkalmasan választjuk meg. Ennek láthatólag olyan szerepe van, mint a regularizáló paraméternek a regularizációs módszerben. Pontosan ezt sem ismerjük; a „spektrum" közelítése görbéjét „szemre" levágjuk ott, ahol a legkeskenyebb és a maradékkal dolgozunk tovább, — esetleg azonban az egészet megismételjük az előbbihez közeli, más levágási helyekkel é. í. t., végül az egyes eredménygörbéket összehasonlítjuk egymással és — mint szokásos — a legsimábbat fogadjuk el $f(x)$ legjobb közelítése görbéjének.

Bizonyítható, hogy ha $f(x)$ egycsúcsú volt, a „levágás", ami elméletileg $\mathbf{F}[g(y);\, t]$-nek egy $D(t)=\begin{cases}1 & |t|<T\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$ „szűrő"-függvénnyel („levágó szűrő") való szorzását jelenti, ezt az egycsúcsúságot eleve megszünteti; a numerikus esetben még inkább így lesz. Ez azonban más numerikus eljárásnak is velejárója. — A „levágás" helyének kihatása az eredményre, a numerikus módszer paramétereinek — pl. az ekvidisztans adatpontok távolságának — a megválasztása stb. a paragrafus elején idézett dolgozatban megtalálhatók. Világos, hogy minél sűrűbben fekvő „mért" adatok mellett könnyebb $f(x)$ közelítése szempontjából „optimálisan" számolni.

A gyakorlatban olykor a „spektrum" és $1/\mathbf{F}[k(x);\, t]$ összeszorzása *után* végzik el a „levágást", bizonyos előnyei folytán. A numerikus eljárás eredményességét ez nem befolyásolja, mert úgyis a paraméterek változtatásával nyert eredményekből kell a valamilyen feltétel szerint (simaság, stb.) „optimálisat" — megszemlélésük után — kiválasztani.

## Kiegészítések és problémák V. 2. §-hoz

1. A trapézformulának „spektrumok", ill. konvolúciós integrálok kiszámításában játszott szerepét illetőleg I. JONES *(1961)*; DE BALBINE, FRANKLIN *(1966)*.

2. Szimmetrikus „levágás" esetén a leírt módszer regularizációs módszer; a „levágás" helye regularizáló paraméterként szerepel (vö. MARTON, VARGA *(1971)*).

3. Természetesen a $D(t)$ „szűrő" nemcsak az említett típusú lehet; az egyszerű „levágást" erős lesimítás is pótolhatja. A különböző lehetőségeknek különböző analitikus előnyei vannak.

Ha pl. $D(t)=e^{-\varepsilon t^2}$ ($\varepsilon>0$), azaz (0) szimmetrikus, bizonyos típusú $g(y)$ esetén $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\frac{\mathbf{F}[g(y);\, t]}{\mathbf{F}[K(x);\, t]}e^{-\varepsilon t^2}\,dt$ elméletileg egycsúcsú lesz. Ezzel a formulával találkoztunk már III. 1. §. 2.2.-ben, amidőn konvolúciós transzformációval állítottunk elő tesztfüggvényt bizonyos (pl. ch-sűrűségfüggvény) szuperpozíciók felbontásához. — Az ottani eljárás tehát „zajcsökkentő" hatású is, ha numerikusan végezzük el (vö. az előbbieknek is forrásul szolgáló MEDGYESSY (*(1967a)*-ban írottakkal).

Egy $D(t)$ szűrő alkalmazásakor $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \frac{\mathbf{F}[g(y); t]}{\mathbf{F}[K(x); t]} D(t)\, dt$. Ha most $\frac{D(t)}{\mathbf{F}[K(x); t]} = \mathbf{F}[M(x); t]$, vagyis egy $M(x)$ (*nem* sűrűség-) függvény *Fourier*-transzformáltja, $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(x-y)g(y)\, dy$ és így $f(x)$ konvolúciós transzformációval állítható elő, ami *korrekt* probléma. — Ezzel az észrevétellel is találkoztunk már III. 1. §. 2.2.-ben és fel is használtuk tesztfüggvény előállításához. E konvolúciós transzformáció alkalmazásakor azonban $g(y)$ numerikusan kapott „spektruma" szemre történő levágása már nem iktatható közbe; „látatlanban" kell különböző paraméterű szűrők sorozatával kiszámítani a végeredményt és összehasonlítani azokat.

A gyakorlatban $M(x)$ tabellázható is, különböző $D(t)$ és $K(x)$ típusokhoz. — $f(x)$ ily módon való kiszámítása gyakorlatilag lényegében véve ugyanaz, mint a „spektrum", szorzat és inverz *Fourier*-transzformált képezésével történő, leírt kiszámítása.

Megjegyezzük, hogy a fentiek lényege megtalálható már MEDGYESSY *(1961a)* p. 181-en.

4. A jelen paragrafusban leírt módszer numerikus alkalmazása sokban hasonlít a III. 1. §. 1.1.1.1.-ben leírt numerikus vagy gépi *Fourier*-analízis és *Fourier*-szintézist felhasználó, konvolúciós integrál-egyenletek megoldására alkalmas módszerhez. Ez utóbbiban azonban „spektrum-levágás" nem szerepelt.

5. Világos, hogy a jelen módszer alkalmas *konvolúciós transzformáció numerikus elvégzésére* is. Ha pl. $f^*(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^*(x-y)g^*(y)dy$ számítandó ki $g^*(y)$ „mért" értékei alapján, a szokásos feltételek teljesülésekor

$$f^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \mathbf{F}[g^*(y); t] \cdot \mathbf{F}[K^*(y); t]\, dt,$$

vagyis numerikus kiszámításának menete *formailag* ugyanaz, mint fentebb $f(x)$ esetében; csupán $\mathbf{F}[K^*(y): t]$ veszi át $\frac{1}{\mathbf{F}[k(x); t]}$ szerepét. Itt a „levágás" nyilván nem olyan lényeges, mint az integrálegyenlet esetében, mert azt $\mathbf{F}[K^*(y); t]$ általában gyors csökkenésének hatása pótolja.

Ez a módszer sokszor jobb eredményt ad, mint a később, az V. 4. §-ban leírandók — például akkor, ha $K^*(x)$ „hirtelen" változik vagy sűrűn ingadozik, $\mathbf{F}[K^*(x); t]$ és $\mathbf{F}[g^*(y); t]$ azonban nem.

## 3. §. Egy másik módszer bizonyos konvolúciós típusú integrálegyenletek numerikus megoldására

A regularizációs módszer leírása során, de már korábban is

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(v-u)x(u)\, du = y(v)$$

típusú konvolúciós integrálegyenletek közelítő megoldásának alábbi útja alakult ki:

A szereplő függvénytér s annak normája rögzítése után, két függvény „távolságát" különbségük normájával mérve, az egyenlet adott jobb oldala „mért" $\hat{y}(u)$ értékeire valamilyen egyszerű lineáris operátort (S) alkalmazunk — pl. egy kiválasztott pont körüli rácspontokban „mért" értékek lineáris kifejezését képezzük — ami az egyenlet-megoldás kifejezésének egyik analitikus közelítésére van felépítve. Az egzakt megoldástól való, adott értelemben vett, a normával kifejezett $||x(u)-\mathbf{S}\hat{y}(u)||$ eltérést, „távolságot" felbontjuk az egzakt megoldás és közelítése $||x(u)-\mathbf{S}y(u)||$ eltérésének és a jobb oldal „mérési hibájával" legtöbbször arányossá tehető $||\mathbf{S}y(u)-\mathbf{S}\hat{y}(u)||$ kifejezésnek az összegére. Ha $||x(u)-\mathbf{S}y(u)||$ bizonyos paraméter változtatásával csökken, ezzel és a „mérési hiba" csökkentésével (pl. ha $||\mathbf{S}y(u)-\mathbf{S}\hat{y}(u)|| \leqq \leqq ||\mathbf{S}||\cdot||y(u)-\hat{y}(u)||$ és $||y(u)-\hat{y}(u)||<\delta$, melyet „mérési hibának" nevezhetünk) $||x(u)-\mathbf{S}y(u)||$ is tetszőlegesen csökkenthető — vagyis az S lineáris operátor alkalmazásának eredménye közelítő megoldás lesz.

Erre mutatunk példát. Alapul a következő tétel szolgál:

1. TÉTEL. *Ha az* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y-x)h(x)dx = g(y)$ *konvolúciós típusú integrálegyenletre, ahol* $K(x), h(x), g(y)$ *folytonos, fennáll*

1. *van (egyetlen) megoldása;*

2. $g(y), K(x), h(x)$ *Fourier-transzformáltjai,* $\gamma(t), \varkappa(t), \chi(t)$ *abszolút értékei integrálhatók:*

3. $\dfrac{1}{\varkappa(t)}$ *páros egész függvény* $a_{2n}$ *hatványsor-együtthatókkal;*

4. $g(y)$ *páros deriváltjai léteznek;*

5. *a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{2n}\gamma(t)t^{2n}|$ *függvénysor összege* $(-\infty, \infty)$*-en integrálható, akkor*

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} g^{(2n)}(x).$$

*Ha ezenfelül fennáll*

6. $\dfrac{1}{\varkappa(t)} = \varkappa(it);$

7. $g(z)$ *komplex z esetén egész függvény;*

8. *a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dfrac{g^{(2n)}(x)K(y)y^{2n}}{(2n)!}\right|$ *függvénysor y szerint integrálható* $(-\infty, \infty)$*-en, akkor*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)g(x+iy)\,dy$$

(JOHN *(1955b)*, MEDGYESSY *(1966a)*).

*Ha* $h(x)$ *legutóbbi kifejezésére is támaszkodhatunk,* integrálegyenletünk *közelítő, numerikus megoldása* előállítható a fentebb vázolt módon. $g(x+iy)$ ugyanis — analitikus lévén — felírható a következő, ismert interpolációs képlettel

$$g(x+iy) = \sum_{j=-m}^{m} g(x+jh) \frac{(-1)^{m-j}}{h^{2m}(m+j)!\,(m-j)!} \frac{\prod\limits_{\varrho=-m}^{m}(iy-\varrho h)}{(iy-jh)} + R_m(x, y)$$

$$\left(R_m(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} \frac{g(w)}{(w-x-iy)} \prod_{\varrho=-m}^{m} \left(\frac{iy-\varrho h}{w-x-\varrho h}\right) dw,\right.$$

$\mathscr{C}$ egyszerű zárt görbe, melynek belsejében $g(w)$ analitikus és az $x+iy$, $x+jh(j=0, \pm 1, \ldots, \pm m)$ pontok ugyanitt fekszenek). Ezzel

$$h(x) = \sum_{j=-m}^{m} w_j^{(m)} g(x+jh) + \int_{-\infty}^{\infty} K(y) R_m(x, y)\, dy,$$

ahol

$$w_j^{(m)} = \frac{(-1)^{m-j}}{h^{2m}(m+j)!\,(m-j)!} \int_{-\infty}^{\infty} K(y) \frac{\prod\limits_{\varrho=-m}^{m}(iy-\varrho h)}{(iy-jh)}\, dy.$$

*$h(x)$ $g(x)$ „mért” $\hat{g}(x)$ értékeire felépített közelítésének most a*

$$\hat{h}(x) = \sum_{j=-m}^{m} w_j^{(m)} \hat{g}(x+jh)$$

*kifejezést vesszük.*

Alkalmazzuk a bevezetőben közölt gondolatmenetet. $\hat{h}(x)$ eltérése az egzakt $h(x)$ megoldástól:

$$h(x) - \hat{h}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(y) R_m(x, y)\, dy + \sum_{j=-m}^{m} w_j^{(m)} [g(x+jh) - \hat{g}(x+jh)].$$

Az első tag $h(x)$ és $h(x)$ interpolációs formula segítségével felírt alakja főrészének — mint közelítésnek — a különbsége. A második tag tartalmazza $g(x+jh)$ „mérési hibáját”. Ha az utóbbi abszolút értékének felső korlátja $\delta$, azaz $|g(x)-\hat{g}(x)|<\delta$, ahol $\delta$ ismert, akkor

$$|h(x) - \hat{h}(x)| \leq \max_x |h(x) - \hat{h}(x)| \leq \max_x \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(y) R_m(x, y)\, dy \right| +$$

$$+ \delta \sum_{j=-m}^{m} |w_j^{(m)}| = E_1 + \delta E_2.$$

Ha bizonyítható, hogy $m \to \infty$, $\delta \to 0$ esetén $E_1 + \delta E_2 \to 0$, $\hat{h}(x)$-nek a fenti, $\hat{g}(x)$-re ható lineáris operátorral megalkotott kifejezése $h(x)$ közelítő megoldásának tekinthető, összhangban az e paragrafus elején mondottakkal, *feltéve*, hogy egy függvény normáját abszolút értéke maximumával definiáljuk.

Ezek bizonyítása csak $K(y)$ konkretizálásával lehetséges. Még $w_j^{(m)}$ kiszámítása kívánja meg ezt a legkevésbbé. Figyelembe véve ugyanis, hogy $K(y)$ páros, azt kapjuk, hogy

$$w_j^{(m)} = \frac{(-1)^j h}{(m+j)!\,(m-j)!} \int_{-\infty}^{\infty} K(hu) \frac{u^2(u^2+1^2)\dots(u^2+m^2)}{u^2+j^2} du$$

és

$$w_0^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} K(u)\,du, \quad w_{-j}^{(m)} = w_j^{(m)}, \quad w_j^{(l)} = 0,$$

ha $l<j$ vagy $j<0$. Az integranduszban levő polinomot

$$\frac{(-1)^j}{(m+j)!\,(m-j)!} \frac{u^2(u^2+1^2)\dots(u^2+m^2)}{u^2+j^2} = \sum_{k=0}^{m} B_{j,k}^{(m)} u^{2k}$$

alakban írva fel,

$$w_j^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} B_{j,k}^{(m)} \frac{m_{2k}}{h^{2k}},$$

ahol $m_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} K(u) u^{2k} du$, azaz $K(u)$ $2k$-adik kezdeti momentuma. A $B_{j,k}^{(m)}$ abszolút konstansokra fennállnak a kiszámításukra alkalmas

$$B_{j,k}^{(m)} = (-1)^{m+j} \binom{2m}{m+j} B_{m,k}^{(m)} + B_{j,k}^{(m-1)} \qquad (m=1, 2, \dots;\ j=0, 1, \dots, m;\ k=1, \dots, m;)$$

$$B_{0,0}^{(m)} = 1 \qquad (m=0, 1, \dots),$$

$$B_{j,0}^{(m)} = 0 \qquad (m=1, 2, \dots;\ j=1, \dots, m),$$

$$B_{j,m}^{(m)} = \frac{(-1)^j}{(m+j)!(m-j)!} \qquad (m=1, 2, \dots;\ j=0, 1, \dots, m),$$

$$B_{m,k}^{(m)} = -\frac{(m-1)^2}{2m(2m-1)} B_{m-1,k}^{(m-1)} - \frac{1}{2m(2m-1)} B_{m-1,k-1}^{(m-1)} \quad (m=1, 2, \dots;\ k=1, 2, \dots, m),$$

$$B_{m,k}^{(m)} = 0, \text{ ha } k<m \text{ vagy } k=0, \text{ vagy } m=0,$$

és a számítások ellenőrzésére jól felhasználható

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k B_{j,k}^{(m)} = \begin{cases} 0 & (j=0, 2, \dots, m) \\ 1/2 & (j=1) \end{cases}$$

összefüggések, melyek a fenti polinom zárt alakjának átalakításából, illetve az $u=i$ ($i^2=-1$) behelyettesítéssel vezethetők le; további összefüggések is felírhatók.

$B_{j,k}^{(m)}$ ismeretében tehát $w_j^{(m)}$ kiszámítható, ha $K(u)$ momentumait ismerjük.

A $B_{j,k}^{(m)}$ mennyiségekre táblázatot közlünk, $m=0, 1, \dots, 5$ esetére.

A $B_{j,k}^{(m)}$ állandók táblázata

$m=0$

| $j \backslash k$ | 0 |
|---|---|
| 0 | 1 |

$m=1$

| $j \backslash k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ |

$m=2$

| $j \backslash k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{5}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ |

$m=3$

| $j \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{49}{36}$ | $\frac{7}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 1 | 0 | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{13}{48}$ | $-\frac{1}{48}$ |
| 2 | 0 | $\frac{3}{40}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{120}$ |
| 3 | 0 | $-\frac{1}{180}$ | $-\frac{1}{144}$ | $-\frac{1}{720}$ |

$m=4$

| $j \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{205}{144}$ | $\frac{91}{192}$ | $\frac{5}{96}$ | $\frac{1}{576}$ |
| 1 | 0 | $-\frac{4}{5}$ | $-\frac{61}{180}$ | $-\frac{29}{720}$ | $-\frac{1}{720}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{169}{1440}$ | $\frac{13}{720}$ | $\frac{1}{1440}$ |
| 3 | 0 | $-\frac{4}{315}$ | $-\frac{1}{60}$ | $-\frac{1}{240}$ | $-\frac{1}{5040}$ |
| 4 | 0 | $\frac{1}{1120}$ | $\frac{7}{5760}$ | $\frac{1}{2880}$ | $\frac{1}{40320}$ |

$m=5$

| $j \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{5269}{3600}$ | $\frac{1529}{2880}$ | $\frac{341}{4800}$ | $\frac{11}{2880}$ | $\frac{1}{14400}$ |
| 1 | 0 | $-\frac{5}{6}$ | $-\frac{1669}{4320}$ | $-\frac{323}{5760}$ | $-\frac{1}{320}$ | $-\frac{1}{17280}$ |
| 2 | 0 | $\frac{5}{42}$ | $\frac{4369}{90720}$ | $\frac{13}{480}$ | $\frac{17}{10080}$ | $\frac{1}{30240}$ |
| 3 | 0 | $-\frac{5}{252}$ | $-\frac{541}{20160}$ | $-\frac{29}{3840}$ | $-\frac{23}{40320}$ | $-\frac{1}{80640}$ |
| 4 | 0 | $\frac{5}{2016}$ | $\frac{1261}{362880}$ | $\frac{19}{17280}$ | $\frac{13}{120960}$ | $\frac{1}{362880}$ |
| 5 | 0 | $-\frac{1}{6300}$ | $-\frac{41}{181440}$ | $-\frac{13}{172800}$ | $-\frac{1}{121160}$ | $-\frac{1}{3628800}$ |

A közelítés jóságát nyilván $K(y)$ konkretizálása után vizsgálhatjuk csak. Tekintsük a legfontosabb speciális esetet. Legyen

$$K(y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} \qquad (0<\lambda<\Lambda).$$

E függvény eleget tesz a tételben vele kapcsolatban szereplő kikötéseknek; tegyük fel, hogy a többi is teljesül. — Most

$$m_{2k} = \frac{(2k)!}{k!}\lambda^k.$$

A $\beta_{j,k}^{(m)}$ **állandók táblázata**

$m=0$

| $j \setminus k$ | 0 |
|---|---|
| 0 | 1,00000 |

$m=1$

| $j \setminus k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1,00000 | 2,00000 |
| 1 | 0 | −1,00000 |

$m=2$

| $j \setminus k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,00000 | 2,50000 | 3,00000 |
| 1 | 0 | −1,33333 | −2,00000 |
| 2 | 0 | 0,08333 | 0,50000 |

$m=3$

| $j \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,00000 | 2,72222 | 4,66666 | 3,33333 |
| 1 | 0 | −1,50000 | −3,25000 | −2,50000 |
| 2 | 0 | 0,15000 | 1,00000 | 1,00000 |
| 3 | 0 | −0,01111 | −0,08333 | −0,16666 |

$m=4$

| $j \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,00000 | 2,84722 | 5,68750 | 6,24999 | 2,91666 |
| 1 | 0 | −1,60000 | −4,06666 | −4,83333 | −2,33333 |
| 2 | 0 | 0,20000 | 1,40833 | 2,16666 | 1,16666 |
| 3 | 0 | −0,02539 | −0,20000 | −0,50000 | −0,33333 |
| 4 | 0 | 0,00178 | 0,01458 | 0,04166 | 0,04166 |

$m=5$

| $j \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,00000 | 2,92722 | 6,37083 | 8,52500 | 6,41666 | 2,10000 |
| 1 | 0 | −1,66666 | −4,63611 | −6,72916 | −5,25000 | −1,75000 |
| 2 | 0 | 0,23809 | 1,73373 | 3,25000 | 2,83333 | 1,00000 |
| 3 | 0 | −0,03968 | −0,32202 | −0,90625 | −0,95833 | −0,37500 |
| 4 | 0 | 0,00496 | 0,04169 | 0,13194 | 0,18055 | 0,08333 |
| 5 | 0 | −0,00031 | −0,00271 | −0,00902 | −0,01388 | −0,00833 |

A $\lambda$-tól való függést feltüntetendő, $w_j^{(m)}$ helyett $c_j^{(m)}(\lambda)$-t írunk. Nyilván

$$c_j^{(m)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \beta_{j,k}^{(m)} \left(\frac{\lambda}{h^2}\right)^k \qquad (j=0, 1, \dots, m),$$

ahol

$$\beta_{j,k}^{(m)} = \frac{(2k)!}{k!} B_{j,k}^{(m)}.$$

$K(y)$ fenti alakjának fontossága miatt közöljük a $\beta_{j,k}^{(m)}$ mennyiségek táblázatát is (MEDGYESSY *(1966a)*).

Erre a speciális esetre $E_1$ és $E_2$ becslése elvégezhető. Az eredmény (JOHN *(1955b)* felhasználásával MEDGYESSY *(1966a)*):

$$E_1 \leqq \frac{2\mu}{\eta_0 - y_0}\left[\frac{\eta_0}{\sqrt{1-\lambda/\Lambda}} + \frac{1}{mh}\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\frac{1}{1-\lambda/\Lambda}\right] e^{\frac{1}{6m}} e^{m[P(y_0,\lambda)-P(\eta_0,\lambda)]},$$

*feltéve,* hogy

$$mh^2 \leqq \pi\Lambda \qquad (m \geqq 1);$$

itt $y_0$ a pozitív gyöke a

$$\pi - 2\,\mathrm{arc\,tg}\, y - \frac{mh^2 y}{2\lambda} = 0$$

egyenletnek, $\eta_0$ a pozitív gyöke a

$$\pi - 2\,\mathrm{arc\,tg}\, y - \frac{mh^2 y}{2\Lambda} = 0$$

egyenletnek ($\eta_0 \geqq 1$, $\eta_0 > y_0$, $\eta_0 - y_0$ növekedik, ha $m$ növekedik), $|g(x)| \leqq \mu$,

$$P(y_0, \lambda) - P(\eta_0, \Lambda) = \log(1+y_0^2) + y_0\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{y_0}\right) - \log(1+\eta_0^2) - \eta_0\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{\eta_0}\right).$$

Ha $m \to \infty$, $E_1$ korlátja $\to 0$ (JOHN *(1955b)*) — Továbbá:

$$E_2 \leqq 2e^{\frac{1}{6m}} e^{mA(y_0,\lambda)},$$

ahol

$$A(y_0, \lambda) = \frac{h^2 m y_0^2}{4\lambda} + \frac{(m+1/2)}{m}\log(1+y_0^2) - \frac{y_0^2}{m(1+y_0^2)};$$

itt $y_0$ a

$$\pi - 2\,\mathrm{arc\,tg}\, y_0 + \frac{y_0}{m(1+y_0^2)} - \frac{h^2 m y_0}{2\lambda} = 0$$

egyenlet megoldása.

Ha $m \to \infty$, $E_2$ korlátja $\to 2e^{\frac{\pi^2\lambda}{h^2}}$ (MEDGYESSY *(1966a)*).

Látható, hogy $h$ és $m$ úgy választandó, hogy $\frac{\pi^2\lambda}{h^2}$ lehetőleg kicsi legyen. — Különben is kísérletezni ajánlatos több $h$ és $m$ értékkel, esetleg ismert eredményű feladaton vizsgálva, mennyire jó a kapott közelítő megoldás.

A $h(x)$ közelítés elvileg *lokális* jellegű: ugyanazon és néhány szomszédos pontbeli $\hat{g}(x)$ értékre van csak szükség előállításához és nem egy hosszú szakaszból vettekre, mint a legtöbb, munkánkban szóbajövő numerikus módszerben. — A gyakorlatban azonban ezt az előnyt csökkenti, hogy kis $m$ esetén elég nagy lehet a közelítés hibája.

## Kiegészítések és problémák V. 3. §-hoz

1. Az 1. Tétel feltételei közt szerepel, hogy egy $\varkappa(t)$ *Fourier*-transzformáltnak eleget kell tennie az $\frac{1}{\varkappa(t)} = \varkappa(it)$ összefüggésnek. Megoldatlan probléma mindazon *Fourier*-transzformáltak meghatározása, melyekre ez igaz. *Karakterisztikus függvények* esetében a kérdés megoldásához útmutatást ad LUKÁCS *(1968)*.

2. Az 1. Tétel végeredménye esetleg kevesebb feltétel mellett is megkapható. Például (HIRSCHMAN, WIDDER *(1955)* pp. 179—182; MEDGYESSY *(1966a)*), *ha* $K(y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}}$ $(0<\lambda<\Lambda$, $\Lambda$ *adott*), $g(y)$ *polinom vagy nemnegatív, korlátos, folytonos függvény, akkor* 1) $g^{(r)}(x)$ $(r=1, 2, \ldots)$ *létezik;* 2) $\lim_{t\to 1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} g^{(2r)}(x)\, t^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} g^{(2r)}(x)$ *fennállása esetén* $h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} g^{(2r)}(x)$ *(összhangban az általános sor-megoldással), továbbá* 3) $g(z)$ *létezik minden komplex z-re, analitikus és* $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} g(x+iy)\, dy$ *is fennáll.* — Az utóbbi szerepel már MEDGYESSY *(1954c)*-ben is.

3. Ha $K(y) = \frac{1}{2\lambda \operatorname{ch}(\pi x/2\lambda)}$ $(\lambda>0)$ (ch-sűrűségfüggvény) és $g(y) = \frac{1}{2\beta \operatorname{ch}(\pi x/2\beta)}$ $(0<\lambda<\beta)$, az 1. tétel 1.—5. feltételei teljesülnek és így a

$$\frac{1}{2\beta \operatorname{ch}(\pi y/2\beta)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\lambda \operatorname{ch}[\pi(y-x)/2\lambda]} h(x)\, dx$$

integrálegyenlet megoldása

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} g^{(2n)}(x),$$

minthogy $\varkappa(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda t}$ és $\frac{1}{\varkappa(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} t^{2n}$. Integrálelőállítás azonban nem adható meg $h(x)$-re, mert a 6. feltétel *nem* teljesül.

4. Az $E_1$ és $E_2$ hibabecsléseket a gyakorlatban nem igen használjuk; elég durvák is. Legtöbbször különböző $m$ és $h$ értékekkel előállítjuk a közelítő megoldást, majd egybevetjük őket, milyen értékelhető jellegzetességeket mutatnak. — Sokszor metodologiai példákban a legmegfelelőbbnek bizonyult $m$ és $h$ értékekkel szoktak dolgozni.

5. *Fontos tény,* hogy a numerikus módszerben szereplő $w_j^{(m)}$ *állandók a* $K(x)$ *mag* momentumaitól *függnek,* mert a momentumok már $K(x)$ *Fourier-transzformáltjával* is kiszámíthatók, sok esetben pedig csak ez áll rendelkezésre — például, ha $K(x)$ zárt alakban meg sem adható.

## 4. §. Konvolúciós transzformáltak numerikus kiszámítása

Konvolúciós transzformáltak numerikus kiszámítására egy módszert már közöltünk a *Kiegészítések és problémák* V. 2. §*-hoz* 5. pontjában. Most két másik eljárást ismertetünk.

### 1. A trapéz-formulára épített módszer

Gyakran szükség van — munkánkban is —

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,f(y-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} K(y-x)\,f(x)\,dx = g(y)$$

$\left(\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx<\infty\right)$ típusú konvolúciós transzformáltaknak „mért" $\hat{f}(x)$ értékek alapján való kiszámítására; ez egyébként *korrekt* probléma. — Szokásos a trapézformulát alkalmazni (JONES *(1961)*, RALSTON (1965) pp. 94—97, 118—121).

Előszöı $g(y)$-t

$$g(y) = \int_{-Nh}^{Nh} K(x)\,f(y-x)\,dx + \int_{|x|>Kh} K(x)\,f(y-x)\,dx$$

alakban írjuk. $N$ és $h$ értékét a körülmények szabják meg; célszerű, persze, a második tagot — a hibát — minél kisebbé tenni. Az első tagra a trapéz-formula ezt adja (RALSTON *(1965)* p. 118):

$$\int_{-Nh}^{Nh} K(x)\,f(y-x)\,dx = h\sum_{\nu=-N}^{N} w_\nu K(\nu h)\,f(y-\nu h)-$$

$$-\frac{Nh^3}{6}\left(\frac{d^2}{dx^2}\,[K(x)f(y-x)]\right)_{x=\eta} \qquad \left(-Nh\leqq\eta\leqq Nh, \quad w_\nu = \begin{cases}1/2 & (\nu=\pm N)\\ 1 & (\nu\neq\pm N)\end{cases}\right),$$

feltéve, hogy a derivált létezik; $f(x)$ helyett, persze, csak az $\hat{f}(x)$ mennyiséggel dolgozhatunk, ahol $|f(x)-\hat{f}(x)|\leqq\delta$. Végül is

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,f(y-x)\,dx = h\sum_{\nu=-N}^{N} w_\nu K(\nu h)\,\hat{f}(y-\nu h)+E,$$

ahol a hibatagra fennáll:

$$|E|\leqq\left|\int_{|x|>Nh} K(x)f(y-x)\,dx\right|+\delta h\sum_{\nu=-N}^{N} w_\nu|K(\nu h)|+$$

$$+\frac{Nh^3}{6}\left|\left(\frac{d^2}{dx^2}\,[K(x)f(y-x)]\right)_{x=\eta}\right|.$$

Konkrét esetben részletesebb becslést is kaphatunk. Hátrány, hogy minél hosszabb szakaszból — és sokszor igen sűrűn — kell $\hat{f}(x)$ értékeket venni, ha kis hibát akarunk elkövetni; ez sokszor lehetetlen.

## 2. Interpolációs polinommal való közelítésen alapuló módszer

Ennek a gondolatmenete (MEDGYESSY *(1971c)*, *(1971d)*) hasonló a 3. §-ban közölthöz. Tekintsük ismét az

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)f(y-x)\,dx = g(x)$$

konvolúciós transzformáltat. Tegyük fel, hogy $K(x)$ *összes momentumai léteznek.* $g(y)$ $f(x)$ „mért" $\hat{f}(x)$ értékeire felépített közelítését így szerkesztjük meg. Felírjuk $f(y-x)$-et interpolációs formulával:

$$f(y-x) = \sum_{j=-m}^{m}{}' f(y-jh)\frac{(-1)^{m-j}}{h^{2m}(m+j)!\,(m-j)!}\frac{\prod_{\varrho=-m}^{m}(x-\varrho h)}{(x-jh)} + R_m(x,y),$$

ahol

$$R_m(x,y) = -\frac{\prod_{\varrho=-m}^{m}(x-\varrho h)}{(2m+1)!}f^{(2m+1)}(\xi)$$

$(y-mh < \xi < y+mh)$, vagy, ha $f(z)$ a $z$ komplex változó analitikus függvénye,

$$R_m(x,y) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}}\frac{f(w)}{w-y+x}\prod_{\varrho=-m}^{m}\left(\frac{x+\varrho h}{w-y+\varrho h}\right)$$

($\mathscr{C}$ értelmezése ugyanaz, mint a 3. §-ban). Ezzel

$$g(y) = \sum_{j=-m}^{m}{}' W_j^{(m)}f(y-jh) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x)R_m(x,y)\,dx,$$

ahol

$$W_j^{(m)} = \frac{(-1)^{m-j}}{h^{2m}(m+j)!\,(m-j)!}\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\frac{\prod_{\varrho=-m}^{m}(x-\varrho h)}{x-jh}\,dx.$$

*$g(y)$ $f(x)$ „mért" $\hat{f}(x)$ értékeire felépített közelítésének most a*

$$\hat{g}(y) = \sum_{j=-m}^{m} W_j^{(m)}\hat{f}(x+jh)$$

kifejezést vesszük. Ennek eltérése a $g(y)$ megoldástól:

$$g(y)-\hat{g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)R_m(x,y)\,dy + \sum_{j=-m}^{m}{}' W_j^{(m)}[f(x+jh)-\hat{f}(x+jh)].$$

Az első tag $g(y)$-nak a saját interpolációs formulája főrészével való pótlása révén keletkező hiba. A második tag tartalmazza $f(x)$ „mérési hibáját"; feltesszük, hogy $|f(x)-\hat{f}(x)| \leqq \delta$, ahol $\delta$ ismert. $\hat{g}(y)$ közelítő megoldásnak tekinthető, ha tetszőleges $y$-ra $|g(y)-\hat{g}(y)|\to 0$, ha $m\to\infty$, $\delta\to 0$. Ekkor a közelítő megoldás $\hat{g}(x)$-nek a fenti, $\hat{f}(x)$-re ható lineáris operátorral megalkotott kifejezése. — Ez irányú vizsgálatok azonban csak $K(x)$ konkretizálása után végezhetők.

Még $W_j^{(m)}$ kiszámítása kívánja legkevésbé $K(x)$ ismeretét, ha $K(x)$ *páros függ-*

*vény.* Ekkor ugyanis

$$W_j^{(m)} = \frac{(-1)^{m+j}h}{(m+j)!\,(m-j)!} \int_{-\infty}^{\infty} K(hu)\frac{u^2(u^2-1^2)\ldots(u^2-m^2)}{u^2-j^2}\,du,$$

$$W_0^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} K(u)\,du, \quad W_{-j}^{(m)} = W_j^{(m)}, \quad W_j^{(m)} = 0, \quad \text{ha } j > m \text{ vagy } j < 0.$$

Az integrandusban álló polinomot

$$\frac{(-1)^{j+m}}{(m+j)!\,(m-j)!}\,\frac{u^2(u^2-1^2)\ldots(u^2-m^2)}{u^2-j^2} = \sum_{k=0}^{m} D_{j,k}^{(m)} u^{2k}$$

alakban írva fel,

$$W_j^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} D_{j,k}^{(m)} \frac{m_{2k}}{h^{2k}},$$

ahol $m_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} K(u)u^{2k}\,du$, vagyis $K(u)$ $2k$-adik kezdeti momentuma. *A $D_{j,k}^{(m)}$ abszolút konstansok azonban visszavezethetők a* 3. §.*-beli $B_{j,k}^{(m)}$ konstansokra.* Visszaemlékezve ugyanis arra, hogy

$$\frac{(-1)^{j}}{(m+j)!\,(m-j)!}\,\frac{u^2(u^2+1^2)\ldots(u^2+m^2)}{u^2+j^2} = \sum_{k=0}^{m} B_{j,k}^{(m)} u^{2k},$$

$u$ helyébe $iu$-t írva belátható, hogy

$$D_{j,k}^{(m)} = (-1)^k B_{j,k}^{(m)},$$

vagyis

$$W_j^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} B_{j,k}^{(m)} (-1)^k \frac{m_{2k}}{h^{2k}},$$

azaz $K(u)$ momentumai ismeretében $W_j^{(m)}$ kiszámítható, újabb táblázat nélkül. — $K(u)$ speciális eseteivel és ezzel együtt a közelítés jóságának vizsgálatával itt nem foglalkozunk.

## Kiegészítések és problémák V. 4. §-hoz

1. A 4.1. pontban a hibabecslés olykor javítható HÄMMERLIN *(1963)* módszerével.

2. Közismert a trapéz-formulának az az előnye, hogy a „mért” függvényértékek hibáját viszonylag kevéssé halmozza a végeredményben (RALSTON *(1965)* p. 119), ezért alkalmaztuk itt. Persze, más kvadratúra-formula is alkalmazható szükség esetén.

3. A leírt módszerben a pontos és közelítő megoldás eltérése abszolút értékét vettük a közelítés hibájának. Ha ehelyett az eltérés négyzete integrálját vesszük, alkalmas minimalizálásával egy *más jellegű közelítést* kaphatunk a *konvolúciós transzformáltra.* Egy ilyet találunk SZTRAHOV *(1964)* cikkében. Ebben a $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)f(y-x)\,dx$ konvolúciós transzformált egy $\bar{g}(x) = \sum_{j=-m}^{m} a_j f(y+jh)$ összeggel van közelítve, ahol az $a_j$-k az $\delta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)-\bar{g}(y)|^2 dy$ integrált minimalizáló meny-

nyiségek. Ha $\mathbf{F}[K(x); t]=\varkappa(t)$, $\mathbf{F}[f(x); t]=\varphi(t)$ léteznek és a *Parseval*-féle formula alkalmazható,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)-\bar{g}(y)|^2\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 \left|\varkappa(t) - \sum_{j=-m}^{m} a_j e^{ijht}\right|^2 dt.$$

SZTRAHOV *(1964)* cikkében feltette, hogy található egy teljesen ismert becslés $|\varphi(t)|^2$-re; legyen, mondjuk, $|\varphi(t)|^2<|H(t)|^2$ és ekkor az $a_j$ együtthatókat a $\delta^2$-et majorizáló $\int_{-\infty}^{\infty} |H(t)|^2 \left|\varkappa(t) - \sum_{j=-m}^{m} a_j e^{ijht}\right|^2 dt$ integrál minimalizálásával definiálta. Ezek után $g(x)$ közelítésének az $f(x)$ „mért" $\hat{f}(x)$ értékeivel képezett $\hat{g}(x) = \sum_{j=-m}^{m} a_j \hat{f}(y+jh)$ összeget vette. Hibabecslést nem közölt.

SZTRAHOV *(1964)* munkájában speciális $\varkappa(t)$ és $H(t)$ függvények esetére az $a_j$ mennyiségek táblázatát is közölte. Ha pl. $H(t)=e^{-H|t|}$ alkalmazható, akkor $\varkappa(t)=$ $=e^{-\lambda|t|}$ vagyis $K(x) = \dfrac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}$, $m=5$, $h=\lambda$, $H=2h$ mellett az $a_k$ értékek a következők:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_k=a_{-k}$ | 0,1511 | 0,1691 | 0,0578 | 0,0397 | 0,0064 | 0,0330 |

Ezzel — bizonyos $\lambda$ értékre — a

$$g(y) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{(y-x)^2+\lambda^2}\, dx$$

ún. *Poisson-transzformált* jó közelítését kapta.

4. *Konvolúciós transzformáltak numerikus kiszámításának* gyér az irodalma. — Természetesen speciális matematikai gépekkel is kiszámíthatók ezek közelítőleg, például szorzatintegrátorokkal. Ilyet ír le többek között MACNEE *(1953)* vagy — kvadrátplaniméter használatát feltételezve — MEDGYESSY *(1954)*.

5. Az V. 4. §. 2.-ben közölt eljárás esetében nem volna sok értelme hibabecslésekkel vesződni, mert a gyakorlatban különböző paraméterértékek mellett kiszámítjuk közelítések egy sorát, aztán összevetjük az eredményeket, simaság és hasonló szempontok alapján választva ki közülük a legtöbbet mondót. Hibabecslési képleteknek nem volna jelentősége.

6. *Fontos tény,* hogy az V. 4. §. 2.-ben szereplő közelítő megoldásban $W_j^{(m)}$ *állandók a* $K(x)$ *mag* momentumai *segítségével fejezhetők ki.* Ezek ugyanis $K(x)$ *Fourier-transzformáltjával* is kiszámíthatók, míg $K(x)$ sokszor zárt alakban elő sem állítható.

## UTÓSZÓ

Ebben összefoglaljuk 1. a munkánk körébe tartozó, de nem vizsgált problémákat: 2. legfontosabbnak látszó megoldatlan problémákat; 3. a jövőbeli kutatások legfontosabb feladatait. — A felsorolandók a következők.

Ad 1.

Olyan $k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x, \alpha_k, \beta_k)$ típusú sűrűségfüggvény-szuperpozíciók felbontását, melyekben a) *több* $\alpha_k$ *egyenlő, míg a* $\beta_k$*-k mind különbözők;* b) $f(x, \alpha_k, \beta_k)$ *több-*

*csúcsú* $\left(\text{pl. } f(x, \alpha_k, \beta_k) = \frac{\beta_k}{\pi}\left[\frac{\sin \beta_k(x-\alpha_k)}{\beta_k(x-\alpha_k)}\right]^2\right)$ — a *Kiegészítések és problémák* III. 1. §-*hoz* 33.-ban említett sűrűségfüggvény-szuperpozícióét kivéve — egyáltalán nem vizsgáltuk (vö. MEDGYESSY *(1961a)* p. 164, *(1961c)*).

A diszkrét eloszlás-szuperpozíciók köréből is könnyen találhatók hasonló példák.

Ad 2.

a) Vannak szuperpozíciók, melyek egyetlen közölt módszerrel sem bonthatók fel. Nem lehetséges például *azonos rendű, eltolt Gamma-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása;* ekkor

$$k(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k \dfrac{(x-\alpha_k)^{\gamma-1} e^{-\frac{(x-\alpha_k)}{\beta_k}}}{\beta_k^{\gamma}\Gamma(\gamma)} & (x>\alpha_1) \qquad (0<\alpha_1<\dots<\alpha_N) \\ 0 & (x \leqq \alpha_1) \end{cases}$$

(MEDGYESSY *(1961a)* p. 164, *(1961c)*). Nem lehetséges *„egyenletes” sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása* vagy *„háromszög” sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása* sem (ezek egyébként nem is korlátlanul osztható sűrűségfüggvények szuperpozíciói). *Hipergeometrikus eloszlások szuperpozíciójának felbontása* vagy *eltolt binomiális eloszlások szuperpozíciójának felbontása* sem lehetséges egyetlen közölt módszerrel sem.

b) $k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k, \beta_k)$ sűrűségfüggvény-szuperpozíciók esetében $\beta_k$ *meghatározására* nem adható meg pontos módszer, — esetleg lehetetlen is a meghatározása — a gyakorlatban azonban elsősorban erre szokott szükség lenni.

c) Sűrűségfüggvény-szuperpozíciók esetében a numerikus felbontási módszerek lényegüknél fogva *„mellékcsúcsokat”* hoznak létre a tesztfüggvény görbéjében. Ily tesztfüggvény-görbék egy sorának végignézésekor gyakran nehéz (vagy lehetetlen is) eldönteni, hogy *egy csúcs egy komponensre utal-e vagy sem.* Esetleges kísérleti háttér útmutatást adhat ennek az eldöntéséhez. Valamilyen egzakt, matematikai *teszt* azonban nagyon szükséges volna ehhez. — A tesztfüggvényt sztochasztikus folyamat-realizációnak fogva fel, esetleg található volna teszt a mérési (véletlen) hibák okozta csúcsok kiszűrésére.

Ad 3.

A felbontási módszerekben felhasznált numerikus módszerek által okozott hibák kiküszöbölhetők volnának — és egyúttal *a legjobb típusú tesztfüggvényre* jutnánk — ha egy $k(x)$, ill. $\{k_n\}$ szuperpozíció esetén megszerkeszthetnénk egy

$$b(y) = \sum_{j=A}^{B} a_j k(\alpha_j y + \beta_j)$$

vagy

$$b(y) = \sum_{j=A}^{B} a_j(y)\, k(\beta_j)$$

vagy

$$b(y) = \sum_{j=A}^{B} b_j(y) k_j$$

típusú tesztfüggvényt (vagy hasonló típusú függvényegyenleteket írhatnánk fel $b(y)$-ra; numerikus módszereink tesztfüggvények *közelítését* adják meg a $b(y) = = \sum_{j=A}^{B} a_j k(\alpha_j y + \beta_j)$ alakban. Egy ilyen eljárásban persze az is lényeges volna, hogy minél rövidebb $x(j)$ intervallumból merítsünk hozzá $k(x)$ $(k_j)$ értékeket; ez *lokális* jelleget adna az így kapott tesztfüggvénynek. Egy ilyen eljárás megalkotásához az is szükséges volna, hogy a fenti összegek egycsúcsúak legyenek, ha $k(x)$ $(k_j)$ az volt. — Az eljárás megtalálása tehát nehéz és megoldatlan probléma.

A III. 2. §. példájában az exponenciális sűrűségfüggvény-szuperpozícióhoz, valamint a *Kiegészítések és problémák* III. 3. *§-hoz* 15.-ben a *Laplace*-sűrűségfüggvény szuperpozícióhoz megadott tesztfüggvényekben az előbb leírt típusokat láthatunk; elvileg lehetséges tehát ilyet megadni. — Diszkrét eloszlás-szuperpozíciók esetében is megadható olykor a fenti típusú tesztfüggvény (vö. IV. 2. §. 1.).

E problémának — valamint a fentieknek is — általános tárgyalása azonban csak a jövő kutatásaitól remélhető.

# KIEGÉSZÍTÉSEK

## Kiegészítések II. 1.§-hoz

1. Erősen egycsúcsú eloszlásfüggvényekkel kapcsolatban a felsoroltakon kívül még a következők is fennállnak:

1. 1. TÉTEL. *Két erősen egycsúcsú eloszlásfüggvény konvolúciója erősen egycsúcsú* (IBRAGIMOV *(1956)*).

Ennek a kiterjesztése több erősen egycsúcsú eloszlásfüggvényre, illetve konvolúció-hatványokra triviális.

1. 2. TÉTEL. *Ha erősen egycsúcsú eloszlásfüggvények egy sorozata gyengén konvergál valamilyen eloszlásfüggvényhez, akkor ez a határeloszlásfüggvény szintén erősen egycsúcsú* (IBRAGIMOV *(1956)*).

Mindezek a megfelelő erősen egycsúcsú sűrűségfüggvényekre is igazak.

Nyilvánvaló, hogy erősen egycsúcsú eloszlásfüggvények, illetve sűrűségfüggvények türkörképei szintén erősen egycsúcsúak. Eltolás sem változtatja meg az erősen egycsúcsú jelleget.

A fenti 1. 1. és 1. 2. tétel átfogalmazható úgy, hogy „erősen egycsúcsú eloszlásfüggvény" helyett azt mondjuk, hogy „olyan eloszlásfüggvény, melynek deriváltja a II. 1. §. 5. tételbeli értelemben logaritmikusan konkáv".

Az előbbiek felhasználásával könnyen igazolható, hogy a normális eloszlásfüggvény, az exponenciális eloszlásfüggvény, a Gamma-eloszlásfüggvény ($p \geqq 1$ mellett) erősen egycsúcsú, valamint hogy egy

$$\lambda(t) = Ce^{-\gamma t^2} e^{i\delta t} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-i\delta_\nu t}}{(1 - i\delta_\nu t)}$$

($C$ normáló konstans, $\gamma \geqq 0$, $\delta$, $\delta_\nu$ valós, $0 < \gamma + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu^2 < \infty$) karakterisztikus függvényű sűrűségfüggvény erősen egycsúcsú.

Ez utóbbi azonban alakilag a *Pólya*-féle sűrűségfüggvények karakterisztikus függvénye, amiből már következik — a velük kapcsolatos eredmények felhasználása *nélkül* —, hogy

*a Pólya-féle sűrűségfüggvények erősen egycsúcsúak.*

Mindezek felhasználásával a II. 1. §-beli eredmények egyrésze egyszerűbben megkapható, illetve finomítható.

2. Egycsúcsúsággal kapcsolatos vizsgálatokban felhasználhatók még a következő tételek, melyek közül az elsőnek az alapja a *Pólya*-féle, konvex karakterisztikus függvényekre vonatkozó tétel (PÓLYA *(1949)*) kombinálása a *Kiegészítések és problémák* II. 1. §-*hoz* 1. Tételének következő változatával:

*Egy differenciálható $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény akkor és csak akkor egy* (0) *egycsúcsú eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye, ha $\frac{d}{dt}[t\varphi(t)] = \psi(t)$ karakterisztikus függvény* (GIRAULT *(1955)*).

2.1. TÉTEL. *Legyen $\varphi(t)$ egy valós értékű, páros függvény, melyre fennáll;* 1. $\varphi(0)=1$; 2. $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=0$; 3. *$t\varphi'(t)$ létezik és folytonos minden valós t-re, emellett* $\lim\limits_{t\to\infty} t\varphi'(t) = \lim\limits_{|t|\to\infty} t\varphi'(t)=0$; 4. *a $g(t)=\varphi(t)+t\varphi'(t)$ függvény konvex $t>0$ esetében. Ekkor $\varphi(t)$ egy* (0) *szimmetrikus,* (0) *egycsúcsú eloszlásfüggvény karekterisztikus függvénye* (LAHA *(1961)*; LUKÁCS *(1961)*; p. 311).

2. 2. TÉTEL. *Legyen $\varphi(t)$ egy valós értékű, folytonos, páros függvény, melyre fennáll:* 1. $\varphi(0)=1$; 2. *$t>0$ esetére $\varphi(t)=A(t)$, ahol $A(z)$, mint a $z = re^{i\theta} = u+iv$ komplex változó függvénye, reguláris a $D(r>0, -\varepsilon_1<\theta<\pi/2+\varepsilon_2)$ tartományban* ($\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ *tetszőlegesen kicsik*); 3. $|A(z)|=O(1)$, *ha* $|z|\to 0$; 4. $|A(z)|=O(|z|^{-\delta})$, *ha* $|z|\to\infty$ $(\delta>1)$; 5. $\operatorname{Im} A(iv)\leqq 0$, *ha* $v>0$. *Ekkor $\varphi(t)$ egy* (0) *szimmetrikus,* (0) *egycsúcsú, abszolút folytonos sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye* (LAHA *(1961)*).

PÉLDA. E tételek segítségével bizonyítható, hogy $\varphi(t) = \frac{1}{1+|t|^{\alpha}}$ $(0<\alpha<2)$ (0) szimmetrikus, (0) egycsúcsú, abszolút folytonos sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye; ismeretes, hogy ez $\alpha=2$ esetében is fennáll. (Azt, hogy $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény, már korábban bebizonyították (LINNIK *(1953)* p. 271). Mindebből új bizonyítás volt nyerhető arra a régóta ismert tételre, a II. 1. §. 1. 1. tétel alesetére (WINTNER *(1938)* p. 32), hogy a szimmetrikus stabilis sűrűségfüggvények egycsúcsúak (LAHA *(1961)*).

2. 3. TÉTEL. *Legyen $\varphi(t)$ egy valós értékű, folytonos, páros függvény, melyre fennáll:* 1) $\varphi(0)=1$; 2) $\lim\limits_{t\to\infty} t^2\varphi(t) = \lim\limits_{t\to\infty} t^3\varphi'(t) = \lim\limits_{t\to\infty} t^4\varphi''(t) = 0$; *továbbá, ha* $t>0$, 3) $\varphi(t)\geqq 0$; 4) $-\varphi'(t)\geqq 0$; 5) $\varphi''(t)\geqq 0$; 6) $-\varphi'''(t)\geqq 0$; *végül* 7) $\int\limits_0^\infty t\varphi(t)\,dt<\infty$. *Ekkor $\varphi(t)$ egy* (0) *szimmetrikus,* (0) *egycsúcsú sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye* (ASKEY *(1973)*).

R. ASKEY egy még nem publikált eredménye szerint e tétel akkor is igaz, ha a 2)—7) feltételek helyett csupán 2) $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=0$ és 3) $-\varphi'(t)$ konvex, ha $t>0$ — szerepel (ASKEY *(1973)*).

3. A II. 1. §-beli Történeti megjegyzésekhez: WINTNER *(1956)* p. 856 lábjegyzete szerint CHUNG *(1953)* azon észrevétele, hogy egycsúcsú eloszlásfüggvények konvolúciója nem szükségképp egycsúcsú, már P. LÉVYnél megtalálható (vö. *Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique* **2** (1939) Fasc. III—IV, p. 22); de ez *tévedés.*

4. II. 1. §. végén a PROBLÉMÁK közt szerepelt a következő: Igaz-e, hogy ha egy $F(x)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye, $\Phi(t)$, véges intervallumon kívül azonosan 0, akkor $F(x)$ nem lehet egycsúcsú? Azóta talált példák mutatják, hogy ez a sejtés *általánosságban* téves; az egycsúcsú $F(x)$ eloszlásfüggvényt generáló $\Phi(t)$ karakterisztikus függvények jellemzése azonban továbbra is megoldatlan probléma.

## Kiegészítések II. 2. §-hoz

1. Diszkrét eloszlás egycsúcsúságának a 2. §. 1. Definícióban közölt értelmezése ekvivalens a KEILSON, GERBER (1971) által közölttel.

2. A II. 2. §. végén a PROBLÉMÁK közt szerepelt a következő: Igaz-e az a sejtés, hogy egy kétszeresen pozitív sorozatot képező tagokból álló — és így egycsúcsú — diszkrét eloszlás és egy másik egycsúcsú diszkrét eloszlás konvolúciója egycsúcsú, vagyis hogy a „kétszeresen pozitív" fogalom a megfelelője a II. 1. §-ban eloszlásfüggvényekkel kapcsolatban bevezetett „erősen egycsúcsú" fogalomnak. Ez a sejtés azóta igazolódott; az eredményeket a következőkben foglalhatjuk össze.

2. 1. DEFINICIÓ. Egy $\{p_n\}$ $(n=\cdots, -1, 0, 1, \ldots)$ diszkrét eloszlást erősen egycsúcsúnak nevezünk, ha tetszőleges $\{h_n\}$ egycsúcsú eloszlás esetén $\{p_n\} * \{h_n\}$ is egycsúcsú (KEILSON, GERBER *(1971)*).

Ekkor $\{p_n\}$ maga is egycsúcsú.

2. 1. TÉTEL. *Két erősen egycsúcsú diszkrét eloszlás konvolúciója erősen egycsúcsú* (KEILSON, GERBER *(1971)*).

Ennek a kiterjesztése több erősen egycsúcsú diszkrét eloszlásra, illetve konvolúció-hatványokra triviális.

2. 2. TÉTEL. *Ha erősen egycsúcsú diszkrét eloszlások egy sorozata konvergál valamilyen diszkrét eloszláshoz, akkor ez a határeloszlás szintén erősen egycsúcsú* (KEILSON, GERBER *(1971)*).

Nyilvánvaló, hogy erősen egycsúcsú diszkrét eloszlások tükörképei szintén erősen egycsúcsúak. Eltolás sem változtatja meg az erősen egycsúcsú jelleget.

2. 3. TÉTEL. *Egy* $\{p_n\}$ $(n=\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ *egycsúcsú diszkrét eloszlás akkor és csak akkor erősen egycsúcsú, ha* $\{p_n\}$ *logaritmikusan konkáv, azaz* $p_n^2 - p_{n-1}p_{n+1} \geqq 0$ *minden n-re* (KEILSON, GERBER *(1971)*).

Ekkor a $p_{n-1}/p_n$ mennyiségek monoton nemcsökkenő sorozatot képeznek, vagyis $p_{n-1}/p_n \leqq p_n/p_{n+1}$ és a

$$\frac{p_n^2 - p_{n-1}p_{n+1}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (p_n^2 - p_{n-1}p_{n+1})} = q_n \qquad (n=\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$$

mennyiségek diszkrét eloszlást alkotnak, ha

$$0 < \sum_{n=-\infty}^{\infty} (p_n^2 - p_{n-1}p_{n+1}) < \infty.$$

Így tehát a „logaritmikusan konkáv" fogalom a megfelelője az eloszlásfüggvényekkel kapcsolatban a II. 1. §.-ban bevezetett „erősen egycsúcsú" fogalomnak. A fenti 2. 1., 2. 2. és 2. 3. tételek átfogalmazhatók úgy, hogy „erősen egycsúcsú diszkrét eloszlás" helyett azt mondjuk, hogy „olyan diszkrét eloszlás, mely tagjainak sorozata logaritmikusan konkáv".

Az előbbiek felhasználásával is könnyen igazolható, hogy a binomiális eloszlás, a *Poisson*-eloszlás, a geometriai eloszlás erősen egycsúcsú (további ide tartozó példák, illetve eredmények: KEILSON, GERBER *(1971)*), — valamint, hogy egy

$$\pi(z) = C \cdot e^{c_1 z} \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha_\nu z)}{\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-\beta_\nu z)} \qquad (|z| \leqq 1)$$

($C$ normáló konstans, $c_1 > 0$, $\alpha_\nu \geqq 0$, $\beta_\nu \geqq 0$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu) < \infty$) generátorfüggvényű diszkrét eloszlás erősen egycsúcsú.

Ez utóbbi azonban alakilag a totálpozitív sorozatok generátorfüggvénye, amiből már következik — a velük kapcsolatos eredmények felhasználása nélkül —, hogy *a totálpozitív sorozatok által generált diszkrét eloszlások erősen egycsúcsúak.*

Mivel, mint könnyen belátható, a „logaritmikusan konkáv sorozat" és „kétszeresen pozitív sorozat" fogalmak (konstans faktorokat nem véve figyelembe) ekvivalensek, a fentiekből már következik — a velük kapcsolatos eredmények felhasználása nélkül —, hogy

*a kétszeresen pozitív sorozatok által generált diszkrét eloszlások erősen egycsúcsúak.*

Mindezek felhasználásával a II. 2. §-beli eredmények egyrésze egyszerűbben megkapható, illetve finomítható.

Megemlítendő még a

2. 4. TÉTEL. *Legyen $f(\lambda)$ egy egycsúcsú sűrűségfüggvény, mely $\equiv 0$, ha $\lambda \leqq 0$. Ekkor az* $\left\{\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^n f(\lambda)d\lambda\right\}$ ($n = 0, 1, \ldots$) *(keverék) diszkrét eloszlás egycsúcsú* (HOLGATE *(1970)*).

## Kiegészítések III. 1. §-hoz

1. III. 1. §. 1. 1. 1. 1. 6. példájának részletesebb tárgyalását adja (a komponensszám meghatározása után illesztéssel határozva meg a paramétereket) SZŐKE, VARGA, NAGYPÁL *(1967)*.

2. III. 1. §. 1. 1. 1. 1. 7. példájához: A *Fourier*-sorfejtés, illetve *Fourier*-szintézisen alapuló tesztfüggvény-előállítási módszer egy korábbi, sikeres spektroszkópiai alkalmazását közölte LEHOTAI *(1960)*.

## Kiegészítések IV. 3. §-hoz

1. Diszkrét eloszlás-szuperpozíciók felbontásának algebrai jellegű „ad hoc" módszereivel kapcsolatban megemlítjük még, hogy egy diszkrét eloszlás adott komponensszámú, adott típusú szuperpozícióval való approximálása — a matematikai statisztika momentumos becslési módszereinek felhasználásával — már PEARSON *(1915)* kevéssé ismert cikkében is szerepel. Ő egy sokaság diszkrét jellemzője eloszlásának a feltételezett *Poisson*-eloszlástól vagy binomiális eloszlástól való eltérését úgy próbálta magyarázni, hogy *két Poisson*-eloszlás, illetve binomiális eloszlás keverékének tételezte fel a diszkrét eloszlást. Ezen *approximáló* keverék ismeretlen paramétereit momentumainak az empirikus diszkrét eloszlás momentumaival való egyeztetéséből becsülte meg, magasabb fokú egyenletek megoldása révén, lényegében véve a PEARSON *(1894)* cikkben szereplő meggondolások és számítási módszerek felhasználásával (vö. III. 3. §. **B)** 1.).

### HIVATKOZÁSOK A KIEGÉSZÍTÉSEKHEZ

ASKEY, R.
1973 Some characteristic functions of unimodal distributions[1]. Preprint. University of Wisconsin, Madison, Wis., 1973. 6 p.
HOLGATE, P.
1970 The modality of some compound Poisson distributions. *Biometrika* **57** (1970) 666—667.
LAHA, R. G.
1961 On a class of unimodal distributions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **12** (1961) 181—184.
LEHOTAI, L.
1960 Zerlegung der Absorptionskurven in Teilbanden mittels der Methode der Streuungsverminderung. *Acta Chim. Hung.* **25** (1960) 25—32.
LINNIK, JU. V.
1953 Linejnüe formü i sztatiszticseszkie kriterii. II. *Ukrain. Mat. Ž.* **5** (1953) 247—290.
LUKÁCS, E.
1961 Recent developments in the theory of characteristic functions. *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.* Volume II. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1961; pp. 307—335.
PEARSON, K.
1915 On certain types of compound frequency distributions in which the components can be individually described by binomial series. *Biometrika* **11** (1915) 139—144.
SZŐKE, J.—VARGA, L.—NAGYPÁL, I.
1967 Experimental and computer analysis of the spectral fine structure. *Proceedings of the* XIV. *Colloquium Spectroscopicum Internationale.* Debrecen, Hungary, 1967; pp. 1205—1218.
WINTNER, A.
1938 *Asympotic distributions and infinite convolutions.* Edwards Brothers, Inc., Ann Arbor, Michigan, 1938.

# A SZUPERPOZÍCIÓK FELBONTÁSÁVAL FOGLALKOZÓ FONTOSABB MUNKÁK KRONOLÓGIKUS BIBLIOGRÁFIÁJA


*1922*

SEN, N.: Über den Einfluss des Dopplereffekts auf spektroskopische Feinstrukturen und seine Elimination. *Physikalische Zeitschrift* **23** (1922) 397—399.

*1928*

DOETSCH, G.: Die Elimination des Dopplereffekts bei spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten. *Z. Physik* **49** (1928) 705—730.

*1930*

STICKER, B.: Untersuchungen über Sternfarben. II. Analyse der Farbenhäufigkeitsfunktion. *Veröffentlichungen der Universitäts-Sternwarte Bonn* Nr. 23 (1930) 20—32.

STICKER, B.: Über die Farbenhäufigkeitsfunktion in Sternhaufen. *Z. Astrophys.* **1** (1930) 174—191.

*1932*

SCHELLENBERG, O.: Zur Analyse der ultravioletten Emissionen der Erdalkaliphosphore. *Ann. Physik* **5/13** (1932) 249—264.

*1936*

DOETSCH, G.: Zerlegung einer Funktion in Gauss'sche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. *Math. Z.* **41** (1936) 283—318.

*1938*

TRICOMI, F.: Les transformations de Fourier, Laplace, Gauss et leurs applications au calcul des probabilités et à la statistique. *Ann. Inst. H. Poincaré* **8** (1938) 111—149.

*1947*

LABHART, H.: Ein Auswertegerät für Elektrophoresediagramme. *Experientia* **3** (1947) 36—37.

SZIGETI GYÖRGY: Lumineszkáló anyagok. *Elektrotechnika* (Budapest) **39** (1947) 70—73; 81—86.

*1947*

WIEDEMANN, E.: Über die Auswertung von Elektrophorese-Diagrammen nach L. G. Longsworth und Philpot - Svensson. *Helv. Chim. Acta* **30**, Pars I (1947) 892—900.

*1948*

KISS, A.—SÁNDORFY, C.: Sur les méthodes d'analyse des courbes d'absorption. *Acta Universitatis Szegediensis. Acta Chemica et Physica* **2** (1948) Fasc. 3, 71—76.

*1949*

HARDING, J. F.: The use of probability paper for the graphical analysis of polymodal frequency distributions. *J. Mar. Biol. Assoc. U. K.* **28** (1949) 141—153.

*1952*

WALLNER, A.—ULKE, R.: Auswertung von Diagrammen aus Elektrophoreseversuchen. *Hoppe-Seyler's Zeitschrift für physiologische Chemie* **290** (1952) Heft 3—6, 81—91.

*1953*

MEDGYESSY PÁL: Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* 2 (1953) 165—177.

*1954*

CASSIE, R. M.: Some uses of probability paper for the graphical analysis of polymodal frequency distributions. *Austral J. Mar. Freshw. Res.* 5 (1954) 513—522.

MEDGYESSY PÁL: Diszkrét valószínűség-eloszlások keverékének felbontása összetevőire. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* 3 (1954) 139—153.

MEDGYESSY PÁL: Újabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* 3 (1954) 155—169.

MEDGYESSY PÁL: *Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire.* Disszertáció. Budapest, 1954.

*1955*

BERENCZ FERENC: Megjegyzések az abszorpciós görbék analíziséhez. *Magyar Fizikai Folyóirat* 3 (1955) 271—278.

BERENCZ, F.: Bemerkungen zur Analyse der Absorptionskurven. *Acta Phys. Acad. Sci. Hungar.* 4 (1955) 317—326.

MEDGYESSY PÁL: Közelítő eljárás Cauchy-sűrűségfüggvények keverékének összetevőkre bontására. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* 3 (1955) 321—329.

MEDGYESSY PÁL: Kiegészítés az „Újabb eredmények valószínűségeloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban" című dolgozathoz. *Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Int. Közl.* 3 (1955) 331—341.

POULIK, M.D.—PINTERIC, L.: An electronic computer for the evaluation of results of filterpaper electrophoresis. *Nature* 176 (1955) 1226—1227.

*1956*

MEDGYESSY PÁL: Stabilis valószínűség-sűrűségfüggvényekre fennálló parciális differenciálegyenletek és alkalmazásaik. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 1 (1956) 489—518.

*1957*

MEDGYESSY, P.: Anwendungsmöglichkeiten der Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bei der Auswertung von Messungsergebnissen. *Z. Angew. Math. Mech.* 37 (1957) 128—139.

*1958*

DAEVES, K.—BECKEL, A.: *Grosszahl—Methodik und Häufigkeitsanalyse.* 2. Aufl. Verlag Chemie, Weinheim/Bergstr., 1958.

MEDGYESSY, P.: Partial integro-differential equations for stable density functions and their applications. *Publ. Math. Debrecen* 5 (1958) 288—293.

*1959*

GARDNER, D. G.—GARDNER, J. C.—LAUSH, G.—MEINKE, W. W.: Method for the analysis of multicomponent exponential decay curves. *J. Chem. Phys.* 31 (1959) 978—986.

IDU, S. M.—CUCU, N. B.: Zur Auswertung von Elektrophorese-Diagrammen. *Hoppe-Seyler's Zeitschrift für physiologische Chemie* 314 (1959) 284—288.

NOBLE, W.—HAYES, J. E. jr,—EDEN, M.: Repetitive analog computer for analysis of sums of distribution functions. *Proc. IRE* 47 (1959) 1952—1956.

*1960*

BELLMAN, R.: On the separation of exponentials. *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 13 (1960) 38—39.

DEFARES, J. G.—SNEDDON, I. N.: *An introduction to the mathematics of medicine and biology.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1960; pp. 582—586.

*1961*

MEDGYESSY PÁL: *Decomposition of superpositions of distribution functions.* Akadémiai Kiadó. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1961.

MEDGYESSY PÁL: Diszkrét valószínűség-eloszlások áttranszformálása sűrűségfüggvénnyé. (Előadás: A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézetének Valószínűségszámítási Osztálya szemináriuma, 1961. február 9.) Kivonat: *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **6** (1961) 528.

MEDGYESSY, P.: On some unsolved problems in the theory of the decomposition of superpositions of distribution functions, IIe *Congrès Mathématique Hongrois* Budapest, 24.—31. August 1960. Vol. II. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961; Section IV, pp. 16—18.

MORISON SMITH, D.—BARTLET, J. C.: Calculation of the areas of isolated or overlapping normal probability curves. *Nature* **191** (1961) 688—689.

*1963*

BROWNELL, G. L.—CALLAHAN, A. B.: Transform methods for tracer data analysis. *Ann. New York Acad. Sci.* **108** (1963) Article 1: Multi-compartment analysis of tracer experiments; pp. 172—181.

GARDNER, D. G.: Resolution of multi-component exponential decay curves using Fourier transforms. *Ann. New York Acad. Sci.* **108** (1963) Article 1: Multi-compartment analysis of tracer experiments; pp. 195—203.

LANDAHL, H. D.: Some mathematical aspects of multi-compartment analysis of tracer experiments. *Ann. New York Acad. Sci.* **108** (1963) Article 1: Multi-compartment analysis of tracer experiments; pp. 331—335.

KAPLAN, B. G.—GURVICS, V. E.: Komplekesznoe primenenie matematicseszkih metodov k élektroforeticseszkomu iszszledovaniju belkovogo szosztava krovi v norme i patologii. *Primenenie matematicseszkih metodov v biologii.* II. Izd. Leningr. Univ., Leningrad, 1963; pp. 183—190.

SYDOW, A.—DITTMANN, H.: Statistische Analysen mittels elektronischer Analogrechner. *Messen, Steuern, Regeln* **6** (1963) 501—504.

*1966*

MEDGYESSY PÁL: Egy konvoluciós típusú integrálegyenlet numerikus megoldása és ennek felhasználása Gauss-függvény szuperpozíciók felbontására. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **16** (1966) 47—64.

MEDGYESSY, P.: Remarks on the paper „On the separation of exponentials" of *R. Bellman* [1]. Kézirat. Budapest, 1966.

MEDGYESSY PÁL: Valószínűség-eloszlások általánosítása és ezzel kapcsolatos faktorizációs problémák. (Előadás: Matematikai Statisztikai Kollokvium, Debrecen. 1966. október 13—15. A Bolyai János Matematikai Társulat és a Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézete szervezésében.) Kivonat: *Matematikai Statisztikai Kollokvium. Debrecen,* 1966. *október* 13—15. *Előadás kivonatok.* Debrecen, 1966; pp. 3—4.

THIONET, P.: Note sur les mélanges de certaines distributions de probabilités. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **15** (1966) 61—80.

VARGA LÁSZLÓ: Gauss-függvények keverékének komponensekre bontásáról. *Magyar Tud. Akad. Közp. Fiz. Kutató Int. Közl.* **14** (1966) 383—389.

*1967*

BHATTACHARYA, C. G.: A simple method of resolution of a distribution into Gaussian components. *Biometrics* **23** (1967) 115—135.

MEDGYESSY PÁL: Sűrűségfüggvény szuperpozíciók felbontásának egy lényegileg új módszeréről. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **17** (1967) 383—390. (Angol fordítása: An essentially new method for the decomposition of density functions. *Selected translations in mathematical statistics and probability.* Volume 10. American Mathematical Society, Providence, 1972; pp. 170—178.)

MEDGYESSY PÁL: Szilárd anyagok keverék-voltának megállapítása matematikai módszerekkel. *Tíz példa a matematika gyakorlati alkalmazására.* (Szerkesztette Vincze István.) Gondolat, Budapest, 1967; pp. 203—223.

*1968*

MEDGYESSY PÁL—VARGA LÁSZLÓ: Gauss-függvény keverékek numerikus felbontására szolgáló egyik eljárás javításáról. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **18** (1968) 31—39.

PARSONS, D. H.: Biological problem involving sums of exponential functions of time: a mathematical analysis that reduces experimental time. *Math. Biosci.* **2** (1968) 123—128.

TRICOMI, F. G.: *Repertorium der Theorie der Differentialgleichungen.* Springer, Berlin, 1968; pp. 130—132.

VARGA LÁSZLÓ: *Nemlineáris becslési feladatok numerikus módszerei.* Disszertáció. Budapest, 1968.

ZSIDKOV, N. P.—SCSEDRIN, B. M.—RAMBIDI, N. G.—EGOROVA, N. M.: Primenenie metoda reguljarizacii dlja resenija nekotorüh zadacs gazovoj élektronografii. *Vyĉislitel'nye metody i programmirovanie.* X. Izd. Moszkov. Univ., Moszkva, 1968; pp. 215—222.

*1969*

GREGOR, J.: An algorithm for the decomposition of a distribution into Gaussian components. *Biometrics* **22** (1969) 79—93.

*1970*

ALEKSZANDROV, L.: Reguljarizovannüj vücsiszlitel'nüj proceszsz dlja analiza ekszponencial'nüh zaviszimosztej. *Ž. Vyĉisl. Mat. i Mat. Fiz.* **10** (1970) 1285—1287.

DOBOZY, O. K.—VOLLY, T.: The anomalous properties of cystine and their effect on keratine. (Előadás: Fourth International Wool Textile Research Conference, Berkeley, California, 18—27. August 1970.) Kézirat. Budapest, 1970.

PARSONS, D. H.: Biological problems involving sums of exponential functions of time: An improved method of calculation. *Math. Biosci.* **9** (1970) 37—47.

*1971*

MEDGYESSY PÁL: *Sűrűségfüggvények és diszkrét eloszlások szuperpozícióinak felbontása.* Diszszertáció. Budapest, 1971.

MEDGYESSY, P.: *Decomposition of superpositions of density functions and discrete distributions.* Akadémiai Kiadó, Budapest; megjelenőben.

(Beérkezett: 1971. V. 30.)

# MEGJEGYZÉS DANYILJEVSZKIJ MÓDSZERÉHEZ

Írta: SZIDAROVSZKY FERENC

K. G. GUDERLEY [1]-ben belátta, hogy az

(1) $$|E-\lambda A_1-\lambda^2 A_2-\dots-\lambda^n A_n|=0$$

általánosított sajátértékfeladat ekvivalens az

(2) $$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ E & & & & \\ & E & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & E & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix közönséges sajátértékfeladatával.

Felvetődik az a kérdés, hogy egy tetszőleges hipermátrixot hogyan és milyen feltételekkel lehet (2) alakra transzformálni, azaz egy hipermátrix közönséges sajátértékfeladatával ekvivalens (1) feladatot találni.

Amennyiben az $A_1, A_2, \dots, A_n$ mátrixok rendje 1, az (1) feladat a (2) mátrix karakterisztikus polinomja.

Legyenek az

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

hipermátrix blokkjai azonos rendű kvadratikus mátrixok. Tegyük fel, hogy $A_{n,n-1}$ blokk reguláris. Készítsük el az

$$M_{n-1}=\begin{pmatrix} E & & & \\ & \ddots & & \\ & & E & \\ -A_{n,n-1}^{-1}A_{n1}, \dots, & -A_{n,n-1}^{-1}A_{n,n-2}, & A_{n,n-1}^{-1}, & -A_{n,n-1}^{-1}A_{nn} \\ & & & E \end{pmatrix}$$

transzformáló mátrixot. Könnyen látható, hogy inverze

$$M_{n-1}^{-1}=\begin{pmatrix} E & & & \\ & \ddots & & \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \dots, & A_{nn} \\ & & & E \end{pmatrix}$$

alakú. Az $M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}$ mátrix utolsó blokksora az $(n-1)$-edik blokk kivételével zérus, az $(n-1)$-edik blokk pedig az egységmátrix. Feltéve, hogy az $A^{(1)}=M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}$ mátrix $(n-1)$-edik blokksorának $(n-2)$-edik blokkja reguláris, $M_{n-1}$-hez hasonló transzformációs

$$M_{n-2}=\begin{pmatrix} E & & & & \\ & \ddots & & & \\ -A_{n-1,n-2}^{(1)^{-1}}A_{n-1,1}^{(1)}, & \dots, & A_{n-1,n-2}^{(1)^{-1}}, & -A_{n-1,n-2}^{(1)^{-1}}A_{n-1,n-1}^{(1)}, & -A_{n-1,n-2}^{(1)^{-1}}A_{n-1,n}^{(1)} \\ & & & E & \\ & & & & E \end{pmatrix}$$

mátrixszal transzformálva az utolsó blokksor változatlan marad, az utolsó előtti blokksor az $(n-2)$-edik blokktól eltekintve zérus lesz. Az $(n-2)$-edik blokként az egységmátrixot nyerjük.

Az eljárást folytatva — feltéve, a főátló alatti blokkok rendre regulárisak — egy

$$M_1^{-1}M_2^{-1}\dots M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}\dots M_2M_1=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{n-1} & B_n \\ E & & & & \\ & E & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & E & 0 \end{pmatrix}$$

(2) alakú mátrixot nyerünk, melynek közönséges sajátértékfeladata ekvivalens az

$$|E-\lambda B_1-\lambda^2 B_2-\dots-\lambda^n B_n|=0$$

(1) alakú általánosított sajátértékfeladattal.

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, amikor a blokkok rendje 1, a fenti eljárás DANYILJEVSZKIJ módszerével egyezik meg.

## IRODALOM

[1] K.G. GUDERLEY: On nonlinear eigenvalue problems for matrices, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1958, 335—353.

[2] A. RALSTON: *Bevezetés a numerikus analízisbe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.

(Beérkezett: 1971. január 12.)

## REMARK ON DANILIEWSKI'S METHOD

by

F. SZIDAROVSZKY

Summary

The paper gives the block variant of the well known method of DANILIEWSKI to find the nonlinear eigenvalue problems which are equivalent to the eigenvalue problems of hypermatrices.

# ADATSOROZATOK RÖVIDÍTÉSÉNEK EGY ITERATÍV MODELLJE

Írta: NEMETZ TIBOR

## 1. Bevezetés

Az adatfeldolgozás folyamatának kiszélesedése, hatalmas adatbankok kialakulása, a nagymennyiségű adattal végzett operációk jelentős költsége megköveteli, hogy az adatokat a lehető legrövidebb formában adhassuk meg, illetve megadott adatokat 1. *egyértelmű módon*, 2. *a lehető legegyszerűbben*, 3. *a lehető legrövidebb adott típusú jelsorozattá alakítsuk át (kódoljuk)*.

Jelen dolgozatban olyan kódolási eljárást diszkutálunk, mely e hármas célkitűzés esetén bizonyos értelemben optimálisnak tekinthető.

Szükségesnek tartjuk kihangsúlyozni, hogy a dolgozat nem törekszik arra, hogy matematikai szabatossággal bizonyított tételeket vonultasson fel. Elsősorban *heurisztikus meggondolások* segítségével olyan modell megalkotását tűztük ki célul, mely viszonylag egyszerű kódoló-dekódoló szerkezet mellett hatásos adattömörítést tesz lehetővé.

Immár régóta ismert, hogy az 1. követelmény mellett nem rövidíthető le egy adatsorozat tetszőlegesen, továbbá, hogy az a küszöb, aminél rövidebb az átkódolt sorozat átlagos hossza nem lehet (bizonyos, a gyakorlatban mindig teljesülő feltételek mellett) tetszőlegesen megközelíthető, hacsak elég bonyolult kódolási rendszert választunk. Azonban ha bonyolult kódolási-dekódolási szisztémát választunk, elvesztjük azt az előnyt, amit a kódolt sorozat rövidsége jelent. Így világos, hogy olyan kódolást kell keresni, amelyik elég jó hatásfokú, de nem túl bonyolult. Hasonló helyzet előtt álltak a hibajavító kódok készítői is, jóllehet az ilyen kódok általában növelik az átkódolt sorozatok átlagos hosszát. Ez utóbbi probléma egy lehetséges megoldási módjaként vezette be ELIAS [2] az iterált hibajavító kódokat. Jelen sorozatban az adattömörítés szempontjából optimális kódok (pl. HUFFMAN, FANO-SHANNON) lásd pl. REZA [5] hasonló típusú iterált alkalmazására teszünk javaslatot.

Még a bevezetésben szükséges néhány szót ejteni arról, mit is értünk a kódolás-dekódolás bonyolultságán. Abban az esetben, ha a kódolást-dekódolást számológép végzi, ezt a bonyolultságot pl. egy jel átlagos kódolási + dekódolási idejével célszerű mérni. Ha speciális készüléket készítünk a kódolás-dekódolás lebonyolítására, mérhetjük elvileg ennek árával, vagy ami lényegében ugyanezt az eredményt szolgáltatja, a szükséges logikai egységek súlyozott számával. Ez utóbbi esetben azonban általában bizonyos műszaki követelmények sem hagyhatók figyelmen kívül. Ilyen követelmény pl. az, hogy egy jel (vagy blokk) kódolásának, illetve dekódolásának ideje ne mutasson túlságosan nagy ingadozást; ne keletkezzen túlságosan hosszú kódolásra vagy dekódolásra várakozó sor, ha az adatsorozat egyenletesen érkezik. Természetesen két különböző kódolási-dekódolási rendszer bonyolultságát ugyanezen műszaki követelmények mellett szabad csak összehasonlítani.

## 2. Fogalmak, jelölések

Az adathalmazunk mindig valamilyen jelek egymásutánjából áll. A lehetséges jeleket betűknek, összességüket ábécének nevezzük. Az adatsorozat, amelyet közleménynek hívunk, általában véletlen, így magát a sorozatot általában véletlen törvényszerűségek írják le. A közleményben levő bizonytalanság mérésére a *Shannon*-entrópia szolgál. Mivel a kódolás kölcsönösen egyértelmű, így a kódolás után nyert új sorozat (amit kódolt szövegnek hívunk) bizonytalansága ugyanakkora, mint a közleményé. Ez a tulajdonság módot ad arra, hogy alsó becslést nyerjünk az elérhető legjobb adattömörítés mértékére. A becslés alapjául az szolgál, hogy valószínűségi változók $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sorozata, ahol $\xi_i$ az $\{1, 2, \dots, N\}$ értékeket veheti csak fel $i$-től függetlenül, akkor maximális entrópiájú, ha $\xi_i$-k teljesen függetlenek, s egyenlő valószínűséggel vesznek fel minden értéket. Egy ilyen sorozat entrópiája $n \log N$. (E dolgozatban kettes alapú logaritmust használunk.)

Jelöljük az input-közlemény első $n$ jelének, mint valószínűségi változónak az entrópiáját $H_n(X)$-szel. Legyen $L_n = L_n(x_1, \dots, x_n)$ az $x_1, \dots, x_n$ közlemény kódjának hossza, rögzített kódolási eljárást feltételezve. $L_n$ nyilván valószínűségi változó; jelöljük várható értékét $\bar{L}_n$-sal. Jelöljük $H_n(Y)$-val az első $n$ közleményjelnek megfelelő kódszöveg entrópiáját. Kölcsönösen egyértelmű kódolási eljárást tételezve fel, nyilván

$$H_n(X) = H_n(Y).$$

Jelöljük $N$-nel az output ábécé jeleinek számát. Ekkor az előzőek szerint a kódszöveg $k$ jelének mint valószínűségi változónak az entrópiája felülről becsülhető $k \log N$-nel. Ezért érvényes a következő:

$$H_n(Y) = E\{H_n(Y)|L_n = k\} \leqq E\{k \cdot \log N | L_n = k\} = \bar{L}_n \cdot \log N.$$

Így

$$1 = \frac{H_n(X)}{H_n(Y)} \geqq \frac{H(X)}{\bar{L}_n \log N},$$

ahonnan:

$$\bar{L}_n \geqq \frac{H_n(X)}{\log N}.$$

vagy mindkét oldalon $n$-nel osztva

$$\frac{1}{n} \bar{L}_n \geqq \frac{1}{n} H_n(X)/\log N,$$

amikor is figyelembe vettük, hogy független jelsorozat esetén

$$\frac{1}{n} H_n(X) = H_1(X) = H(X)$$

($H(X)$ a forrás entrópiája).

A nyert egyenlőtlenség úgy interpretálható, hogy az egy közleményjel kódolásához szükséges átlagos szóhossz nem lehet kisebb, mint

$$H(X)/\log N.$$

Ez az alsó határ tetszés szerinti pontossággal megközelíthető „majdnem független",

„majdnem stacionárius" sorozatok esetén, ha a közlemény betűiből blokkokat készítünk, s ezeket mint egy új ábécé betűit kódoljuk. Nem tartjuk célunknak e téma részletesebb vizsgálatát, utalunk viszont e tekintetben CSISZÁR I. [1] munkájára.

A fenti megfontolás azt mutatja, hogy egy $K$ kódolás $h(K)$ hatékonyságát (pusztán az adatömörítés szempontjából, a bonyolultság figyelmen kívül hagyásával) jól jellemzi a

$$h_{sz}(K) = \frac{H_n(X)}{\bar{L}_n \cdot \log N} \tag{1}$$

mennyiség. Ezen kifejezésben számlálót, nevezőt $n$-nel, azaz a közleményt alkotó betűk számával osztva, $h(K)$ úgy interpretálható, mint a betűnkénti átlagos bizonytalanság és a betűnkénti átlagos kódszó-hossz hányadosának $1/\log N$-szerese. A továbbiakban így is fogjuk használni $h_n(K)$ (1) kifejezését.[1] Ha a közlemény valószínűségeloszlása, továbbá az output ábécé adott, csak az átlagos szóhossztól függ egy kód hatékonysága. A továbbiakban egy $K_1$ kódot akkor mondunk jobbnak egy $K_2$ kódnál, ha elég hosszú közlemény kódolása esetén a $K_1$ kód melletti átlagos szóhossz kisebb a $K_2$-nek megfelelőnél, azaz, ha létezik olyan $n_0$, hogy

$$h_n(K_1) > h_n(K_2) \quad \text{hacsak} \quad n \geqq n_0.$$

Osszuk be $r$-es blokkokba a közleményt, s jelöljük $K_r$-rel a minimális átlagos szóhosszat eredményező blokk-kódot. Elég általános feltételek mellett $h(K_r)$ konvergál 1-hez, ha $r \to \infty$, viszont a $K_r$-nek megfelelő kódoló és dekódoló szerkezet bonyolultsága exponenciálisan növekszik. Így célszerű lemondani arról, hogy optimális kódot használjunk, hacsak tudunk találni olyan $K^*$ kódolást, melyre $h_n(K^*)$ és $h_n(K_r)$ elég közel vannak, s melynek bonyolultsága lényegesen kisebb $K_r$ bonyolultságánál. Világos, hogy egy ilyen $K^*$ kódolás általában nem lehet blokk-kódolás. Így csak abban az esetben várható kevébé bonyolult kódolás, ha nemcsak a kódszók hossza változó hosszúságú, de a közleményből is valamilyen formában változó hosszúságú szavakat alakítunk ki, s azokat kódoljuk ugyancsak változó hosszúságú kódszavakká. Ennek egy megvalósítási lehetősége az iteratív kódolás.

## 3. Az iteratív kódolás modellje

Tegyük fel, hogy a közlemény betűi mint valószínűségi változók egymástól teljesen függetlenek, s azonos eloszlásúak. Osszuk be a közleményt $r$ hosszúságú blokkokra, s alkalmazzunk ezekre egy közös blokk-kódot, amely a fenti értelemben optimális, tehát amely minimális átlagos szóhosszat eredményez. Független, azonos eloszlású változók esetén ez a jól ismert *Huffman*-kód egyik variánsa lesz (lásd [5]). Általában, ha létezik az $r$-es blokkok határeloszlása, akkor az alkalmazandó kód e határeloszláshoz tartozó *Huffman* kódok egyike. Nevezzük közbeeső közleménynek az input-sorozatból e kódolás végrehajtása révén nyert sorozatot. Megjegyezzük, hogy a közbenső közlemény ábécéje nem kell hogy megegyezzék akár az input akár az output ábécével.

[1] Abban az esetben, ha a közleménysorozat független jelekből áll, s $K$ blokk-kódot jelöl, $h_n(K)$ nem függ $n$-től. Ezért ilyen esetben az $n$ indexet a továbbiakban elhagyjuk.

Osszuk be a közbeeső közleményt $s$ jelből álló blokkokra és alkalmazzunk ismét egy optimális kódolást. Ily módon a kódolás bonyolultsága lényegében megegyezik egy $K_r$ és $K_s$ kód bonyolultságának összegével, ami általában lényegesen kisebb, mint egy $K_{r+s}$ kód bonyolultsága[2]. Legyenek az input közlemény jelei függetlenek, tételezzünk fel azonos input—output ábécét és legyen az egyes betűk eloszlása nagyon közel valamilyen pontra koncentrált eloszláshoz. Ekkor a $K_r$ és $K_s$ kódok egymásutánja $(r, s \geqq 2)$ is nagyon közel van a $K_{r+s}$ kódhoz. Ezt úgy értjük, hogy azon $(r+s)$-es blokkok halmazának valószínűsége, melyekre a $K_r$ és $K_s$ kódok egymásutánja és a $K_{r+s}$ kód nem egyezik meg, közel van nullához. Nem mondható el viszont ugyanez a $K_t$ és $K_{r+s}$, $t < r+s$ kódokról. Ez a heurisztikus megfontolás azt látszik igazolni, hogy létezik a valószínűségeloszlásoknak olyan összessége, ahol a javasolt iteratív kódolás lényegesen hatékonyabb, mint egy sor, nála lényegesen bonyolultabb más kód. A következő pontban ezt az állítást egy egyszerű esetben be is bizonyítjuk. Nézzük most meg azonban, milyen kérdéseket vet fel egy ilyen modell gyakorlati megvalósítása.

**3.1.** Nyilvánvaló, hogy amennyiben hosszú sorozatokat kell átkódolni és a közbeeső közlemény $s$-blokkjainak van határeloszlása, akkor a második kód az ezen határeloszlás által származtatott *Huffman* kód egyik variánsa, feltéve, hogy a határeloszlásban csak olyan blokk-értékek valószínűsége nulla, amelyeknek bármely rögzített helyen is nulla a valószínűsége. Valóban, számozzuk meg valamilyen sorrendben a blokkok értékeit, s jelölje

$l_i$ az $i$-edik értéknek megfelelő szóhosszat,

$p_i$ az $i$-edik érték határvalószínűségét,

$n_i$ az $i$-edik érték gyakoriságát egy $n$ db blokkból álló közbeeső közleményben.

Ekkor az output szöveg egy blokkra eső átlagos hossza

$$\frac{1}{n} L_n = \frac{1}{n} \sum l_i n_i = \sum l_i \frac{n_i}{n} \to \sum l_i p_i$$

a feltétel miatt. Így $\frac{1}{n} L_n$ határértékben akkor minimális, ha $\sum l_i p_i$ is az. Mivel az $l_i$ értékek egész számok, ez azt jelenti, hogy létezik olyan $n_0$, hogy $n > n_0$ esetén a $P = \{p_i\}$ eloszláshoz tartozó *Huffman*-kód optimális, abban az értelemben, hogy szóhosszvektora egyértelműen meghatározott. Ez a kód akkor biztosítja az (egyértelmű) dekódolhatóságot, ha $p_i > 0$ mindig, hacsak előfordulhat, hogy $n_i > 0$, azaz ha a határeloszlásban minden olyan érték valószínűsége pozitív, amelynek előfordulása elvileg nem zárható ki. A fenti meggondolás megmutatja azt is, hogyan kell eljárni akkor, ha e feltétel nem teljesül. Legyen $p_j = \min\limits_{(i)} p_i$, s konstruáljunk egy kódot a fenti *Huffman*-kódból úgy, hogy $l_i^* = l_i$ hacsak $p_i > 0$ és $i \neq j$, $l_j^* = l_j + 1$, és $p_i = 0$ esetén válasszuk meg tetszőlegesen $l_i^*$-ot úgy, hogy a

$$\sum_{i=l} \left(\frac{1}{N}\right)^{l_i^*} \leqq 1$$

[2] Ezen állítás szabatossá tétele megkövetelné a bonyolultság egzakt definícióját is. Jelen heurisztikus meggondolásaink céljára azonban elegendőnek tartjuk szemléltetésként megjegyezni, hogy bináris esetben egy $K_r$ kód $2^r$ szót tartalmazó „szótárt" igényel. Ezért az első esetben $2^r + 2^s$ jelenthetné a bonyolultság egy mérőszámát, míg a második esetben ez a mérőszám $2^{r+s}$ lenne.

egyenlőtlenség teljesüljön. Ez végrehajtható, hiszen

$$1 = \sum_i \left(\frac{1}{N}\right)^{l_i} > \sum_{i \neq j} \left(\frac{1}{N}\right)^{l_i} + \left(\frac{1}{N}\right)^{l_j+1}. \tag{2}$$

**3.2.** Ugyanez a gondolatmenet mutatja, hogy az első kódolásnál is a legjobb egy fenti típusú kód lenne, hacsak nem akarnánk a közbeeső sorozatot tovább kódolni. A közbeeső sorozat $s$-blokkjainak határeloszlása nyilvánvalóan függ ugyanis az első kódtól. Nem nyilvánvaló még az sem, hogy az első blokk-kódnak *Huffman*-típusúnak kell lenni. Érdekes viszont és könnyen látható, hogy az azonos szóhosszúságú *Huffman*-kódok sem ekvivalensek. Erre a következő pontban fogunk példát mutatni.

**3.3.** Abból a tulajdonságból, hogy az első kód változó szóhosszúságú, míg a második kód rögzített nagyságú blokkokat kódol tovább, következik, hogy a két kódolás között a közbeeső szöveget vagy annak részét tárolni kell. Az, hogy milyen hosszúságú tárolót kell alkalmazni, függ a két kódolás egymáshoz viszonyított sebességétől is. Legyen egy $r$-blokk kódolásának ideje $R_1$ az első kódnál s $R_2$ a második kódnál. Jelölje $l_{\max}$ ill. $l_{\text{átl}}$ a maximális, illetve átlagos szóhosszat az első kód számára. Akkor nyilvánvalóan véges buffer segítségével a kódolás zavartalanul lebonyolítható, ha

$$R_1 > \frac{l_{\max}}{s} R_2 \tag{3}$$

(ekkor $s+l_{\max}$ tárolóhelyet tartalmazó buffer feltétlen elégséges), míg a második kódolásra várakozó közbeeső szöveg hossza 1 valószínűséggel minden határon túl nő, ha

$$R_1 \leqq \frac{l_{\text{átl}}}{s} R_2. \tag{4}$$

Így $R_1$ és $R_2$ megválasztásánál ezt figyelembe kell venni. Ha

$$\frac{l_{\text{átl}}}{s} R_2 < R_1 \leqq \frac{l_{\max}}{s} R_2, \tag{5}$$

problémát jelent a buffer-tároló hosszának megfelelő megválasztása. Ha sok hosszú kódszó következik egymás után a közbeeső közleményben, akkor előfordulhat, hogy a második kódolás nem győz helyet csinálni a kódszavaknak a buffer-tárolóban. Ezt az eseményt túlcsordulásnak nevezzük. Ezen esemény valószínűsége tetszőlegesen kicsivé tehető, ha a tároló hosszát elég nagyra választjuk. A probléma lényegében ugyanaz, mint ami *Huffman*-kódok (vagy általában változó szóhosszúságú kódok) dekódolásánál jelentkezik. Így részletesebb taglalása helyett utalunk JELINEK [4] dolgozatára.

**3.4.** A dekódolásnál két buffer-tárolót kell használni. Ezek közül a második, tehát a két típusú dekódolás közti, lényegében azonosan viselkedik, mint a kódolási oldalon elhelyezkedő tároló, míg az első túlajdonságainak vizsgálata lényegesen bonyolultabb lehet. Ehhez ugyanis a második kódolás után nyert kódszöveg valószínűségi törvényszerűségeinek analízise szükséges, ami általános feltételek mellett meglehetősen összetett feladat, jóllehet konkrét esetekben rutin jellegű, de hosszadalmas munka.

**3.5.** Szükségesnek tartjuk megemlíteni, hogy fix blokkhossz mellett történő többszöri iterációtól általában nem várhatjuk, hogy az optimálishoz tetszőleges közeli szóhosszt eredményez, ha az iterációk számát növeljük. Valóban ez következik abból, hogy ha az $r$-es blokkok valószínűségeloszlása elég közel van az egyenleteshez, akkor a blokkokra alkalmazható legjobb *Huffman*-kód az azonosság.

**3.6.** A közbeeső ábécé megválasztása általában a műszaki lehetőségektől függ. Úgy tűnik azonban, hogy az input—output ábécé tetszőleges volta mellett is a legcélszerűbb közbeeső ábécének vagy a csak két betűből álló vagy az output ábécét választani.

## 4. Bináris eset

Legyen a közlemény független, azonos eloszlású bináris jegyek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sorozata, melyre

$$p = P\{\xi_i=0\} = 1-P\{\xi_i = 1\} = 1-q, \tag{6}$$

s tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $1>p\geqq 1/2$. Legyen a közbeeső $Z_1$ ábécé és az output $Y$ ábécé azonos az input ábécével $X\equiv Z_1\equiv Y\equiv\{0;\ 1\}$. Lássuk be, hogy ha a közleményt beosztjuk $r$-es blokkokra, s minden lehetséges $r$-es blokknak megfeleltetünk egy pozitív és véges tagszámú bináris szót (ugyanennek a blokknak mindig ugyanazt), akkor a megfelelő képsorozatot $s$-es blokkokra osztva léteznek a határvalószínűségek. E célból rendezzük el valamilyen sorrendbe a lehetséges $2^r$ blokkértéket (pl. a valószínűségük nagysága szerint), s jelöljük $n_i$-vel az $i$-edik blokkértékhez rendelt bináris szó hosszát. (Megjegyezzük, hogy ha a megfeleltetés dekódolható kódolást jelent, akkor $\sum(1/2)^{n_i}\leqq 1$, s optimális esetben $=$ jel érvényes.)

Jelölje továbbá $p_i$ az $i$-edik blokkérték valószínűségét, s vezessük be a következő valószínűségeloszlást:

$$w_k = \sum_{n_i=k} p_i, \qquad k=1, 2, \ldots. \tag{7}$$

A fentiek szerint nyilván $w_1+w_2+\ldots = 1$, $w_k=0$, hacsak $k$ elég nagy, továbbá $w_k<1$ minden $k$-ra, kivéve azt a patologikus esetet, ha $n_i=n_1$, nem függ $i$-től. (Ettől az esettől a továbbiakban eltekintünk.) Jelöljük $d$-vel azon $k$-k legnagyobb közös osztóját, melyekre $w_k>0$.

Állításunk bizonyításához hasznos lesz a következő

LEMMA: *Jelölje $P_n$ annak a valószínűségét, hogy a képszöveg $(n+1)$-edik helyiértékén új képszó kezdődik. Ekkor*

$$P_n \to \frac{d}{\sum k w_k}, \quad \text{ha} \quad d/n \tag{8a}$$

$$P_n = 0 \quad \text{különben.} \tag{8b}$$

*Bizonyítás.* Mindenekelőtt vegyük észre, hogy $w_k$ akkor és csak akkor pozitív, ha létezik $k$ hosszúságú képszó. Így $d$ megegyezik az $n_1, n_2, \ldots, n_{2^r}$ számok legnagyobb közös osztójával. Másrészt $P_n$ csak akkor lehet pozitív, ha az

(9) $$x_1 n_1 + \ldots + x_{2^r} n_{2^r} = n$$

diophantikus egyenlet megoldható. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy $d$ osztója legyen $n$-nek, így (8b) nyilvánvalóan helyes. A (9) egyenlet alapján könnyen felírhatjuk $P_n$ explicit képletét is:

(10) $$P_n = \sum_{x_1 n_1 + \ldots + x_{2^r} n_{2^r} = n} \frac{(x_1 + \ldots + x_{2^r})!}{x_1! \ldots x_{2^r}!} \cdot p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_{2^r}^{x_{2^r}}.$$

(10) helyett hasznosabb számunkra a következő rekurzió:

(11) $$P_n = \sum_{k=1}^{m} w_k P_{n-k},$$

ahol $m = \max \{K : W_k > 0\}$, tehát a legnagyobb index, melyre $W_k$ pozitív.

Jelen rekurzió verifikálásához elég figyelembe venni, hogy az

$A_k^{(n)} = \{(n-k)$-adik helyen új szó kezdődik, s ez nem fejeződik be az $n$-edik hely előtt$\}$

események $(k = 1, 2, \ldots, m)$ teljes eseményrendszert alkotnak.

A (11) lineáris rekurzió általános megoldása, mint az jól ismert (lásd pl. GELFAND [3])

$$P_n = \alpha_1 z_1^n + \alpha_2 z_2^n + \ldots + \alpha_m z_m^n$$

alakú, ahol $z_1, z_2, \ldots, z_m$ a

(12) $$z^m = w_1 z^{m-1} + \ldots + w_{m-1} z + w_m$$

egyenlet gyökei. Mivel $\sum w_i = 1$, így $z_1 = 1$ gyöke (12)-nek, s vele együtt nyilván minden $d$-edik egységgyök is.

Mivel $0 \leqq P_n \leqq 1$ minden $n$-re, így egyetlen gyök abszolút értéke sem lehet nagyobb 1-nél. Valóban, indirekt feltevéssel élve, vegyünk (12)-ben tagonként abszolút értéket, $|z^m|$-mel átosztva adódik, hogy

$$1 \leqq w_1 \frac{1}{|z|} + w_2 \frac{1}{|z|^2} + \ldots + w_m \frac{1}{|z|^m} < w_1 + \ldots + w_m = 1$$

ami nyilván ellentmondás.

Felhasználva $d$ definícióját, s alkalmazva az $y = z^d$ helyettesítést, (12) a következő alakban írható:

(12*) $$y^t = w_d y^{t-1} + w_{2d} y^{t-2} + \ldots + w_m,$$

ahol $m = t \cdot d$. Belátjuk, hogy (12*) egyetlen egy abszolút értékű gyöke $y = 1$. Valóban, vegyük mindkét oldal abszolút értékét s a jobb oldalon vegyünk tagonként is abszolút értéket. Ekkor 1 abszolút értékű gyököt feltételezve:

$$1 \leqq w_d + w_{2d} + \ldots + w_m = 1$$

s így az első egyenlőtlenség helyén határozott egyenlőségnek kell lenni. Ez csak akkor lehetséges, ha valamennyi olyan $y$ hatvány argumentuma megegyezik, melynek együtthatója pozitív. Ez speciálisan azt jelenti $w_m > 0$ miatt, hogy gyök csak annyiadik egységgyök lehet, mint a pozitív együtthatóval előforduló hatványkitevők legnagyobb közös osztója. (12*) konstrukciója miatt ez a l. n. k. o. eggyel egyenlő, így valóban az egyetlen egy abszolút értékű gyök $y_1 = 1$. Nyilvánvalóan (12*) $y_1 = 1$, $y_2, \ldots, y_t$ gyökeivel fennáll, hogy

$$P_{nd} = \beta_1 y_1^n + \ldots + \beta_t y_t^n \tag{13}$$

s innen

$$P_{nd} \to \beta_1, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Elegendő tehát $\beta_1$-et meghatározni. Ahelyett azonban, hogy ezt a kezdeti feltételek segítségével tennénk, felhasználjuk, hogy az $A_k^{(n)}$, $K=1, 2, \ldots, m$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Nyilván

$$P(A_k^{(n)}) = P_{n-k} \cdot \sum_{i=k}^{m} w_k.$$

Így

$$1 = \sum_{k=1}^{m} P(A_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{m} P_{n-k} \sum_{i=k}^{m} w_i.$$

Legyen $n$ osztható $d$-vel; ekkor $w_i = 0$, ha $d$ nem osztója $i$-nek, s ezért

$$1 = \sum_{k=1}^{t} P_{n-kd} \sum_{i=kd}^{t} w_{id} \to \beta_1 \sum i w_{id} = \beta_1 \frac{1}{d} \sum K w_k,$$

ahonnan átrendezéssel adódik a (8a).

MEGJEGYZÉSEK. 1. A bizonyításban sehol sem használtuk fel, hogy akár az input, akár a közbeeső ábécé bináris. Egyetlen lényeges feltevés szerepelt: a közleményben kialakított blokkok legyenek teljesen független valószínűségi változók. Ezért nyilvánvalóan megfogalmazható a lemma általánosabban is, s a bizonyítás megismételhető.

2. A lemma levezethető a felújítási tételből is. Azonban a közbeeső ábécé $s$-blokkjainak vizsgálata számára hasznosabbnak ítéltük ezt az utat követni.

Osszuk be a közbeeső közleményt $s$-blokkokra, és nézzük meg, létezik-e az $s$-blokknak a határeloszlása! Tekintsük először azt az esetet, amikor $s$ osztható $d$-vel. (Nyilván ez az eset áll fenn, ha $d=1$). Ekkor minden $s$-blokk kezdőjegye egyúttal egy lehetséges kezdőjegy a képszavak számára is; — továbbá a képszavak minden lehetséges kezdőjegye e helytől visszafelé számított $d, 2d, \ldots$-edik helyen van. Ez azt mutatja, hogy ekkor az $s$-blokkok valószínűsége ugyanolyan típusú $P_n$ valószínűségektől (és ugyanúgy) függ, tehát a határvalószínűség létezik. Általában egy rögzített $s$-blokknak, mely az $n$-edik helyen kezdődik, a valószínűségét hasonlóan határozhatjuk meg, mint a (11) rekurzió bevezetése történt:

Jelölje $\eta_n$ az $n$-edik $s$-blokkot. Ekkor

$$P\{\eta_n = .\} = \sum_{k=1}^{m} P\{\eta_n = . | A_k^{ns}\} \cdot P(A_k^{n \cdot s}) = \sum_{k=1}^{m} P\{\eta_n = . | A_k^{ns}\} \sum_{i=k}^{m} w_i \cdot P_{n \cdot s - k}. \tag{14}$$

Lemmánkból következik, hogy $\lim P_{n \cdot s - k}$ létezik, ha $n \cdot s - k - 1$ osztható $d$-vel (és ez nem függ $n$-től), egyébként $P(A_k^{ns}) = 0$. Nyilvánvaló továbbá, hogy amennyiben

$P\{\eta_n=.|A_k^{ns}\}$ pozitív, csak $k$-tól függ. Ha $d$ osztója $s$-nek, akkor (14)-ben $n$-től függetlenül ugyanazon $k$-nak megfelelő feltételes valószínűségek szerepelnek pozitív szorzóval; — ez utóbbiak határértéke létezik, így létezik a lim $P(\eta_n=.)$ határeloszlás is. Abban az esetben, ha $d$ nem osztója $s$-nek, az, hogy a $P_{ns-k}$ valószínűség nulla-e vagy sem, függ $n$-től is. Így különböző $n$ értékek mellett (14)-ben különböző feltételes valószínűségek szerepelnek pozitív szorzótényezővel, tehát nem is várható, hogy létezzen (stacionárius) határeloszlás. Képezzünk viszont egy új valószínűségeloszlást (14) segítségével:

$$Q(\eta_n^*=.)=\frac{1}{d}\sum_{i=0}^{d-1}P(\eta_{n+i}=.). \tag{15}$$

Akkor a $Q(.)$ eloszlásra már érvényes lesz a fenti érvelés, így a „$d$-es átlagok" konvergálnak egy valószínűségeloszláshoz. Hasonlóan, mint azt a 3.1-ben tettük, belátható, hogy a második kódolás akkor optimális, ha ezen határeloszlással képezett *Huffman*-kódot alkalmazunk (azzal a megszorítással, amelyet ott tettünk).

MEGJEGYZÉS. Az utóbbi esetben célszerű lehet második kódként két-három különböző kódot felváltva alkalmazni. Konkrét példaként vizsgáljuk meg a bináris esetet, midőn $r=s=2$. Tegyük fel, hogy $p>1/2$. Ekkor, mint azt könnyű látni, a *Huffman*-kód szóhosszvektora a (00) (01) (10) (11) rendezés mellett (a továbbiakban mindig ezt a rendezést tételezzük fel)

$$N=\begin{cases}(2,2,2,2) & \text{ha} \quad 1/2\leqq p\leqq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\[2ex] (1,2,3,3) & \text{ha} \quad \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq p<1.\end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy az első esetben nem érdemes kódolni: bármilyen konkrét realizációt választunk ugyanis a $K_0$ és $K_1$ kódok számára, ez mindig helyettesíthető egyetlen $K^*$ kódolással, mely ugyancsak 2-es blokkokat kódol át ugyanolyan hatásfokkal. Kevésbé nyilvánvaló, de bebizonyítható, hogy bármilyen, a másodiktól különböző szóhosszvektort választunk is az első kódolás ($K_0$) számára, s annak bármilyen realizációját tekintjük is, a második kódolás ($K_1$) által szolgáltatott nyereség nem lehet nagyobb annál a veszteségnél, amit az első kódolás szóhosszvektorának különbözősége okoz. Így az első kódolás esetén elegendő foglalkozni (1, 2, 3, 3) szóhosszú kódokkal. Másrészt láttuk általánosan, hogy a második kódolás optimális esetben *Huffman*-kódot jelent, s mivel a (2, 2, 2, 2) szóhosszúságú kóddal a kódolt szöveg átlagos hossza nem csökkenthető, így a második kódnak csak akkor van értelme, ha szóhosszvektora permutációtól eltekintve (1, 2, 3, 3). Ha egy négybetűs input-ábécé betűinek valószínűségeit monoton nem növő sorrendben $p_1, p_2, p_3, p_4$ jelöli, akkor a *Huffman*-kód szóhosszvektora aszerint (2, 2, 2, 2) vagy (1, 2, 3, 3), hogy $p_3+p_4\geqq p_1$ vagy $p_3+p_4<p_1$. Eszerint nyilván azt kell vizsgálnunk, hogy a közbeeső szöveg 2-es blokkjaira mikor áll fenn az utóbbi egyenlőtlenség. Ez függ az első kód realizációjából. Az alábbi táblázat mutatja a négy lényegesen különböző *Huffman*-kódot:

$K_0$ variánsainak táblázata

| Blokk | $K_0^1$ | $K_0^2$ | $K_0^3$ | $K_0^4$ |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 10 | 11 | 11 | 10 |
| 10 | 110 | 100 | 101 | 111 |
| 11 | 111 | 101 | 100 | 110 |

Ha a kódokban minden 0 helyébe 1-et írunk és megfordítva, az (1, 2, 3, 3) szóhosszúságú *Huffman*-kódok összes variánsát megkapjuk. Ez a művelet a második kódolásnál is elvégezhető, így nyilván elegendő a fenti négy kód vizsgálata.

Nyilván mind a négy kód ugyanazt az átlagos hosszat eredményezi. Ez az átlagos szóhossz, mint az könnyen látható,

$$p^2+5(1-p)p+3(1-p)^2 = 3-p-p^2.$$

Mivel a kódszó-hosszak legnagyobb közös osztója 1, így a közbeeső szöveg 2-es blokkjainak létezik a határeloszlása. Ezt az előzőkben leírt módon határozhatjuk meg; szimmetria miatt várható, hogy az (10) és (01) blokkok határvalószínűsége megegyezik mind a négy kód esetén.

Erről konkrét számolással meg is győződhetünk. A teljesség kedvéért megadjuk a négy kódnak megfelelő határvalószínűségeket, $\alpha = \dfrac{1}{3-p-p^2}$ szorzótól eltekintve.

| Blokk / Kód | (0, 0) | (0, 1) és (1, 0) | (1, 1) |
|---|---|---|---|
| $K_0^1$ | $2p^3-p^4$ | $2p-p^2-2p^3+p^4$ | $3-5p+p^2+2p^3-p^4$ |
| $K_0^2$ | $p-p^2+p^3$ | $1-p+p^2-p^3$ | $1-2p^2+p^3$ |
| $K_0^3$ | $1-2p+2p^2-2p^3+2p^4$ | $1-p+2p^3-p^4$ | $3p-2p^2+2p^3+2p^4$ |
| $K_0^4$ | $p^2-p^3+p^4$ | $(1-p)(1+p^3)$ | $(1-p)(1+2p-p^3)$ |

Közbeeső szöveg határvalószínűségeinek táblázata $\alpha = \dfrac{1}{3-p-p^2}$ szorzótól eltekintve.

Vizsgáljuk részletesebben a $K_0^1$ kódot. A valószínűségek nagyság szerinti összehasonlítása mutatja, hogy a közbeeső szövegre alkalmazott *Huffman*-kód szóhossza (2, 2, 2, 2) vagy csak a következő lehet:

(3, 3, 2, 1) ha $1/2<p<x_1$

(3, 2, 1, 3) ha $x_1<p<x_2=1/2\cdot\sqrt{2}$

(1, 2, 3, 3) ha $\sqrt{2}/2<p<1$,

ahol $x_1$ a $2x^3-2x^2-4x+3 = 0$ egyenlet egyetlen $(1/2, x_2)$ közé eső gyöke. Magát a kódolást csak akkor értelmes végrehajtani, ha ezáltal rövidíteni lehet az átlagos hosszat. Speciálisan az első intervallumban ez azt jelenti, hogy a

$$P(1, 1)>P(0, 0)+P(0, 1)$$

egyenlőtlenség teljesülését kívánjuk meg, azaz részletesen kiírva, az

$$(16) \qquad f_1(p) = 3-7p+2p^2+2p^3-p^4 > 0$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Mivel $f_1(p)$ folytonos és $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} > 0$, így a közbeeső szöveg átlagos hosszát csökkenteni lehet, ha ezt a kódolást alkalmazzuk az $1/2<p<x_3$ intervallumban, ahol $x_3$ az $f_1(x)=0$ egyenlet (egyetlen) $(1/2, 1)$-be eső gyöke. Kérdés azonban, hogy a két egymás utáni kódolás eredményeképpen csökken-e a közleményhez viszonyított átlagos szóhossz is? E kérdésre válaszolandó határozzuk meg az átlagos szóhosszat. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a közlemény és a közbeeső szöveg hossza is páros. Jelölje a közlemény hosszát $2n$. Ekkor a közbeeső szöveg átlagos hossza

$$n(3-p-p^2).$$

Egy közbeeső közlemény-blokk képhosszának várható értéke

$$P(1, 1)+2P(1, 0)+3[P(0, 0)+P(0, 1)] = 2-d\cdot f_1(p).$$

Precízen is bizonyítható, hogy az átlagos kódszöveg-hossz e két mennyiség szorzatának fele, tehát

$$(17) \qquad \frac{1}{2}n(3-p-p^2)\left[2-\frac{f_1(p)}{3-p-p^2}\right].$$

Végeredményben akkor hatásos a kódolás, ha ez kisebb az eredeti hossznál, tehát ha

$$n\left[3-p-p^2-\frac{1}{2}(3-7p+2p^2+2p^3-p^4)\right] < 2n.$$

Ez az egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$(18) \qquad f_2(p) = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}p-2p^2-p^3+\frac{1}{2}p^4 < 0.$$

Mivel $f_2(1/2) = \frac{5}{32}$ és $f(1) = -1/2$, így $f_2(p)$-nek van (éspedig egyetlen) gyöke az $(1/2, 1)$ intervallumban. Jelöljük ezt $x_4$-gyel. Akkor a $K_0^1$ által definiált iteratív kódolás feltétlenül csökkenti az átlagos közleményhosszat az egész $x_4<p<1$ intervallumban. Láttuk, hogy 2-es blokkokra vonatkozó *Huffman*-kóddal nem lehet csökkenteni a hosszúságot az $1/2<p\leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ intervallumban. Mivel $f_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = -1+\sqrt{5}/2$, így ebben az intervallumban az iterált kóddal sem lehet csökkenteni a közleményhosszat. Másrészt $f_1\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0$, ezért $x_3 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Ez azt jelenti, hogy sehol sem érdemes $K_1$-nek $(3, 3, 2, 1)$ szóhosszúságú kódot választani, ha az első kód $K_0^1$ volt.

Hasonlóan eljárva az $x_1 < p < x_2$ intervallumban csak akkor lehetne „nyereségre" szert tenni, ha

$$P(0, 1) > P(0, 0) + P(1, 1)$$

lenne. E feltételt részletesen kiírva adódik az

$$f_3(p) = -3 + 7p - 2p^2 - 6p^3 + 3p^4 > 0$$

feltétel. A következő átalakítás mutatja, hogy ez $0 < p < 1$-ben sehol sem állhat fenn:

$$f_3(p) = 3(p^2-p)^2 - 5\left(p - \frac{7}{10}\right)^2 - \frac{55}{100}.$$

Mivel $0 < p(1-p) \leqq 1/4$, így nyilván $f_3(p) < 0$, ha $0 \leqq p \leqq 1$.

Nézzük végül az utolsó $x_2 < p < 1$ esetet. Most feltételünk a következő:

$$f_4(p) = -p^4 + 2p^3 + 3p - 3 > 0. \tag{19}$$

Mivel $f_4(\sqrt{2}/2) < 0$ és $f_4(1) > 0$, így $f_4(p) = 0$-nak van gyöke az $x_2 < p < 1$ intervallumban. Könnyű látni, hogy $f_4(p)$-nek az egész $(0, 1)$ intervallumban egy gyöke van csak. Jelöljük ezt $z_1$-gyel. Akkor a $z_1 < p < 1$ intervallumban érdemes alkalmazni a fenti iterációs eljárást, abban az értelemben, hogy általa a közbeeső közlemény optimális hossza tovább csökkenthető. (Megjegyezzük, hogy $z_1 < 0{,}8$.)

A csökkentés átlagos arányát a (17)-tel azonos módon adódó következő kifejezés adja:

$$h_1 = \frac{1}{2}\left[3 - p - p^2 - \frac{1}{2} f_4(p)\right].$$

Áttérve a $q = 1 - p$ változóra, nyerjük a

$$h_1 = \frac{1}{4}[1 + 11q - 2q^2 - 2q^3 + q^4] \tag{20}$$

kifejezést.

Teljesen hasonló számolás mutatja, hogy a $K_0 = K_0^2$ kóddal kezdve a második iterációval csak akkor csökkenthető a közbeeső szöveg hossza, ha $z_2 < p < 1$, ahol $z_2$ a

$$2z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$$

egyenlet egyetlen $[1/2, 1]$-be eső gyöke. Ekkor $K_1$ szóhossz-vektora $(1, 2, 3, 3)$. Az iterált kódolás hatásfoka

$$h_2 = \frac{1}{4}[1 + 11q - 5q^2 + q^3]. \tag{21}$$

Hasonlóképpen a $K_0 = K_0^3$ kód esetén csak akkor csökkenthető a közleményhossz $K_1$ segítségével, ha $z_3 < p < 1$, ahol $z_3$ a

$$4z^3 - 4z^2 + 2z - 1 = 0$$

egyenlet egyetlen $(1/2, 1)$-beli gyöke. $K_1$ szóhossz-vektora ismét $(1, 2, 3, 3)$. Az iterált kódolás hatásfoka

$$h_3 = \frac{1}{4}[1 + 14q - 13q^2 + 6q^3 - 2q^4]. \tag{22}$$

Abban az esetben, ha a $K_0=K_0^4$ kódolást alkalmazzuk, a második kódolás (3, 3, 2, 1) szóhossz-vektor mellett az $1/2<p<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ intervallumban, az (1, 3, 3, 2) szóhossz-vektor mellett a $z_4<p<1$ intervallumban csökkenti a közbeeső szöveg hosszát, ahol $z_4$ a

$$3z^4-3z^3+z^2+2z-2=0$$

egyenlet (egyetlen) (1/2, 1)-beli gyöke. Az első esetben a kódszöveg és a közlemény hosszának átlagos aránya:

$$h^*=1+1/4(1-p-p^2)[(p-1)^2+1]>1 \quad \text{ha} \quad 1/2<p<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

és így az iterált kódolás nem csökkenti a közlemény hosszát. A másik esetben azonban már ismét lényeges csökkentés érhető el. Ekkor a fenti arány:

$$h_4=\frac{1}{4}[1+13q-12q^2+9q^3-3q^4]. \tag{23}$$

Könnyű látni, hogy

$$h_2<h_1<h_4<h_3, \quad \text{hacsak} \quad 0<q<\max_{(i)}(1-z_i).$$

Ez azt mutatja, hogy az azonos hosszúságú *Huffman*-kódok különböző variánsai különböző hatásfokúak. Esetünkben létezett egy univerzálisan legjobb variáns, abban az értelemben, hogy mindenütt jobb, mint a többi, ahol csak van értelme iterált kódolást használni.

Az iterált kódolás hasznosságát mutatja az a tény, hogy 3-as blokkok optimális kódolása mellett elérhető arány $p\to 1$ esetén 1/3-hoz tart, míg most ez megegyezik a 4-es blokkok optimális kódolása esetén elérhető arány határértékével. Könnyen látható, hogy 4-es blokkok *Huffman*-kódjában 1-hez elég közeli $p$ esetén az öt legrövidebb szóhossz: 1, 3, 3, 3, 4, s az összes többi szó valószínűsége $q^2$-tel arányos. Így első közelítésben az elérhető legjobb arány

$$h^{**}\approx\frac{1}{4}[1+13q]$$

nagyságrendű. Tehát elég nagy $p$ esetén az iterált kódolás első két verziója határozottan jobb hatásfokú, mint a 4-es blokkok kódolásán alapuló legjobb kódolás. Végezetül álljon itt néhány számadat az összehasonlítás kedvéért: $h_2(0{,}2)=0{,}752$, $h_2(0{,}1)=0{,}512$ és $h_2(0{,}05)=0{,}387$, míg a $q=0{,}2$, $q=0{,}1$ és $q=0{,}05$-nek 4-es blokkok mellett megfelelő *Huffman*-kód átlagos relatív csökkenése rendre: 0,741; 0,493 és 0,366.

## IRODALOMJEGYZÉK

[1] CSISZÁR, I,: О каналах без шума, *Проблемы передачи информации*, **VI**, (1970) 3—15,
[2] ELIAS, P.: *Information theory.* A „Handbook of Automation, Computation and Controll", I. kötet, Wiley, New-York, 1958.
[3] GELFAND, A. O.: *Differenciaszámítás,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.

[4] Jelinek, F.: Buffer overflow in variable length coding of fixed rate sources, *IEEE, Trans.* **15—14** (1968) 490—501.
[5] Reza, F. M.: *Bevezetés az információelméletbe,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966. 4. fejezet.

(Beérkezett: 1971. IV. 15.)

# AN ITERATIVE MODEL IN NOISELESS CODING

by

T. Nemetz

It is well-known that the average length of the code-text for any decipherable code should not exceed the amount of $H(x)/\log N$, where $H(x)$ is the *Shannon*-entropy of the message and $N$ is the number of letters of the output-alphabet. It is also well known that forming blocks from the message and using variable length codes we may approach this value as close as wanted.

But the block-size needed for a given high efficiency involves the great complexity of the coding-decoding system, which grows exponentially with the block-size. So it is necessary to construct other methods being nearly so efficient but much less complicated. Such a method is (at least in certain regions of probability distributions) to use iteratively block codes with shorter block-length (in which case the complexity grows only linearly). The general model of the iterative coding is as follows:

Let $X$ resp. $Y$ be the input resp. output alphabet. Let us take some $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$ intermediate alphabets; — code the message into a $Z_1$-sequence by using a $C_0$ code, this sequence into a $Z_2$ one by a $C_1$ code, and so on, the $Z_s$-sequence into an $Y$-sequence called code-text by using a $C_s$ code. Because the code words are of variable length we must place buffers between the codes. The average length $L$ of the code text depends on the alphabets $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$ and the codes $C_0, \ldots, C_s$ and they must be chosen to minimize $L$.

In this paper we prove for $s=1$ that $C_1$ is a *Huffman* code provided the source-letters are independent.

To illustrate the problems arised here we discuss the following case:

The source is assumed to produce independent binary sequence of $\xi_i$'s, with $p=P(\xi_i=0)=1-P(\xi_i=1) = 1-q$, $i=1, 2, \ldots$ . Choosing $s=1, X=Z_1=Y=\{0,1\}$ and forming 2-letter blocks from the message and the $Z_1$-sequence, one can see that $C_0$ and $C_1$ are *Huffman* codes alike, and the second coding will shorten the $Z_1$-sequence if $p_0<p<1$ where $p_0$ is the (unique) root in the intervallum $1/2 \leq p \leq 1$ of the equation

$$2Z^3-2Z^2+2Z-1 = 0.$$

In addition the *Huffman* codes for $X \to Z_1$ are not equivalent; and the average length for these codes and for the *Huffman* codes of 4 letter-blocks are very near; — their difference in the intervallum $0,8<p<1$ does not exceed 0,05.

# A $t$-RENDSZEREK JELENTŐSÉGE A VÉGES GEOMETRIÁKBAN

Írta: COFMAN JUDIT*

## 1. Bevezetés

A véges geometriák vizsgálata manapság a matematika egyik önálló ágát képezi, s keletkezését több oknak köszönheti. A múlt század végén, HILBERT nagy fontosságú munkái alapján a geometriában egyre nagyobb gondot fordítanak a különböző axiómarendszerek tanulmányozására; egyes modellek nyomán, melyek eleinte csupán arra hivatottak, hogy ellenpéldákat nyújtsanak a klasszikus geometriai struktúrák szemléltetésénél, lassan kialakul a véges projektív terek elmélete.

Egy véges projektív tér egy véges ponthalmazból áll, melyben bizonyos részhalmazok ún. egyeneseket képeznek; ezért egy véges projektív tér szerkesztését visszavezethetjük azon kombinatórikai jellegű problémára, hogyan lehet egy véges halmazból bizonyos részhalmazokat — bizonyos szabályok alapján — kiválasztani. Így már EULER (1782), KIRKMAN (1847), STEINER (1853) kombinatórikai vizsgálatai rámutatnak bizonyos problémákra, melyek tulajdonképpen véges projektív síkokra vonatkoznak. Ezeket az elszigetelt kombinatórikai szárnypróbálgatásokat századunk harmincas éveiben dolgozták fel a statisztikában, a *blokkrendszerek*[1] elméletében.

A projektív terek a blokkrendszerek egy speciális fajtáját képezik. Az alkalmazott matematika erős fellendülése az utóbbi években felélénkíti az érdeklődést a blokkrendszerek alkalmazásával kapcsolatban. Ez ismét felkelti az elméleti matematikusok figyelmét, akik új szemszögből kezdik vizsgálgatni a blokkrendszereket. Általánosításképpen bevezetik a *t-rendszer* fogalmát. Dolgozatunkban a $t$-rendszerek jelentőségére akarunk rámutatni egypár velük kapcsolatos aktuális probléma kapcsán.

## 2. $t$-rendszerek és automorfizmusok

A $t$-rendszer fogalmát az illeszkedési rendszer fogalmának segítségével fogjuk bevezetni.

1. DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathcal{P}$ egy halmaz, melynek elemeit *pontoknak* nevezzük és legyen $\mathcal{B}$ egy halmaz, melynek elemei *blokkok*. A $\mathcal{P}$ és $\mathcal{B}$ halmazokból álló rendszert *illeszkedési rendszernek* nevezzük, ha a pontok és a blokkok között egy $\mathcal{I}$ illeszkedési reláció áll fenn, ahol $\mathcal{I}$ a $\mathcal{P}\times\mathcal{B}$ direkt szorzat tetszőleges részhalmaza.

2. DEFINÍCIÓ. Egy $\mathfrak{J}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ illeszkedési rendszerben egy $X$ pont pontosan akkor *illeszkedik* egy $y$ blokkra, ha $(X, y)\in\mathcal{I}$. Illeszkedés helyett a következő kifeje-

* Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen 1970. december hó 18-án és 20-án elhangzott magyar nyelvű előadás.

[1] A blokkrendszerek az angol irodalomban a balanced incomplete block designs néven ismertek.

zéseket is használjuk: $X$ pont az $y$ blokkon van; vagy pedig: az $y$ blokk tartalmazza az $X$ pontot.

3. DEFINÍCIÓ. $\mathcal{D}$ illeszkedési rendszert $t-(v, k, \lambda)$ *rendszernek* nevezünk, ha $\mathcal{D}$ a következő feltételeket teljesíti:

a) $\mathcal{D}$-nek $v$ pontja van;
b) $\mathcal{D}$ minden blokkjára pontosan $k$ pont illeszkedik;
c) $\mathcal{D}$ minden $t$ különböző pontjára pontosan $\lambda$ blokk illeszkedik.
$t, v, k, \lambda$ egész számok, a $t$-rendszer *paraméterei.*

A $t$-rendszer definíciója alapján a blokkok nincsenek azonosítva a rendszer bizonyos ponthalmazaival, azonban mi csak olyan rendszerekről fogunk beszélni, ahol a pontok bizonyos részhalmazai képezik a blokkokat. Így ha $b$ a rendszer blokkjainak száma, akkor $b \leqq \binom{v}{k}$.

4. DEFINÍCIÓ. Egy $t-(v, k, \lambda)$ rendszert *triviálisnak* nevezünk, ha blokkjainak száma $b=\binom{v}{k}$. Ellenkező esetben a rendszer *nem-triviális.* Könnyen bizonyítható a következő állítás:

1. TÉTEL. *Triviális* $t-(v, k, \lambda)$ *rendszer létezik minden olyan véges* $t, v, k, \lambda$ *esetében, ahol* $v \geqq k \geqq t$.

*Bizonyítás:* Tekintsük egy $v$ elemből álló $H$ halmazon az $S_v$ szimmetrikus permutációcsoportot. Szerkesszük meg a következő $\mathfrak{J}=(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ illeszkedési rendszert: $\mathcal{P}$ pontjai a $H$ halmaz elemei, $\mathcal{B}$ blokkjai a $H$ valamely $k$ elemből álló $h$ részhalmaza, valamint $h$-nak összes képei az $S_v$ permutációcsoport hatása alatt; $\mathfrak{J}$ bármely $X$ pontja pontosan akkor illeszkedik $\mathfrak{J}$ bármely $y$ blokkjára, ha $X$ eleme az $y$ által meghatározott ponthalmaznak. Tekintve, hogy $S_v$ $v$-tranzitív, tehát ugyanakkor $t$-tranzitív a pontok halmazán, $\mathfrak{J}$ egy $t-(v, k, \lambda)$ rendszer. Ugyancsak a $v$-tranzitivitás folytán a $H$ halmaz minden egyes $k$ elemből álló részhalmaza a $h$ halmaz valamely képe $S_v$ hatása alatt, vagyis $\mathfrak{J}$ egy triviális $t-(v, k, \lambda)$ rendszer.

Érdekes megjegyezni, hogy nem triviális $t-(v, k, \lambda)$ rendszerek létezése eddig csupán $t \leqq 5$ esetben ismeretes. A nemtriviális $t$-rendszerek létezésének problémáját összefüggésbe lehet hozni a nem triviális — azaz a szimmetrikus és alternatív csoportoktól különböző — $t$-tranzitív permutációcsoport létezésének problémájával. Legyen ugyanis $G$ egy $t$-tranzitív permutációcsoport egy $H$ halmaz elemein; nevezzük a halmaz elemeit pontoknak, a $H$ halmaz valamely $k \geqq t$ elemből álló részhalmazát s annak képeit blokkoknak, s definiáljuk az incidenciát mint halmazelméleti tartalmazást. A $G$ csoport $t$-tranzitivitása folytán az így nyert illeszkedési rendszer egy $t-(v, k, \lambda)$ rendszer, s ha blokkjainak száma kevesebb mint $\binom{v}{k}$, akkor a rendszer nem triviális. $t=2, 3$ esetben végtelen sok nem triviális $t$-tranzitív permutációcsoportot ismerünk, s ezek segítségével végtelen sok 2- és 3-rendszert szerkeszthetünk. A 2-rendszer legismertebb fajai a véges projektív terek, míg a legismertebb 3-as rendszerek a MÖBIUS-síkok. (Ld. DEMBOWSKI [8] ... resp. fejezet.) Ezzel szemben csupán véges számú nem triviális 4- és 5- tranzitív csoport ismeretes, mint pl. a 11, illetve 12 elemen ható MATHIEU csoportok: $M_{11}$, illetve $M_{12}$. (Ld. HALL [12] 5. §.) Ezekből kiindulva szerkeszthetünk 4- és 5-ös rendszereket.

Végül megemlítjük, hogy máig is megoldatlan az a probléma, hogy létezik-e nem triviális tranzitív permutáció-csoport, ahol $t \geqq 6$. Ha erre a kérdésre igenlő választ kapnánk, valószínűleg szerkeszthetnénk nem triviális $t$-rendszereket $t$-nek 5-nél nagyobb értékeire.

A $t$-rendszerek tanulmányozásában nagy szerepük van az automorfizmusoknak:

5. DEFINÍCIÓ. Egy $t-(v, k, \lambda)$ rendszer $\alpha$ *automorfizmusán* a rendszer ponthalmazának és blokkhalmazának olyan önmagára való egy-egy értelmű leképezését értjük, melynek az a tulajdonsága, hogy a rendszer $P$ pontja csakis akkor illeszkedik a rendszer valamely $c$ blokkjára, ha a pont képe, $P'$ a blokk képére, $c'$-re illeszkedik.

Világos, hogy egy $t$-rendszer összes automorfizmusai a leképezések szorzatát tekintve csoportot alkotnak.

6. DEFINÍCIÓ. Egy $t$-rendszer összes automorfizmusainak csoportját a rendszer *teljes automorfizmuscsoportjának* nevezzük; a rendszer *automorfizmuscsoportjain* a teljes automorfizmuscsoport részcsoportjait értjük.

Egy adott $t$-rendszer esetében felvetődik a kérdés: mi az adott $t$-rendszer teljes automorfizmuscsoportja, mik a csoport részcsoportjai? És fordítva, ha adott egy véges csoport, felvetődik a probléma: mi a csoport geometriai interpretációja? Vagyis milyen $t$-rendszer automorfizmus csoportja izomorf az adott csoporthoz? Az utóbbi probléma nemcsak a geometria szempontjából fontos: a csoportelméleti kutató is hasznot húz belőle, mert a plasztikus geometriai szemlélet alapján az illető csoport számos tulajdonsága válik szembetűnővé.

Az utóbbi években egyre több új véges csoport létezését tárták fel, a véges csoportelmélet erősen fejlődött, s ennek kapcsán a véges geometria és véges csoportelmélet kölcsönhatása is egyre érezhetőbbé válik. Ehhez a problémakörhöz szeretnénk hozzászólni a következő fejezetben a MÖBIUS-síkokkal kapcsolatban.

## 3. Véges MÖBIUS-síkok egyszerű automorfizmuscsoportjai

A véges MÖBIUS-síkokat a következőképpen definiálhatjuk:

7. DEFINÍCIÓ. Egy *n-ed rendű* MÖBIUS-*sík* egy $3-(n^2+1, n+1, 1)$ rendszer, ahol $n$ természetes szám.

A véges MÖBIUS-síkok létezését az ovoidok segítségével lehet bizonyítani:

8. DEFINÍCIÓ. Legyen $\sum$ egy háromdimenziós $n$-ed rendű projektív tér. $\sum$ egy $n^2+1$ pontból álló $\theta$ részhalmazát *ovoidnak* nevezzük, ha a következő feltételeket teljesíti:

a) $\sum$ bármely egyenesének $\theta$-val legfeljebb két közös pontja van.

b) ha $X$ az ovoid tetszőleges pontja, akkor a tér összes egyenesei, melyeknek $\theta$-val való egyedüli közös pontja $X$, síkot alkotnak (az ovoid *érintősíkja* $X$ pontban).

Tegyük fel, hogy $\theta$ a háromdimenziós $n$-ed rendű projektív tér egy ovoidja. Tekintsük a következő $\mathfrak{M}(\theta)$ illeszkedési rendszert: $\mathfrak{M}(\theta)$ pontjai az ovoid pontjai; $\mathfrak{M}(\theta)$ blokkjai azok a ponthalmazok, melyekben az ovoidot a tér azon síkjai metszik, melyeknek az ovoiddal több mint egy közös pontjuk van; az illeszkedés értelme: a halmazelméleti tartalmazás.

Bebizonyított tény, hogy egy háromdimenziós $n$-ed rendű térben léteznek ovoidok, s hogy a segítségükkel szerkesztett $\mathfrak{M}(\theta)$ illeszkedési rendszerek $n$-ed rendű MÖBIUS-síkok. (Ld. pl. DEMBOWSKI [8]).

A MÖBIUS-sík blokkjait *köröknek* nevezzük.

9. DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathfrak{M}_1$ és $\mathfrak{M}_2$ két MÖBIUS-sík. $\mathfrak{M}_1$ csakis akkor *izomorf* $\mathfrak{M}_2$-vel, ha létezik az $\mathfrak{M}_1$ pontjainak és köreinek olyan egy-egy értelmű $-\sigma$-leképezése az $\mathfrak{M}_2$ pontjaira, illetve köreire, hogy az $\mathfrak{M}_1$ tetszőleges $X$ pontja pontosan akkor illeszkedik $\mathfrak{M}_2$ valamely $k$ körére, ha $\mathfrak{M}_2$-ben az $X\sigma$ pont a $k\sigma$ körre illeszkedik. Ezek után kimondhatjuk a következő definíciót:

10. DEFINÍCIÓ. Egy MÖBIUS-síkot *ovoidális*nak nevezünk, ha izomorf egy ovoidból nyert MÖBIUS-síkkal.

Páros rendű MÖBIUS-sík esetén ma még nem tudjuk, léteznek-e nem ovoidális MÖBIUS-síkok. Fennáll az a sejtés, hogy minden véges rendű MÖBIUS-sík ovoidális, azonban a sejtés bizonyítása nehéznek ígérkezik.

A következőkben csupán ovoidális síkokat fogunk tekinteni. Természetesen az ovoidális síkok szerkezete az ovoidok struktúrájától függ. BARLOTTI [2] bebizonyította, hogy egy páratlan rendű háromdimenziós térben az ovoidoknak csupán egy faja létezik.[2] Ezzel szemben páros rendű háromdimenziós térben az ovoidoknak két fajtáját ismerjük[3] és nyitott a kérdés:

*(K) Hányfajta nem izomorf ovoid létezik egy páros rendű háromdimenziós térben?*

A *(K)* kérdéssel ekvivalens a következő probléma:

*(K') Hányfajta nem izomorf n-ed rendű ovoidális* MÖBIUS-*sík létezik páros n esetén?*

Az ovoidoknak megfelelően eddig kétfajta páros rendű MÖBIUS-síkot ismerünk; nevezzük az egyiket *MIQUEL-félének,* s a másikat *SUZUKI-félének*. Helyszűke miatt nem közöljük a síkok definícióját, sem alaptulajdonságait. Tájékoztatásul DEMBOWSKY [8] könyvére utalunk. A fenti síkokat a következő automorfizmuscsoportok jellemzik:

3. TÉTEL. (LÜNEBURG [13]) *Egy n-ed rendű* MÖBIUS-*sík csakis akkor MIQUEL-féle, ha rendelkezik olyan automorfizmuscsoporttal, mely izomorf a 2-dimenziós projektív speciális lineáris csoporttal, az $n^2$ rendű GALOIS-test felett, melyet PSL* $(2, n^2)$-*tel jelölünk.*

4. TÉTEL. (LÜNEBURG [13]): *Egy n-ed rendű* MŐBIUS-*sík csakis akkor SUZUKI-féle, ha van olyan automorfizmuscsoportja, mely izomorf az $Sz(n)$ SUZUKI-csoporttal.*

A *PSL* $(2, n^2)$ csoport a következőképpen definiálható (ld. pl.: ROTMAN [17]): Legyen $GF(n^2)$ az $n^2$ rendű test ($n$ egy törzsszám hatványa). Tekintsük az összes $2\times2$-es mátrixokat, melyeknek elemei a GALOIS-test elemei. Ezek között azok a mátrixok, melyeknek determinánsa 1, csoportot képeznek. Ennek a csoportnak a saját centrumára vonatkozó faktorcsoportja a *PSL* $(2, n^2)$ csoport.

Az itt $Sz(n)$-nel jelölt SUZUKI-csoportokat SUZUKI japán matematikus fedezte fel a hatvanas évek elején (SUZUKI [18]). Itt csak annyit említünk, hogy rendjük $(n^2+1)n^2(n-1)$, ahol $n=2^{2a+1}$, $a$ valamely természetes szám.

[2] Ezek az ovoidok kvádrikák. (Ld.: DEMBOWSKY [8])

[3] Kvádrikákat és az ún. *TITS*-féle ovoidokat (Ld.: DEMBOVSKY [8])

Továbbá mind az $Sz(n)$, mind a $PSL\ (2, n^2)$ csoport egyszerű, vagyis nincsen nem triviális normálosztójuk. Mindkét fajta csoport úgy hat a megfelelő MÖBIUS-síkok pontjain, mint egy 2-tranzitív permutációcsoport, melyben csupán az egységelem rögzíti a síknak kettőnél több pontját.

Tegyük fel, hogy létezik a páros rendű MÖBIUS-síkoknak egy harmadik faja. Ebben az esetben így okoskodhatunk: feltételezhető, hogy ennek a MÖBIUS-síknak is létezik egy egyszerű, nem kommutatív automorfizmuscsoportja, s ugyancsak valószínű, hogy ez a csoport különbözik $PSL\ (2, n^2)$ és $Sz(n)$ csoportoktól. Ilyen gondolatok vezetnek a következő problémához:

Legyen $\mathfrak{M}$ egy páros rendű MÖBIUS-sík és $\Delta$ ennek egy egyszerű nem kommutatív automorfizmuscsoportja. Milyen csoporthoz lehet $\Delta$ izomorf?

A feleletet a következő tétel tartalmazza:

5. TÉTEL (COFMAN [6]): *Ha $\mathfrak{M}$ egy páros rendű* MÖBIUS-*sík és $\Delta$ ennek egy egyszerű, nem kommutatív automorfizmuscsoportja, akkor a $\Delta$ következő csoportok egyikével izomorf: PSL* $(2, q)$-val, vagy az $Sz(q)$ *Suzuki-csoporttal.*

A tétel bizonyítása a fent említett cikkben van részletesen kidolgozva. Itt csupán a bizonyítás gondolatmenetét vázoljuk:

Tekintve, hogy $\Delta$ egyszerű, $\Delta'$ kommutátorcsoportja nem lehet egy nem triviális csoport. Továbbá $\Delta' \neq 1$, mivel $\Delta$ nem kommutatív. Tehát $\Delta = \Delta'$, vagyis $\Delta$ nem feloldható, ez pedig a híres FEIT-THOMPSON [11] tétel alapján azt jelenti, hogy $\Delta$ rendje páros. Tehát $\Delta$ involúciókat tartalmaz. DEMBOWSKY [10] szerint egy páros rendű MÖBIUS-síkban kétféle involúció fordulhat elő: a) az ún. *transzláció*, mely a sík egyetlen pontját rögzíti, melyet a transzláció centrumának nevezünk, és b) az *inverzió*, melynek rögzített pontjai pontosan a sík egyik körének pontjai; ezt a kört az inverzió tengelyének nevezzük. Hosszadalmas fejtegetések során, melyek egy korábbi eredményen alapulnak (COFMAN [4]), be lehet bizonyítani, hogy az a tény, hogy $\Delta$ egy egyszerű csoport, kizárja az inverziók létezését $\Delta$-ban. $\Delta$ tehát egyenlő a transzlációi által alkotott csoporttal. Ez pedig LÜNEBURG [14] szerint azt jelenti, hogy $\Delta$-ban csupán az egységelem rögzíti a síknak legalább három különböző pontját. Könnyű belátni, hogy $\Delta$ 2-tranzitív a csoport transzlációcentrumainak halmazán, s csoportelméleti ismeretek alapján kitűnik, hogy csupán két lehetőség áll fenn $\Delta$-ra: $\Delta$ vagy izomorf a $PSL\ (2, q)$-val, ahol $q = 2^{2a}$, vagy pedig izomorf $Sz(q)$-val, ahol $q = 2^{2a+1}$, $a$ mindkét esetben valamely természetes szám.

Az 5. tétel állítása természetesen nem vonja maga után egy nem MIQUEL-féle és nem SUZUKI-féle ovoidális sík nem létezését, de talán mégis megerősíti azt a sejtést, hogy az ovoidális síkoknak nincs egy „harmadik faja”.

## 4. Kombinatorikai jellegű problémák

Az előző fejtegetések során arra lehetne következtetni, hogy a geometria manapság mindinkább más tudományágak segítségére szorul, s ezáltal lassan elveszti eredeti szépségét, mely a kutatási módszerek egyszerűségében rejlett. Az olvasók megnyugtatására mondhatjuk, hogy ez a kilátás nem fenyeget. A $t$-rendszerek elmélete még egy csomó olyan problémával rendelkezik, melynek megoldása csupán elemi tudást követel. Egy ilyen termszetű problémát szeretnék megemlíteni ebben a fejezetben. A probléma a legegyszerűbb és legismertebb $t$-rendszerekre vonatkozik a véges projektív síkokra.

11. DEFINÍCIÓ. *Az n-ed rendű projektív sík* egy $2-(n^2+n+1, n+1, 1)$-rendszer. A projektív sík blokkjait egyeneseknek nevezzük. A projektív síkok a projektív terek speciális fajtáját képezik.

12. DEFINÍCIÓ. Egy pontokból, egyenesekből és illeszkedési relációkból álló illeszkedési rendszer *projektív-tér,* ha a következő axiómák teljesülnek:

a) *bármely két (különböző) $A$, $B$ pontra pontosan egy $AB$ egyenes illeszkedik;*

b) *bármely egyenesre legalább három különböző pont illeszkedik;*

c) *legyen $A$, $B$, $C$, $D$ négy tetszésszerinti pont, ha $AB$ és $CD$ egyenesek egy közös pontra illeszkednek, akkor $AC$ és $BD$ egyenesek valamint $AD$ és $BC$ egyenesek is egy-egy pontra illeszkednek.*

Könnyű belátni, hogy egy projektív térben minden egyenes ugyanolyan (véges, illetve végtelen) számosságú pontra illeszkedik. Ez indokolja a következő definíciót:

13. DEFINÍCIÓ. Ha projektív térben egy tetszőleges egyenesre $n+1$ különböző pont illeszkedik, a projektív teret *n-ed rendűnek* nevezzük.

A renden kívül a dimenzió is nagy szerepet játszik a projektív tereknél. A dimenzió fogalmát rekurzív módon a következőképpen definiáljuk:

14. DEFINÍCIÓ. Legyen $\sum_k$ egy $k$-dimenziós projektív tér. Egy olyan projektív teret $-\sum_{k+1}$-et —, melynek pontjai a $\sum_k$ pontjait a $\sum_k$-n kívül levő ponttal összekötő egyenesekre illeszkednek, *$(k+1)$-dimenziós projektív térnek* nevezünk.

A pont: egy 0-dimenziós tér; az egyenes: egy 1 dimenziós tér; a projektív sík: egy két-dimenziós projektív tér.

A projektív terek elméletében fontos szerepe van a DESARGUES-féle konfigurációnak:

15. DEFINÍCIÓ. Legyen $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ egy projektív térnek két háromszöge[4]. A háromszögek perspektívek a *$P$ pontra nézve,* ha az $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ egyenesek egy közös pontban, a $P$ pontban találkoznak. Ha az $A_1B_1$ és $A_2B_2$ egyenesek, a $B_1C_1$ és $B_2C_2$ egyenesek, valamint az $A_1C_1$ és $A_2C_2$ egyenesek metszéspontjai egy közös egyenesen vannak, akkor a háromszögek perspektívek a *$g$ egyenesre nézve.*

A 15. definícióra alapozva a DESARGUES-*féle konfiguráció* így definiálható:

16. DEFINÍCIÓ. Egy $P$ pontra perspektív két háromszög akkor alkot DESARGUES-*féle konfigurációt,* ha egy $g$ egyenesre nézve is perspektívek.

*A* DESARGUES-*féle projektív tér* fogalma a DESARGUES-féle konfiguráció fogalmára épül:

17. DEFINÍCIÓ. A projektív tér akkor DESARGUES-féle, ha minden, pontra nézve perspektív háromszögpárja DESARGUES-féle konfigurációt alkot.

Ismeretes, hogy vannak olyan projektív síkok is, amelyeken van pontra perspektív háromszögpár, melynek háromszögei nem perspektívek egyenesre is. Az ilyen síkot *nem* DESARGUES-*féle projektív síknak* nevezzük.

6. TÉTEL. (l. pl.: PICKERT [15].) *Minden, háromnál nem kisebb dimenziójú projektív tér* DESARGUES-*féle.*

[4] Háromszögön három nem kollineáris pontot értünk.

Nem DESARGUES-féle tér tehát csak kétdimenziós lehet. Ilyen síkok vannak az ún. transzlációs síkok közt is, és ezek a nem DESARGUES-féle síkok egy osztályát alkotják.

18. DEFINÍCIÓ. Egy projektív sík a sík egy $g$ egyenesére nézve *transzlációs sík,* ha rendelkezik a következő tulajdonsággal: a $g$ egyenes bármely pontjára nézve perspektív minden olyan háromszögpár, melynek két megfelelő oldalpárja a $g$ egyenes egy-egy pontjában találkozó egyenesekből áll, DESARGUES-féle konfigurációt alkot.[5]

A további fejtegetések során szükségünk lesz a következő jól ismert tételre:

7. TÉTEL. (Ld. pl.: PICKERT [15]): *Ha egy véges projektív sík két különböző egyenesre vonatkozólag transzlációs sík, akkor a sík* DESARGUES-*féle.*

A projektív síkok elméletében a DESARGUES-féle konfiguráción kívül sokat foglalkoztak még a PAPPOS-PASCAL-féle konfigurációval[6], valamint az oválisok és $k$-ívek konfigurációival[7]. Ezzel szemben a *részsíkok* konfigurációira mindeddig nem sok figyelmet fordítottak.

19. DEFINÍCIÓ. Egy projektív síkban egy *konfiguráció* a pontoknak az egyeneseknek és az illeszkedési relációnak olyan $K$ részhalmaza, melyben egy $P$ pont csakis akkor illeszkedik egy $g$ egyenesre, ha $P$ a síkban $g$-re illeszkedik.

20. DEFINÍCIÓ. Egy projektív síknak olyan konfigurációját, mely önmaga is projektív sík, a sík *részsíkjának* nevezzük.

8. TÉTEL. *Egy $n$-ed rendű projektív síkban egy részsík rendje nem lehet nagyobb, mint $\sqrt{n}$.*

Egy véges projektív sík „maximális" rendű részsíkjainak külön elnevezést adhatunk:

21. DEFINÍCIÓ. Egy $n$-ed rendű projektív sík $\sqrt{n}$-rendű részsíkját BAER-*féle részsík*nak nevezzük.

DESARGUES-féle projektív sík esetén a részsíkokról a következőket mondhatjuk:

9. TÉTEL. *Ha $\pi$ egy véges* DESARGUES-*féle projektív sík, akkor $\pi$ rendje $n=p^a$, ahol $p$ törzsszám és $a$ természetes szám. $\pi$ pontosan akkor tartalmaz $\bar{n}$-rendű részsíkokat, ha $\bar{n}=p^b$, ahol $b$ az $a$ szám tetszőleges osztója.*

10. TÉTEL. *Ha $\bar{n}$ az $n$-ed rendű* DESARGUES-*féle projektív sík valamely részsíkjának a rendje, és ha $\mathfrak{B}$ a $\pi$ sík összes $\bar{n}$-ed rendű részsíkjainak halmaza, akkor:*

a) *$\pi$ bármely négyszögét*[8] *$\mathfrak{B}$-nek pontosan egy részsíkja tartalmazza, és*

b) *ha $\pi_1$ és $\pi_2$ a $\mathfrak{B}$ halmaz két olyan részsíkja, melynek a sík egy $l$ egyenesén legalább három közös pontja van, akkor a $\pi_1$ és $\pi_2$ síkoknak az $l$ egyenesen pontosan $\bar{n}+1$ közös pontja van.*

[5] A transzlációs sík, noha számos DESARGUES-féle speciális konfigurációt tartalmazhat, nem okvetlenül DESARGUES-féle sík.

[6] Ld. PICKERT [15]

[7] Különösen az olasz iskola — SEGRE—BARLOTTI és követői. Ld.: DEMBOWSKY [8]

[8] Egy projektív sík négyszöge a sík olyan 4 pontjából áll, melyek közül semelyik három sem kollineáris.

A 9. és 10. tételek bizonyítása megtalálható HALL [12] könyvében.

A 10. tétel szükséges feltételeket tartalmaz egy véges DESARGUES-féle sík részsíkjait illetően. Be lehet bizonyítani, hogy BAER-alsíkok esetén az *a)* és *b)* feltételek egyúttal elegendők is ahhoz, hogy a sík DESARGUES-féle legyen:

11. TÉTEL. (COFMAN [7]): *Legyen $\pi$ egy n-ed rendű projektív sík, ahol $n=m^2$, és legyen $\mathfrak{B}$ a $\pi$ sík összes* BAER*-féle részsíkjainak halmaza. Ha*

a) *$\pi$ bármely négyszögét $\mathfrak{B}$-nek pontosan egy részsíkja tartalmazza, és*

b) *ha $\pi_1$ és $\pi_2$ a $\mathfrak{B}$ halmaz két olyan részsíkja, melynek a sík egy l egyenesén egalább három közös pontja van, akkor $\pi_1$ és $\pi_2$ síkoknak az l egyenesen pontosan $\bar{n}+1$ közös pontja van, akkor $\pi$ egy* DESARGUES*-féle sík.*

A 11. tétel bizonyítása az *affin síkok* szemléletén alapszik. A következőkben vázoljuk a bizonyítás gondolatmenetét:

22. DEFINÍCIÓ. Legyen $\Sigma_{k+1}$ egy $(k+1)$-dimenziós projektív tér és legyen $\Sigma_k$ ennek egy $k$-dimenziós projektív tere. Azt az illeszkedési rendszert, melynek pontjai a $\Sigma_{k+1}$-nek $\Sigma_k$-n kívül eső pontjai, egyenesei pedig azok a ponthalmazok, melyeket a $\Sigma_{k+1}$ egyeneseiből a $\Sigma_k$-ra illeszkedő pontok eltávolítása után nyerünk, s melyben az illeszkedési reláció a halmazelméleti tartalmazás, $(k+1)$ *dimenziós affin térnek* nevezzük. Ha $\Sigma_{k+1}$ egy $n$-ed rendű projektív tér, akkor az affin teret is *n-ed rendű térnek* nevezzük.

Az affin tér fenti definíciója alapján következik, hogy minden legalább három dimenziós affin tér DESARGUES-féle.

Tételezzük fel, hogy $\pi$ egy $n=m^2$ rendű projektív sík, mely kielégíti a 11. tétel a) és b) feltételeit. Legyen $l$ a $\pi$ sík egy tetszőleges egyenese és legyen $\mathfrak{B}_l$ a $\pi$ sík BAER-féle részsíkjainak halmaza, melyek az $l$ egyenest tartalmazzák. Jelöljük $\pi_l$-lel az affin síkot, melyet $\pi$-ből az $l$ egyenes pontjainak eltávolítása után nyerünk. Az a) és b) feltételek alapján könnyű belátni, hogy a $\pi_l$ sík bármely két különböző $A$, $B$ pontja esetén a $\mathscr{B}_l$ halmaz összes síkjai, melyek $A$ és $B$ pontokat tartalmazzák, a $\pi_l$ síkban pontosan $m$ közös pontban metszik egymást. Ezek a pontok a sík $AB$ egyenesén vannak; az $m$ pontból álló, az $A$ és $B$ pontok által egyértelműen meghatározott halmazt $\overline{AB}$ *húrnak* nevezzük. Tisztán kombinatórikai fejtegetések alapján (l. [7]) bizonyítható, hogy az $\mathscr{I}_l$ illeszkedési rendszer, melynek pontjai $\pi_l$ pontjai, egyenesei $\pi_l$ húrjai és illeszkedési relációja a halmazelméleti tartalmazás, izomorf a 4-dimenziós $n$-ed rendű affin térhez. Tehát $\mathscr{I}_l$ egy DESARGUES-féle affin tér; a $\pi_l$ affin sík úgy van beleágyazva ebbe az affin térbe, hogy egyenesei a tér egyes síkjait képezik. A beágyazás következményeképpen bizonyítható, hogy $\pi_l$ egy transzlációs sík. Tekintve, hogy $l$ a síknak egy tetszőleges egyenese, a 6. tétel alapján következik, hogy $\pi$ egy DESARGUES-féle sík.

A BAER-féle alsíkok jelentősége nemcsak abban rejlik, hogy maximális rendűek; szoros összefüggésben állnak a sík másodrendű automorfizmusaival a következő tétel alapján:

12. TÉTEL. (BAER [1]): *Legyen $\alpha$ egy véges projektív sík másodrendű automorfizmusa (azaz $\alpha^2=1$). Ha $\alpha$ legalább egy négyszög pontjait rögzíti, akkor az $\alpha$ által rögzített pontok egy* BAER*-féle részsíkot képeznek. $\alpha$-t a sík* BAER*-involúciójának nevezzük.*

Egy DESARGUES-féle síknak pontosan akkor vannak BAER-involúciói, ha a sík rendje, $n$ egyenlő egy szám négyzetével. Helyesebben:

13. TÉTEL. (L. HALL [12]): *Ha $\pi$ egy $n=m^2$ rendű projektív-sík akkor $\pi$ bármely négyszögének pontjait pontosan egy* BAER-*involúció rögzíti.*

Érdekes megjegyezni, hogy a fordított állítás is érvényes:

14. TÉTEL. (COFMAN [5]); *Ha egy $n=m^2$ rendű projektív sík bármely négyszögének pontjait pontosan egy* BAER-*féle involúció rögzíti, akkor a sík* DESARGUES-féle.

A bizonyítás a véges projektív síkok involúcióinak (azaz a másodrendű automorfizmusoknak) ismeretén alapszik. BAER [1] szerint egy véges sík involúciója vagy egy BAER-involúció, vagy pedig egy perspektivitás, azaz a sík valamely egyenesének összes pontjait rögzíti. Legyen $\pi$ egy $n$-ed rendű projektív sík, amely teljesíti a 14. tétel feltételeit. Jelöljük $G$-vel a sík BAER-féle involúciói által alkotott automorfizmuscsoportját. Könnyű kiszámítani, hogy a BAER-féle involúciók száma páros. Tekintve, hogy egy véges csoport páratlan számú involúciót tartalmaz, $G$-nek vannak involúciói, melyek $\pi$-re vonatkozólag perspektivitások. Egy sereg közlemény foglalkozik a perspektivitások tárgyalásával a síkban. (ld.: WAGNER [19] PIPER [16], COFMAN [3]). Be lehet bizonyítani, hogy $G$-nek nagyszámú perspektivitása van, s a fenti munkákat figyelembe véve következik, hogy $\pi$ egy DESARGUES-féle sík.

## IRODALOM


[1] BAER: Projectivities with fixed points on every line of the plane. *Bull. Amer. Math. Sec.* **52** (1946) 273—286.

[2] BARLOTTI, A.: Un estensione del teorema di SEGRE—KUSTAANHEIMO. *Boll. Un. Mat. Ital.* **10** (1955) 498—506.

[3] COFMAN, J.: Homologies of finite projective planes. *Arch. Math.* **16** (1965) 476—479.

[4] COFMAN, J.: Inversions in finite MÖBIUS-planes of even order. *Math. Z.* II **6** (1970) 1—7.

[5] COFMAN, J.: On BAER-involutions of finite projective planes. *Can. J. Math.* **22.** No. 4, (1970) 878—880.

[6] COFMAN, J.: Simple groups and MÖBIUS-planes of even order. Sajtó alatt a *Math. Z.*-ben.

[7] COFMAN, J.: BAER-involutions in finite projective-planes. Kéziratban.

[8] DEMBOWSKY, P.: *Finite geometries;* Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete. Band 44. Springer-Verlag. Berlin—Heidelberg—New York. 1968.

[9] DEMBOWSKY, P.: MÖBIUS-Ebenen gerader Ordnung. *Math. Ann.* **157** (1964) 179—205.

[10] DEMBOWSKY, P.: Automorfismen endlicher MÖBIUS-Ebenen. *Math. Z.* **87** (1965) 115—136.

[11] FEIUT, W.—THOMPSON, J. G.: A solvability criterion for finite groups and some consequences. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **48** (1962) 968—970.

[12] HALL, M.: *The theory of groups.* The Macmillan Company, New York, Third. Ed. 1962.

[13] LÜNEBURG, H.: Finite Möbius-planes admitting a Zassenhaus group as group of automorphism, I 11.

[11] *J. Math.* **8** (1964) 586—592.

[14] LÜNEBURG, H.: On MÖBIUS-planes of even order. *Math. Z.* **92** (1966) 187—193.

[15] PICKERT, G.: *Projektive Ebenen.* Berlin—Heidelberg—Göttingen, Springer-Verlag 1955.

[16] PIPER, F. C.: Collineation groups containing relations. *I. Math. Z.* **89** (1965) 181—191.

[17] ROTMAN J. J.: *The theory of groups.* Allyn, Bacon, Boston 2nd Ed. 1966.

[18] SUZUKI, M.: A new type of simple groups of finite order, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **46** (1960) 868—870.

[19] WAGNER, A.: On perspectivities of finite projective planes. *Math. Z.* **71** (1959) 113—123.

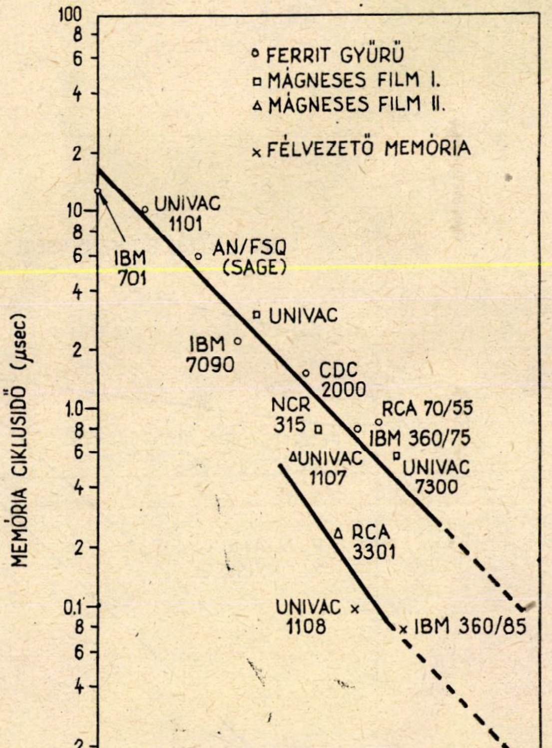

(Beérkezett: 1971. IV. 15.)

# ÚJ IRÁNYOK A SZÁMÍTÓGÉPEK TÁROLÓANYAGAINAK KUTATÁSÁBAN*

Írta: PÁL LÉNÁRD

## 1. Bevezetés

Aligha kell hangsúlyoznunk, hogy az utóbbi években a számítógépek teljesítőképessége egyre gyorsuló mértékben növekszik. Az integrált áramkörök használata megnövelte az aritmetika sebességét, és ez szükségessé tette a számítógépekben felhasznált különböző tárolók sebességének és kapacitásának növelését. További fejlődés csak



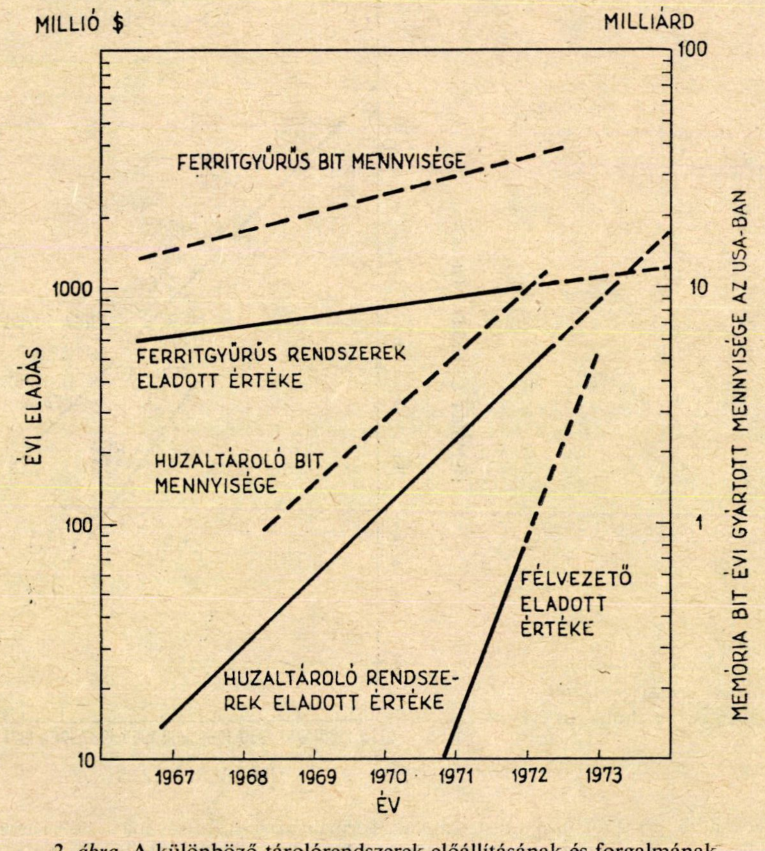

*1. ábra.* A tárolók ciklusidejének változása az elmúlt 10 évben

* A szocialista országok Számítástechnikai Kormányközi Bizottságának 1971. április 15-én tartott budapesti ülésén elhangzott előadás alapján. Az előadás összeállításához a KFKI munkacsoportjai által készített huzalmemória és buborékmemória tanulmányok felhasználást nyertek.

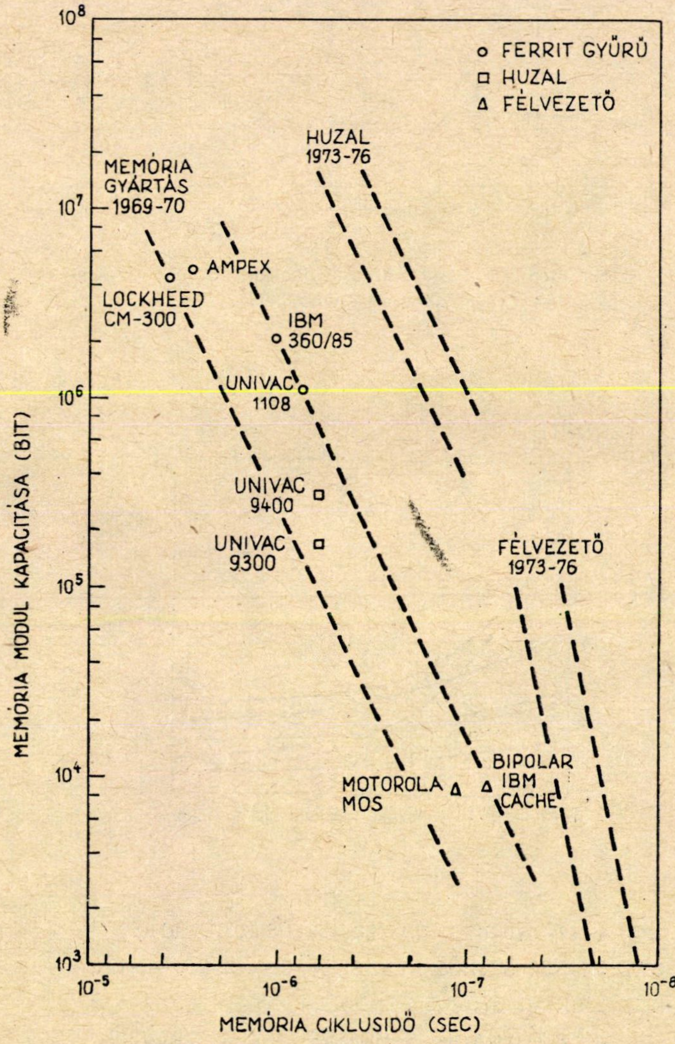
akkor képzelhető el, ha új elveken alapuló tárolókat sikerül létrehozni. Az új tárolók létrehozásához azonban új anyagokra van szükség.

A kereskedelmi forgalomban jelenleg kapható géptípusok tárolói csaknem kizárólag mágneses anyagokból készülnek. Ebből azonban helytelen volna arra gondolni, hogy a mágneses anyagok alkalmazása kizárólagos marad. Ismeretes, hogy a félvezető anyagok kitűnő lehetőséget kínálnak fel gyors működésű, kis zajszintű, nagy kapacitású tárolók készítésére. Megalapozottnak látszik az a következtetés, hogy 1975-ben a kereskedelemben kapható számítógépek már mintegy 15%-a félvezető tárolókat fog tartalmazni. A félvezető tárolók várható előretörését azonban nem szabad úgy értelmezni, hogy a mágneses anyagok jelentősége a számítógépekben csökkeni fog. Éppen a félvezető anyagok alkalmazásának potenciális lehetőségei arra késztetik a kutatókat, hogy újabb mágneses és esetleg nem mágneses anyagokat keressenek, amelyek legalább olyan mértékben megfelelnek majd a fokozott követelményeknek, mint a félvezető anyagok és ugyanakkor előállítási költségeik alacsony szintje kereskedelmi versenyképességüket továbbra is biztosítja.

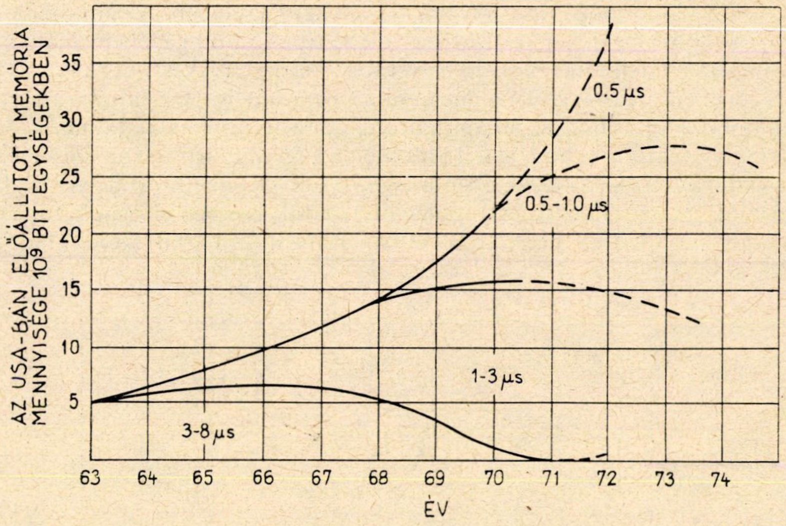
Az 1. ábrán szeretném bemutatni, hogyan változott az elmúlt 10 év folyamán a tá-



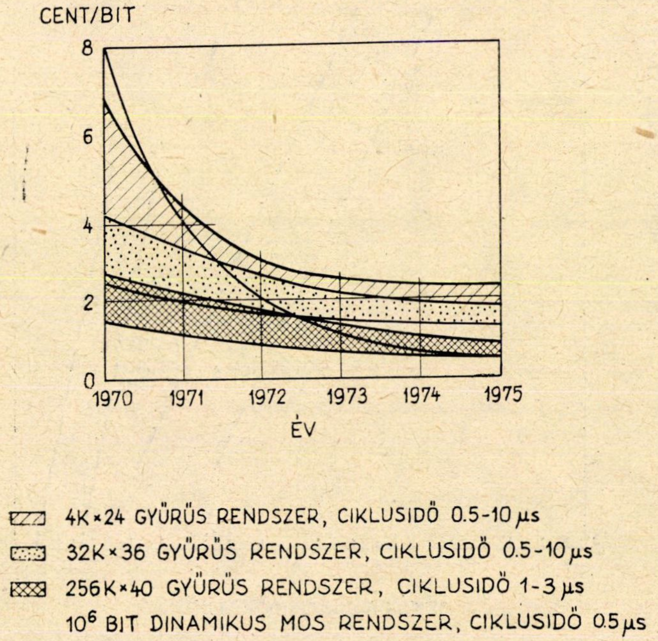

*2. ábra.* A különböző tárolórendszerek előállításának és forgalmának fejlődése rolók ciklusideje különböző típusú memória-anyagok esetében. Az ábrából láthatjuk, hogy a legkisebb ciklusidővel az IBM cég 360/85 típusszámú gépében alkalmazott félvezető memória rendelkezik. Előkelő helyet foglal el az UNIVAC cég 1108-as és 7300-as típusú gépében alkalmazott mágneses film-memória is. A 2. ábrán a tárolórendszerek különböző típusaira megállapítható fejlődési trendvonalak láthatók. Ebből az ábrából világosan kitűnik, hogy a fejlődés üteme a ferritgyűrűs tárolók esetében a legkisebb, és a félvezető tárolók esetében a legnagyobb. Kiemelkedő helyet foglalnak el a huzaltárolók, és ha a lineáris extrapolációt az adott esetben elfogadhatónak tekintjük, akkor azt mondhatjuk, hogy kb. 1973-ban a huzaltároló rendszerek eladott értéke




*3. ábra.* Összefüggés a különböző típusú tárolók kapacítása és ciklusideje között

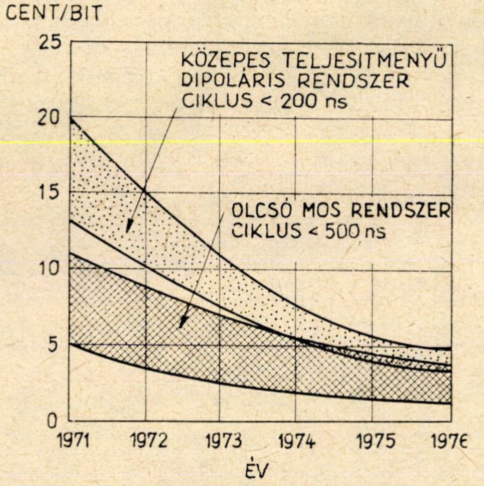



*4. ábra.* Az elmúlt 8 évben az USA-ban előállított tárolók összmennyiségének változása bitekben




*5. ábra.* Különböző típusú tárolók árprognózisának görbéi eléri a ferritgyűrűs rendszerek eladott értékét. Ugyanerre az időre esik a félvezető tárolók jelentős előretörése is, és ez azt jelenti, hogy kb. 1973-tól kezdve változások várhatók a számítógépek tárolórendszereiben. Érdemes a 3. ábrára is egy pillantást vetni, amely a ciklusidő és a kapacitás közti összefüggést mutatja. Nagy kapacitású és viszonylag alacsony ciklusidejű tárolók várhatók a huzalmemóriák területén 1973 és 1976 között. Ugyanebben az időben a félvezető tárolók előkelő helyet foglalnak majd el igen kicsiny ciklusidejükkel, de még nem konkurrálnak a huzaltárolókkal kapacitás dolgában. A 4. ábra azt mutatja, hogyan változott a különböző ciklusidejű tárolók összmennyisége milliárd bit egységekben mérve az elmúlt 8 év folyamán. Láthatjuk hogy a legintenzívebb fejlődést a mikroszekundum alatti ciklusidejű tárolók mutatják.

Úgy gondolom, hogy nem lesz felesleges az árviszonyok alakulását sem bemutatni. Az 5. ábrán annak az árprognózisnak a görbéi láthatók, amelyek 1970-től 1975-ig a különböző típusú ferritgyűrűs tárolók árának változását jelzik, és bemutatják egy mai szemmel nézve perspektivikusnak tűnő félvezető tároló várható árváltozását is. Az ilyen árprognózisokat óvatossággal kell kezelni, mégis azt mondhatjuk, hogy 1975 körül várható, hogy a félvezető tárolók már árban is versenyképesek lesznek a ferritgyűrűs tárolókkal szemben. Azt hiszem, nem felesleges összehasonlítani a bipoláris és MOS-rendszerű félvezetős tárolók árváltozási görbéit. A 6. ábra mutatja az árak



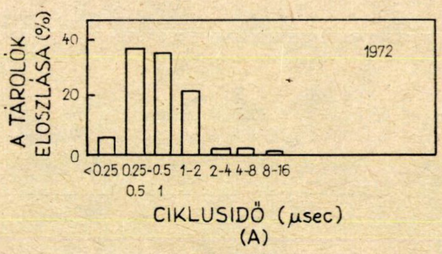

*6. ábra.* A félvezető tárolók árának várható alakulása 1976-ig

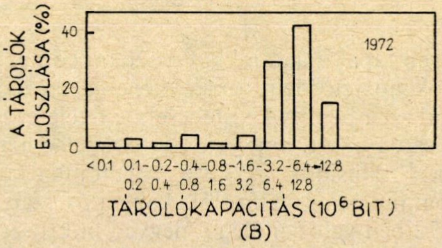
alakulását 1976-ig és egyéb tapasztalatainkkal összhangban ez az ábra azt jelzi, hogy a MOS-rendszerű tárolók hosszú ideig versenyképesek maradnak a bipoláris rendszerű félvezető tárolókkal szemben. A kép teljesebbé tétele érdekében a 7. ábrán szeretnénk bemutatni két hisztogramot, amelyek közül az első azt mutatja, hogyan oszlanak majd meg 1972-ben ciklusidők szerint a forgalomba kerülő számítógépek tárolói. A második hisztogram pedig a tárolók kapacitás szerinti eloszlását szemlélteti. Láthatjuk, hogy 1972-ben valószínűleg a negyed mikroszekundumos ciklusidejű tárolókból lesz a legtöbb, és azt is, hogy kb. 6 megabit kapacitású tárolók kerülnek túlsúlyba.

Az eddigiekből talán olyan vélemény alakulhat ki, hogy a számítógépek nagymértékű sebességnövelését kizárólag a tárolók működési sebességének fokozásával lehet megvalósítani. Ez a következtetés azonban elhamarkodott volna. Az integrált áramkörök technológiájában bekövetkezett fejlődés hatására ugyanis már ma lehetőség van arra, hogy a gép központi processzorában jelentősen megnöveljék a logikai funkciók számát — amit eddig a logikai elemek magas költsége megakadályozott — és így a számítógép sebességnövelését a rendszer organizációjának megváltoztatásával érjék el. Nyilvánvaló, hogy az időegységre eső műveletvégzési sebesség nagymértékben fokozható párhuzamos műveletvégzéssel. Ilyen gépi felépítés mellett a tárolók működéssebességével szemben támasztott követelmények mérsékelhetők. Jelentősen növelhető a műveletvégzési sebesség az ún. asszociatív tárolók alkalmazásával. Az asszociatív tárolókból a szavak nem címük, hanem tartalmuk szerint választhatók ki. Ez a módszer igen jelentős sebességnövekedést eredményez. Természetesen a számítógépek sebességnövelésének előzőkben vázolt lehetőségei szoros kölcsönhatásban vannak egymással. A számítógépek organizációjának korszerűsítése nemcsak, hogy nem teszi feleslegessé a tárolók fejlesztését, hanem egyenesen megköveteli azt.

Ennek a rövid áttekintésnek a keretében elsősorban a tárolók fejlesztését alapvetően meghatározó anyagkutatás trendjeivel szeretnék foglalkozni. Az áttekintésből elhagyom a ferritgyűrűs tárolókat, mivel eléggé megalapozottnak látszik az a következtetés, hogy a ferritgyűrűs tárolók elérték vagy rövidesen elérik teljesítőképességük felső határát. Inkább azokról a tárolókról szeretnék beszélni, amelyeknek a szerepe várhatóan a jövőben jelentős lesz és amelyek új anyagok alkalmazását teszik szükségessé. Lényegében három fő típusról szeretnék említést tenni. Ezek a következők:

a) a mágneses,
b) az optikai
c) és a félvezető tárolók.




*7. ábra.* A tárolók ciklusidő (A) és kapacitás (B) szerinti megoszlása

A mágneses és optikai tárolók között szoros kapcsolat van. Mégis indokolt azonban működésmódjuk különbözősége miatt e kétféle tárolótípust egymástól elkülönítve tárgyalni. A félvezető tárolók kategóriájában nem érinteném azokat a tárolótípusokat, amelyek a bipoláris és MOS-áramkörök felhasználására támaszkodnak, mert ezek mind az irodalomból, mind a gyakorlatból jól ismertek. Új lehetőségként kínálkozik az amorf félvezető anyagok alkalmazása, és ezért előadásomban erről szeretnék beszélni.

Évekkel ezelőtt tudományos konferenciákon és egyebütt sokat beszéltek a szupravezető tárolókról. Valószínű, hogy a szupravezető tárolók nem is a nagyon távoli jövőben jelentőségre tesznek szert, mivel sok olyan előnnyel rendelkeznek, amelyekről nem célszerű lemondani. Ma az a helyzet, hogy a polgári alkalmazások területén a szupravezető tárolók felhasználásáról egyre kevesebbet beszélnek.

## 2. Mágneses síkfilm tárolók

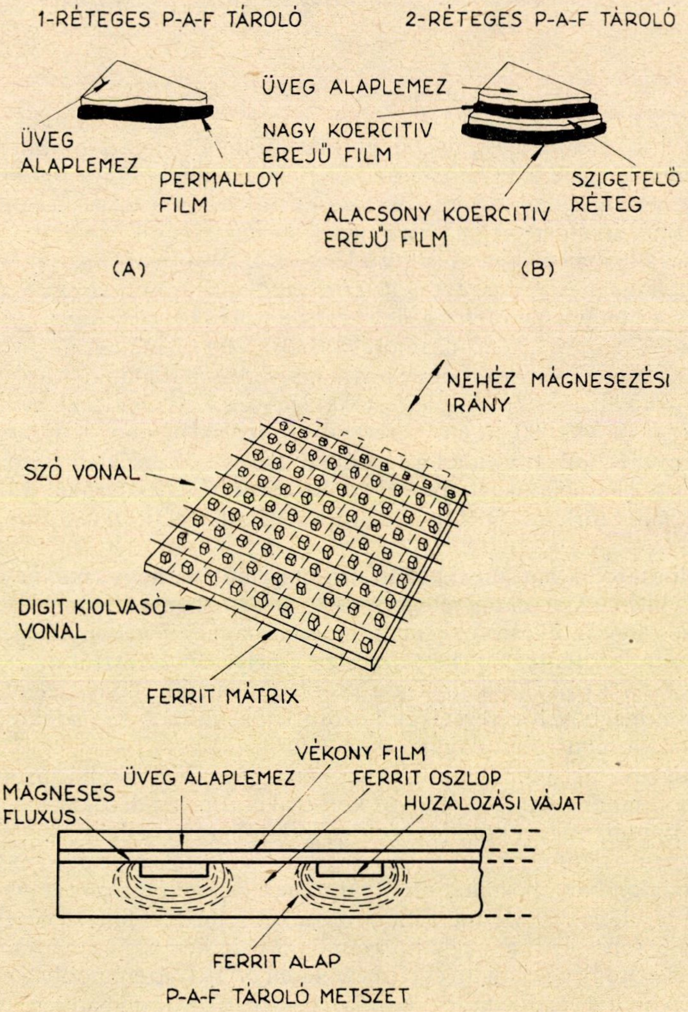
A leggyorsabb működésű mágneses adattárolókat mágneses síkfilmekből készítették. Egy alaplemezre négyzethálósan kb. 10 000, mintegy 300×600 mikron méretű 1000 Å vastagságú, egymástól elválasztott vas-nikkel ötvözet réteget párologtatnak fel. A felvitelnél alkalmazott külső mágneses tér segítségével érik el, hogy a mágnesezettség a film síkjában erősen anizotróp legyen. A külső mágneses tér iránya jelöli ki az ún. könnyű mágnesezési irányt és az erre merőleges irány lesz az ún. nehéz mágnesezési irány. A film mágnesezettségének két egyensúlyi helyzete van: az egyik a könnyű mágnesezési tengellyel párhuzamos, a másik a vele ellentétes irány. A vékony mágneses felület azt eredményezi, hogy az átmágnesezés által indukált feszültség is kicsi. Így érzékeny és költséges kiolvasó erősítőket igényel. A síkfilm-tárak pakolási sűrűsége nagy, mintegy 30—40 000 bit/cm$^2$, ezért olyan helyeken, ahol a térfogat és a súly nagysága lényeges, valamint ahol a tárolónak széles hőmérsékleti tartományban kell működnie, ott használatuk előnyös és ezért további fejlesztésük kívánatos. A síkfilm-tárolók mind törléses (DRO), mind törlés nélküli (NDRO) üzemmódban működhetnek.

A síkfilm-tárolók hátrányai között kell megemlíteni, hogy a mágneses erővonalak nem zártak, kilépnek a vékonyrétegből és ez kellemetlen kölcsönhatásokat eredményezhet. Ezen úgy igyekeznek segíteni, hogy a mágneses vékonyrétegek közé nagy permeabilitású ferritlapkákat helyeznek el, amelyeken keresztül az erővonalak záródhatnak. A ferritlapkák alkalmazása azonban nemcsak előnyt jelent, hanem hátrányt is, mivel megnöveli a vezetékek közötti kapacitásokat (a ferritanyagok dielektromos állandója rendszerint nagy).

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy bár a mágneses síkfilm tárolók működési sebessége és kompaktsága igen előnyös konstrukciós megoldásokat kínál, mégsem lehet azzal számolni, hogy a közeljövőben széleskörűen elterjednek.

A mágneses síkfilm-tárolók és a ferritgyűrűs tárolók hibridjeként készítették el az angol irodalomban „post and film" tárolónak nevezett eszközt. A 8. ábrán láthatjuk ennek a tárolónak a vázlatát. Ez a tároló a két rendszer előnyeit egyesíti magában; kis zajú; nagy sebességű; a meghajtó áramokra nem kényes; üzemi hőmérsékleti tartománya széles; tömeggyártható és természetesen NDRO üzemmódban működtethető. Ennél a tárolónál a ferritlemezen egymásra merőleges irányban végzett bemarások miatt ferritoszlopok alakulnak ki, amelyek alkalmasak arra, hogy zárják a síkfilmből kilépő erővonalakat. A bemarásokban futnak a szó- és a bitvezetékek, mégpedig olyan módon, hogy a vékony mágneses réteg könnyű mágnesezési irányával párhuzamosan a szóvezetékek és erre merőlegesen a bitvezetékek haladnak. Az egyfilmes hibridtároló lényegében ugyanúgy működik, mint a közönséges síkfilm-tároló.

Igen érdekes továbbfejlesztésnek tekinthető egy második keménymágneses anyagból készült síkfilm alkalmazása. Ennek a keménymágneses anyagból készült síkfilmnek a koercitív ereje jóval nagyobb, mint az alatta elhelyezkedő anizotróp permalloy filmé. Így azután a kiolvasás alatt a viszonylag kis intenzitású szóáram a lágymágneses film mágnesezési vektorát a könnyű mágnesezési irányból elfordítja a nehéz mágnesezési irányba, de ugyanakkor a kemény mágneses film mágnesezési vektorának

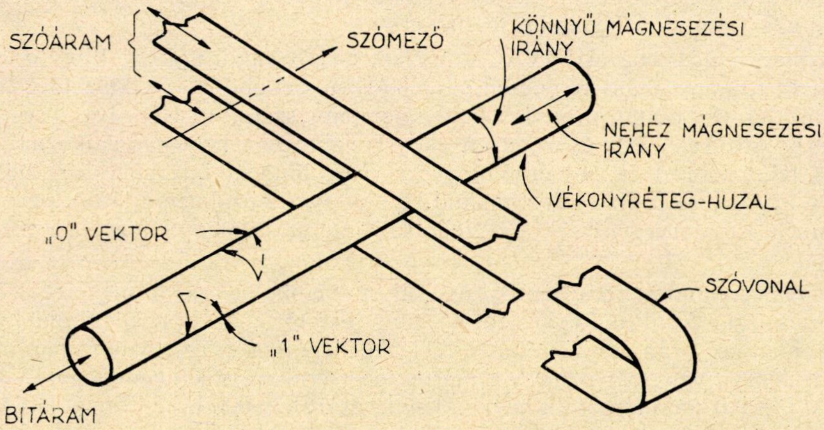



*8. ábra.* Hibrid tároló

helyzetét nem befolyásolja. Ezért a szóáram megszűnése után a keménymágneses film mágnesezése minden külső digit áram nélkül is visszafordítja a lágymágneses film mágnesezettségi vektorát eredeti irányába. Sajnos, beíráskor igen nagy beíró áramot kell alkalmazni, mivel a keménymágneses film mágnesezettségét is a kívánt irányba kell fordítani. A kétfilmes tároló esetében a mágneses filmeket egy szigetelő réteg választja el. Az ábrán világosan látható, hogyan alakulnak ki a fluxusvonalak zárására szolgáló ferritoszlopok.

## 3. Mágneses huzaltárolók

A mágneses síkfilm tárolók hátrányos tulajdonságai közül jónéhány kiküszöbölhető, hogyha a vékonyréteget hengerpalást alakúra képezik ki. Ha valamilyen vékony, elektromosan vezető huzalt megfelelő mágneses réteggel vonnak be, kedvező tulajdonságú tárolóelem állítható elő. A vezető huzal elektromos és mechanikai tulajdonságaival szemben különleges követelményeket kell támasztani, mert a huzal felületére leváló mágneses vékonyréteg mágneses paraméterei alapvetően függnek a huzalfelület minőségétől. A hengeres film előnye a síkfilmmel szemben, hogy a mágneses erővonalak záródni tudnak magában a filmben, továbbá az, hogy a vékonyréteg és a hordozóhuzal közötti szoros illeszkedés miatt kisebb meghajtó áramra van szükség, mint a síkfilmnél, ugyanakkor az átmágnesezés által indukált feszültség pedig jóval nagyobb. A megfelelően előkészített huzalfelületre elektrolitikus ötvözéssel választják le a Ni—Fe összetételű mágneses vékonyréteget, mégpedig olyan módon, hogy a huzalon közben áramot vezetnek keresztül, és így a leválás alatt cirkuláris mágneses tér hat a képződő vékonyrétegre. A külső mágneses tér hatására anizotrópia alakul ki: a mágnesezettség legkedvezőbb orientációja a hengerpaláston a körkörös irány, míg a legkedvezőtlenebb a palást alkotója menti irány. A 9. ábrán vázlatosan bemutatjuk, hogyan lehet egy megfelelően kezelt memóriahuzalba a logikai „igen — nem”-nek megfelelő információt beírni, illetőleg kiolvasni. Az információ-beírás a következőképpen történik. Első lépésben a szóáram-impulzussal a vékonyréteg mágnesezettségét a nehéz mágneses tengely irányába forgatjuk, majd ezután megfelelő polaritású bitáram-im-




*9. ábra.* A huzaltároló működési elve

pulzussal, amely könnyű mágnesezési irányban mutató mágneses teret hoz létre, a mágnesezettséget a logikai „igen", vagy a logikai „nem" állapothoz tartozó irányba forgatjuk el. Az impulzusok megszűnése után a mágnesezettség a bitáram-impulzus által meghatározott irányban marad és így tárolja az adott információt.

A kiolvasás folyamata pedig a következő. A mágnesezettséget a szóáram-impulzussal ismét a nehéz mágnesezési tengely irányába forgatjuk. Forgás közben az érzékelő vezetékben áramimpulzus indukálódik, amelynek előjele attól függ, hogy a logikai „igen", vagy a logikai „nem" állapotból forgattuk-e ki a mágnesezettség vektorát.

Az információk kiolvasása kétféle üzemmódban történhet. Az egyik az, amikor elég nagy szóáramot alkalmazunk ahhoz, hogy a mágnesezettség vektora a nehéz mágnesezési tengely irányába teljesen beforduljon, és így a szóáram kikapcsolása után az akár a logikai „igen", akár a logikai „nem" állapotba visszabillenhet. Ez az ún. törléssel járó kiolvasás (az angol elnevezésnek megfelelő rövidítéssel az ún. DRO üzemmód). Ha azonban a szóáram nem forgatja be egészen a nehéz mágnesezési tengely irányába a mágnesezettség vektorát, úgy kikapcsolás után természetesen a mágnesezettség vektora az eredeti állapotába tér vissza és így a tárolt információ nem vész el. Ez a kiolvasás az ún. információmegőrző, vagy törlés nélküli kiolvasás (a megfelelő angol elnevezés szerint az ún. NDRO üzemmód). Az átkapcsolási idő kicsiny, néhány nanoszekundum, ez eleve kedvező kilátásokkal kecsegtet gyors működésű tárolók létrehozására.

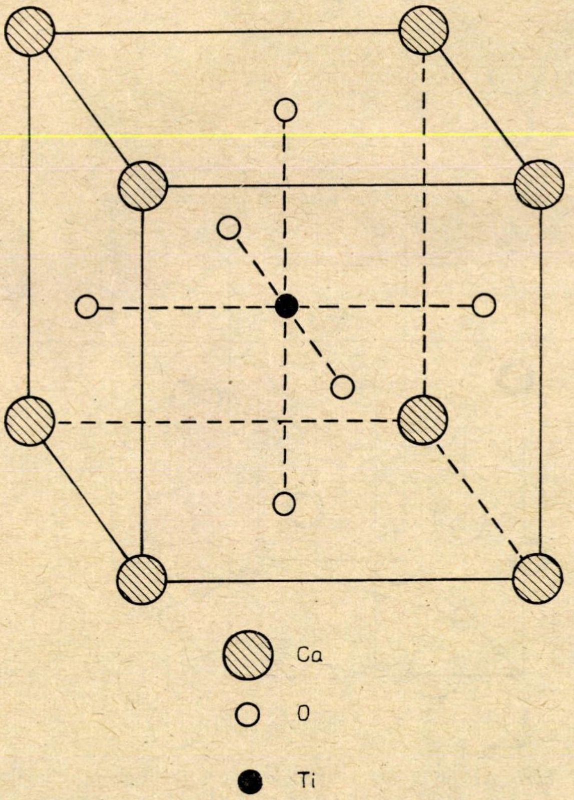
Ahhoz, hogy megbízható tárolókat készíthessünk memóriahuzalból, a memóriahuzalnak különleges követelményeket kell kielégítenie. Hadd említsek meg például egy olyan követelményt, amely rendkívül fontos: a könnyű mágnesezési tengely irányának ingadozása néhány foknál nem lehet több. Érthető ennek a követelménynek a jogossága, hiszen a könnyű mágnesezési tengely irányának nagyfokú ingadozása a kiolvasáskor detektálható feszültség jelentős ingadozására vezet, ami számos megbízhatatlanság forrása lehet. Kívánatos az is, hogy a vékony mágnesréteg viszonylag kis árammal átmágnesezhető legyen, mert nagy szóáramokkal dolgozni igen költséges. A kezdeti tapasztalatok azt mutatták, hogy az elktrolitikusan leválasztott vékonyréteg időbeli stabilitása nem nagy. Néha néhány hónap alatt, más esetekben pedig néhány év alatt a vékonyréteg mágneses paraméterei jelentősen megváltoztak. Ma már többé-kevésbé ismeretes ennek az öregedésnek az oka, és előzetes mágnesteres hőkezeléssel nagyfokú időbeli stabilitást lehet elérni.

A piacon először az UNIVAC cég jelent meg huzaltárolókkal. Először egy 600 nanoszekundumos, majd rövidesen egy 300 nanoszekundumos ciklusidővel rendelkező huzaltárolót mutatott be. Jelenlegi ismereteink szerint az USA-ban 6 cég forgalmaz huzaltároló elemeket és szerelvényeket. További 5—6 helyen foglalkoznak huzaltárolók fejlesztésével. Japánban mintegy 15—20 különböző intézmény állít elő huzaltárolót. Európában a Plessy és a holland Phillips gyárt huzalmemóriát. A Siemens cég és a francia Atomenergia Bizottság grenoble-i intézete szintén kidolgozta a huzaltechnológiát.

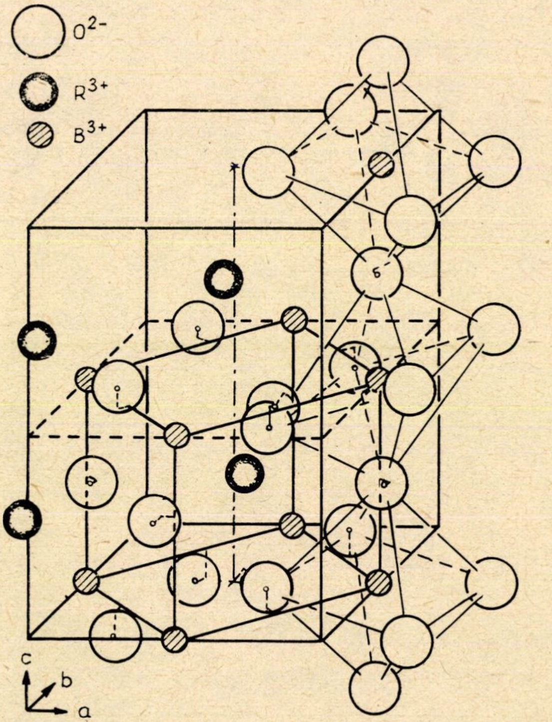
A már elmondott szempontokon kívül figyelembe kell venni még azt is, hogy a memóriahuzal előállítása folyamatos üzemmódban történhet, a tárolási tulajdonságokat az előállítás során on-line módszerrel lehet ellenőrizni és az előállítás paramétereit megfelelően visszaszabályozni. Ma már el lehet érni cm-enként mintegy 15—20 bit tárolását, és 0,05 mm átmérőjű huzal alkalmazásával 20 000 bit/cm$^3$ pakolási sűrűség megvalósítható. A huzaltárolók elterjedését a félvezető tárolókhoz viszonyított versenyképessége szabja meg. A versenyképesség növelése érdekében a huzaltároló szerelési költségeit csökkenteni igyekeznek automatizálással és a drága javítások elkerülésére pedig tartalék bitvonalakat építenek be a tárolóba. Véleményünk szerint 1973-tól fokozatosan, de 1975-től kezde minden bizonnyal sok olyan számítógép lesz forgalomban, amely huzalmemóriát fog használni.

## 4. Buborék memóriák

Néhány év óta ismeretesek azok a kísérletek, amelyek arra irányultak, hogy a mágneses anyagokban bizonyos feltételek mellett kialakuló hengeralakú domének, buborékok információtárolási célokra közvetlenül felhasználhatók legyenek. A mágneses anyagok doménszerkezetével régóta foglalkoznak a kutatók. Ismeretes volt, hogy egytengelyű anizotrópiával rendelkező anyagokban bizonyos feltételek mellett hengeralakú domének alakulhatnak ki és ezek a domének a külső paraméterek elég széles intervallumában stabilisak maradnak. A Bell-laboratóriumból publikálták az első, valóban érdekes eredményeket. Az ortoferrit egykristályok, amelyek vasionokat, ritkaföldfém ionokat és oxigén ionokat tartalmaznak, olyan előnyös tulajdonsággal

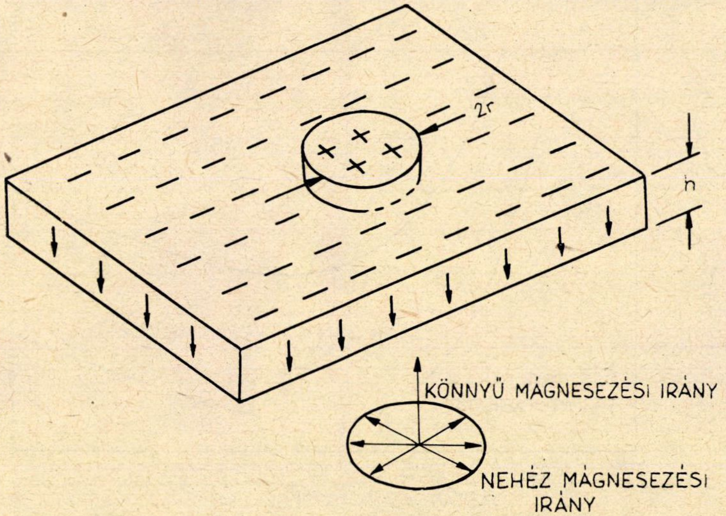



*10. ábra.* A köbös perovszkit ($CaTiO_3$) tipikus elemi cellája rendelkeznek, hogy az egytengelyű anizotrópiát jellemző anizotrópia tér ezekben az anyagokban nagyobb, mint az effektív kicserélődési tér. A 10. ábrán látható az ortoferritekre jellemző tipikus szerkezet, a $CaTiO_3$ elemi cellája. A 11. ábra pedig az ionok pontosabb elrendezéseit szemlélteti. A 12. ábra mutatja, hogyan is alakul ki egy olyan vékony kristálylapkában, amelynek síkjára a könnyű mágnesezési irány merőleges, hengeralakú domén, vagy más néven buborék. A külső mágneses tér és a domén falát összehúzó erő a domén kialakulását megakadályozni igyekszik. Ezzel szemben a magnetosztatikai tér a domén fenntartására törekszik, mert létezése a magnetosztatikai energia csökkenésére vezet. Ugyanis a doménen keresztül erővonalak záródnak és ez azt jelenti, hogy a kristálylapka magnetosztatikai energiája kisebb doménnel, mint a domén nélkül. A domének átmérője 20 és 100 mikron között váltakozhat, nyilvánvalóan a nagyon kis átmérőjű domének a gyakorlati alkalmazások szempontjából nem kedvezőek, de ugyancsak kedvezőtlenek a nagy átmérőjű domének is. A 13. ábra a domén stabilitási feltételeire ad felvilágosítást. Mind a doménfal energia, mind a magnetosztatikai energia helyettesíthető egy-egy ekvivalens mágneses térrel. Az ábrán a $H_w$, illetve a $H_d$ jelzik a megfelelő ekvivalens tereket. A magnetosztatikai eredetű tér maximális értékét nyilván akkor éri el, amikor a domén sugara zérus. Növekedő doménsugárral enyhén csökken a magnetosztatikai energia. A fal hatását reprezentáló effektív teret és a külső teret ábrázoló görbe két kritikus doménsu-

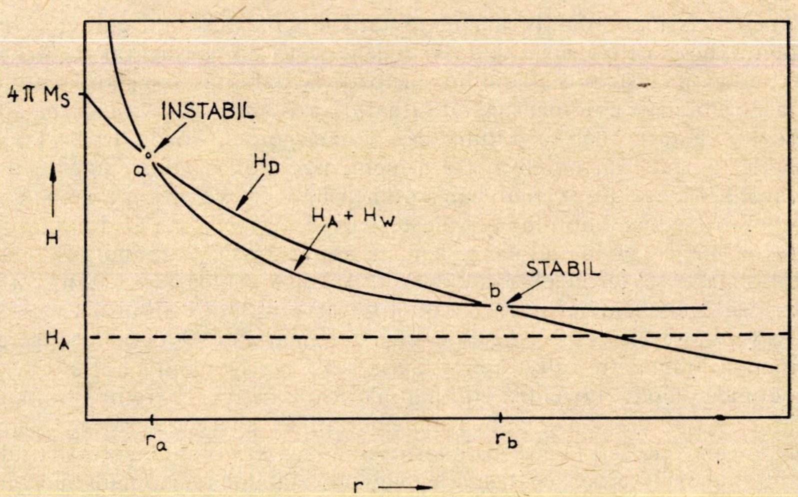



*11. ábra.* Az ionok elhelyezkedése az ortoferrit elemi cellájában ($R^{3+}$ – 3-vegyértékű ritkaföldfém-ion; $B^{3+}$—háromvegyértékű vas; $O^{2-}$—kétvegyértékű oxigén) gár értéknél metszi az effektív magnetosztatikai teret ábrázoló görbét. Ezekhez a metszéspontokhoz tartozó sugarak adják a lehetséges doménsugarakat. A két érték közül a kisebbik metastabilis állapothoz tartozik. A stabilitásvizsgálatok eredményeit mutatja a 14. ábra. Itt a doménsugarat láthatjuk a vékonyréteg vastagságának függvényében. Két határgörbét rajzoltunk be. A határgörbék között terül el a stabilis hengeralakú domének tartománya. Ha a méretviszonyok olyanok, hogy a felső határgörbe fölé kerül az adott kristályban a doménsugár értéke, akkor a domén azonnal torzul, legtöbb esetben elliptikus torzulást szenved, ha pedig az alsó határgörbe alá kerül, akkor már nem marad meg, hanem összeroppan. A buborék stabilis méretét a külső mágneses térrel lehet változtatni. A külső mágneses tér iránya a domén mágnesezettségével ellentétes irányú. Ebből következik, hogy a külső tér csökkentésekor növekszik, növelésekor pedig csökken a doménátmérő. A domén hengeres alakját a minimális falfelületre való törekvés alakítja ki. Ha azonban a külső tér csökkentésével a domén méretét növeljük, eljuthatunk olyan kritikus mérethez, amikor a domén elliptikus torzulása nagyobb magnetosztatikai energianyereséggel jár, mint amennyi a megnövekedett falenergia miatti veszteség. Az ábrából leolvashatjuk, hogy a legkisebb doménátmérő és egyben a legnagyobb stabilitás-tartomány nagyjából ott van, ahol a lemez vastagsága mintegy négyszerese a doménátmérőnek. Itt a maximális és minimális stabil doménátmérő aránya körülbelül 3,5.

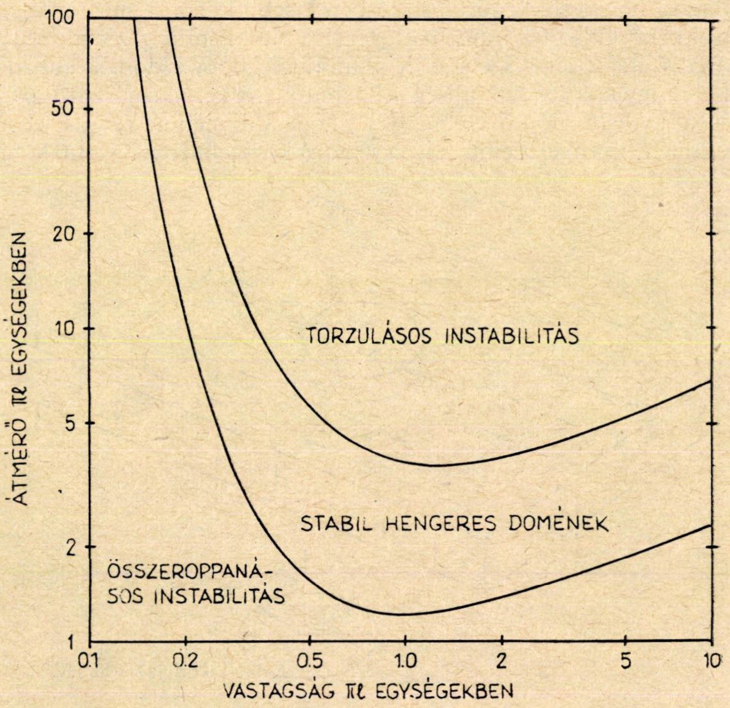
A külső homogén tér segítségével nem nagyon széles határok között ugyan, de változtathatjuk a domének átmérőjét. Inhomogén mágneses térrel viszont a doméneket mozgásra késztethetjük. Mivel a domén mágnesezettsége a külső tér irányával ellentétes, világos, hogy csökkenő külső térben kisebb lesz a domén energiája, ezért a domén a csökkenő külső tér irányába igyekszik elmozdulni. Az elmozdulással a doménfal koercitív ereje szegül szembe. Kiszámítható, hogy a domén abban az esetben mozdulhat el, hogyha a tér-különbség a koercitív erő két-háromszorosánál nagyobb. A mozgatásnál nyilvánvaló követelmény az, hogy a domén ne veszítse el statikus stabilitását. A koercitív erővel szemben igen szigorú követelmények vannak, hiszen hogy-




*12. ábra.* Hengeralakú domén képződése kristálylapkában

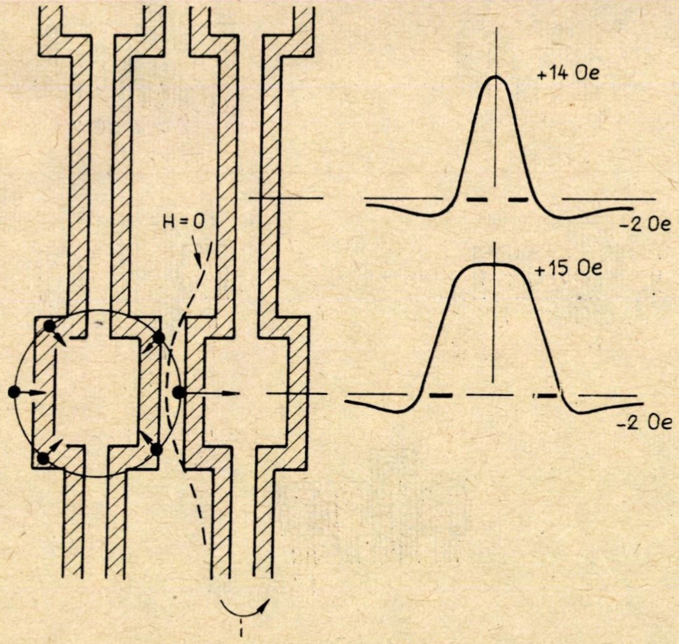



*13. ábra.* A hengeralakú domének stabilitásának feltételei

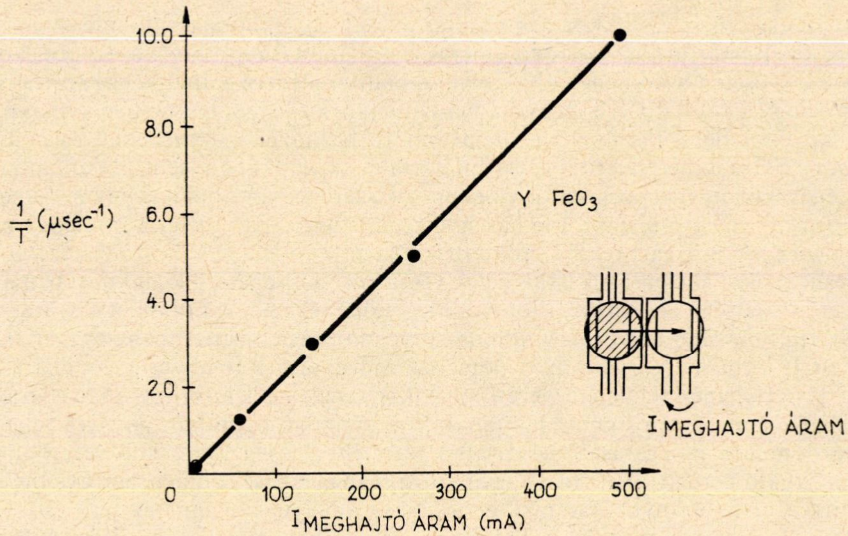



*14. ábra.* A domén átmérője a kristálylapka vastagságának függvényében ha a koercitív erő nagy, akkor a mozgatáshoz esetleg akkora térkülönbségre volna szükség, amely már instabilitást eredményezne. Kimutatható, hogy a 0,1 Oe körüli koercitív erő esetén a domének általában szabadon, jól mozgathatók. Érdemes megjegyezni, hogy a koercitív erő teljes hiánya szintén rossz lenne, mert a hengeralakú domének között fellépő taszítóerő azonnal mozgásba hozná a doméneket, és nyilvánvaló, hogy stabilis helyzet több domént tartalmazó lapkában nem alakulhatna ki. A domének között fellépő taszítóerőnek nagy szerepe van abban, hogy a domének logikai funkciók megvalósítására felhasználhatók. Fontos paraméter a domének mozgási sebessége. A mozgást fékező erők eredete igen bonyolult, és most nem szeretném részletezni azokat a jelenségeket, amelyek végső soron a sebesség kialakításában alapvető szerepet játszanak. Annyit azonban megjegyezném, hogy a doménfal vastagsága az egyik legfontosabb tényező. A tipikus doménmozgási sebesség néhány ezer, kivételesen 10 000 cm/sec körül van. A domének mozgatására rendszerint az eljárás az, hogy a kristálylemez felületére vezetőhurkokat visznek fel fotolitográfiai eljárással, illetve lágymágneses anyagból alakítanak ki különböző figurákat, amelyek lehetővé teszik a domének mozgatását. A 15. ábra szemlélteti a legegyszerűbb vezetőhurkos doménmozgató berendezést. Ha az egyik hurokban mágneses domén van, és a mellette levő hurkot olyan irányú árammal gerjesztjük, amelynek mágneses tere csökkenti az előfeszítő mágneses tér értékét, akkor a domén ebbe a hurokba ugrik át. A 16. ábrán az átugrás sebessége és a meghajtó áram erőssége közötti összefüggés látható.

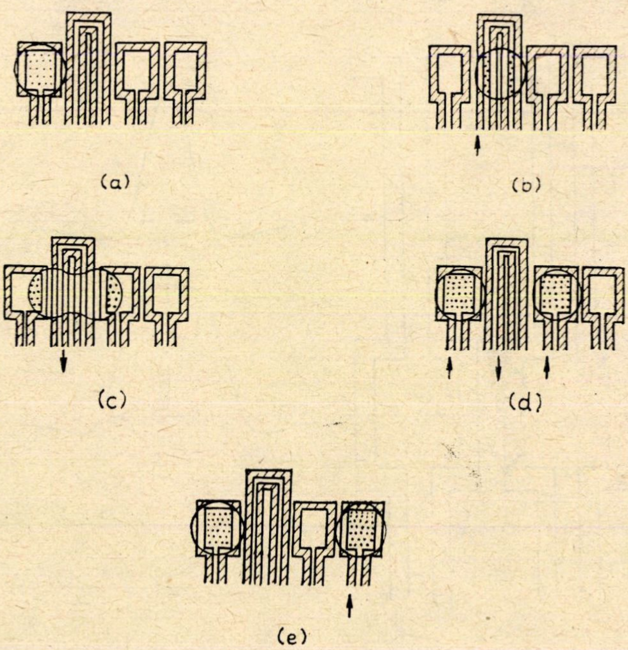
Nagy előnyük a buboréktárolóknak, hogy bennük a domének száma szaporítható. A 17. ábrán bemutatunk egy egyszerű elrendezést, amely lehetővé teszi a domének szaporítását. A szaporítás céljaira az ún. doménvágó hurok szolgál. Először a szomszédos vezető hurokból átemeljük a szétvágandó domént a vágóhurokba, majd annak




*15. ábra.* Doménmozgató vezetőhurok

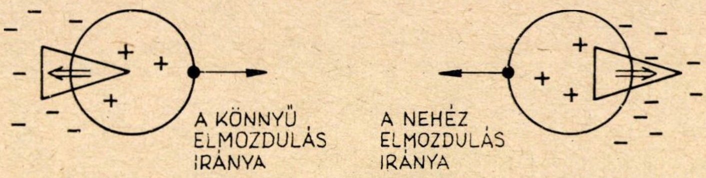



*16. ábra.* A domének mozgási sebessége és a meghajtó áram erőssége közötti összefüggés



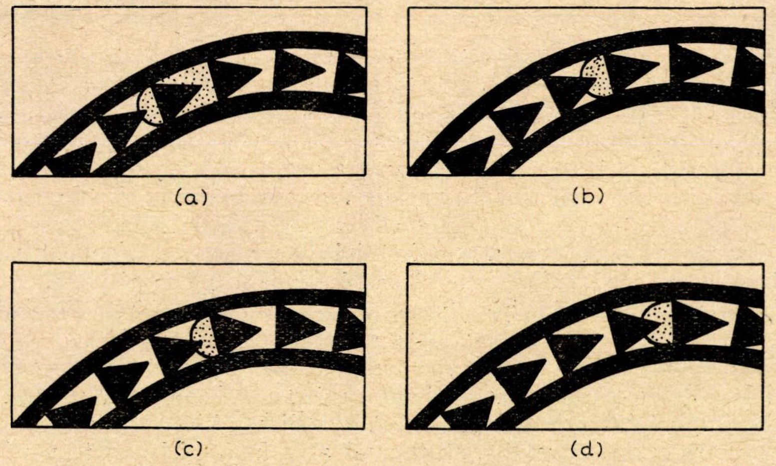

*17. ábra.* A domének szaporítása és mozgatása középső, hajtűre emlékeztető vezetékével erősen lokalizált mágneses teret állítunk elő, amely a domén piskótaszerű torzulását idézi elő és végül szétszakadására vezet. A szétszakadás után mindkét domén azonnal eredeti méretére növekszik, majd a köztük fellépő taszítóhatás következtében az egyik a kiinduló helyzetbe tér vissza, míg a másik az ellenkező oldalon levő vezetőhurokba ugrik be. Könnyen elképzelhető, hogy a domének léptetésére és szaporítására alkalmas hurokrendszerrel gyors működésű regiszterek valósíthatók meg. A Bell-laboratóriumban kifejlesztett mintapéldányokat $10^6$ bit/sec-nál nagyobb sebességgel is sikerült működtetni.

A hengeralakú domének mozgatására a vezetőhurkos módszeren kívül sokféle ötletes eljárást találtak ki. Fel lehet használni például a mozgatásra permalloyból készült kis, ékszerű képződményeket. Ezek hatását a 18. ábra mutatja. A doménból ki-



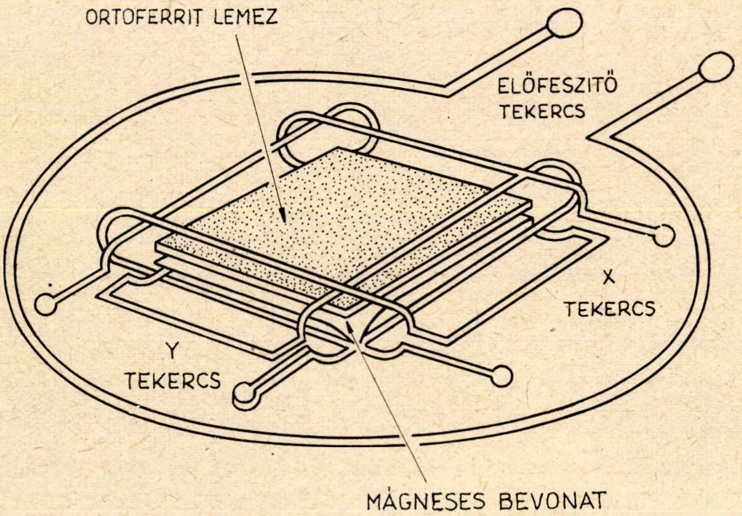

*18. ábra.* A mágneses ék hatása a domének elmozdulására

induló erővonalak az éken át záródnak, és ez csökkenti a domén magnetosztatikai energiáját. A domén úgy mozdul el, hogy teljes energiája minimális legyen. A tényleges alkalmazásban az ékek egymást követik, és a domének oldalirányú megszökését két vezetősín akadályozza. Az elrendezés működésének az a lényege, hogy a doméneket az ék hegye felé könnyen, tompa vége felé pedig nehezen lehet elmozdítani. A léptetés a homogén előfeszítő tér erősségének modulációjával történik. Ha az előfeszítő tér csökken, a domén mérete megnő olyannyira, hogy eléri a következő ék tompa végét. Ha most a teret újra megnöveljük, a buborék a tompa végről leszakadni nem tud, hanem összehúzódva teljes egészében a következő ékre ugrik át. Ez a folyamat jól látható a 19. ábrán.




*19. ábra.* A domének mozgatása mágneses ékek segítségével

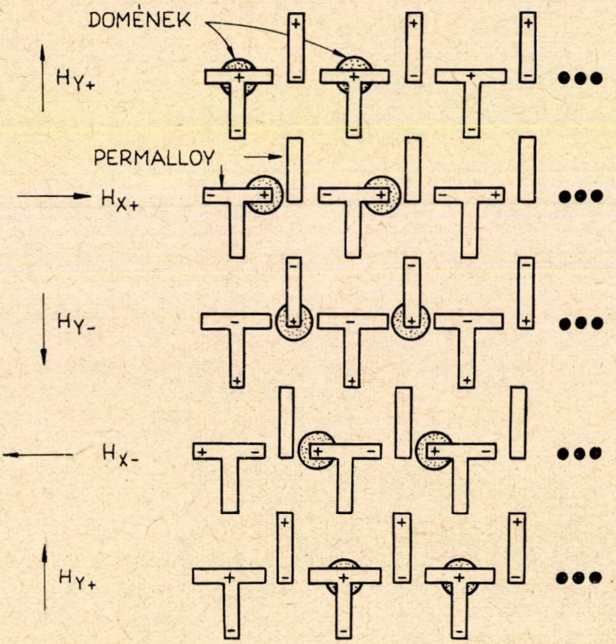
A domének mozgatására és keltésére jól felhasználható az ún. T-rudas technika. A módszer elnevezését onnan kapta, hogy a domének mozgatására T-alakzatban lágymágneses anyagot visznek fel a kristálylapka felületére. Mágnesező tekercsek, amelyek a 20. ábrán láthatók, egyrészt létrehozzák az előfeszítést biztosító teret, másrészt pedig a lapka síkjában ható, két egymásra merőleges mágneses teret keltenek. Ez utóbbiaknak a nagy anizotrópiatér miatt közvetlen hatása nincs; közvetett hatásuk abban nyilvánul meg, hogy mágnesezik a T-alakú elemeket. Csak a rudak hosszméretével párhuzamos térnek van hatása, a keresztirányú tér a nagy lemágnesezési tényező miatt lényeges hatást nem tud kelteni.




*20. ábra.* Mágneses terek előállítása ortoferrit-kristálylapkában tekercsek segítségével, a T-rudas technika alkalmazása esetén

A rudakban a külső tér mágneses pólusokat indukál, és ezek a pólusok vonzzák, illetve taszítják a doméneket. A 21. ábra világosan szemlélteti, hogyan lehet doméneket T-rudas technikával mozgatni. Az ábra első sorában azt az állapotot láthatjuk, amikor a pozitív Y-irányú mágneses tér hatására a T-rudak pozitív pólusainál domének lokalizálódnak. Az ábra második sorában a pozitív X irányú mágneses tér hatására a domének elmozdulnak, majd a negatív Y-irányú mágneses tér azt eredményezi, hogy a domének a T-alakú lemezek között elhelyezkedő I alakú lemez végére ugranak. A teljes ciklus úgy záródik, hogy a negatív X-irányú tér hatására a domének a következő T-alakú lemez bal oldali végére kerülnek és végül az Y-irányú pozitív mágneses tér hatására a lemez középső helyére futnak. Ez a folyamat tovább ismételhető, és így a domének az adott elrendezésen belül tetszés szerinti helyre továbbíthatók.

A domének mozgatásán alapuló memóriáknak nagy előnye, hogy komplex logikai funkciók elvégzésére is alkalmasak. Sajnos, mind a mai napig nem sikerült előállítani megfelelő minőségű kristálylapkákat. A vizsgálatok kiderítették, hogy a ritkaföldfém-ortoferrit egykristályok bár alkalmasak arra, hogy a jelenség fő vonásait demonstrálják, a gyakorlat követelményeinek azonban nem felelnek meg.




*21. ábra.* A domének mozgatása T-rudas technikával

Az utóbbi időben az ortoferriteken kívül több más anyagot találtak, amelyekben cilindrikus domének kelthetők és mozgathatók. Ezek közé tartozik többek között a vasborát, valamint az epitaxiálisan növesztett gallium-ittrium-gránát és különböző más gránátféleségek. Azt mondhatjuk, hogy a Bell-laboratórium pár évvel ezelőtti nagy reklámhadjárata a buborékmemóriák elterjesztésének érdekében megalapozatlan volt ugyan, de az is kétségtelen, hogy a szabadalom magját képező fizikai jelenség nagyon sok lehetőséget rejt magában. A kutatásnak a jövőben arra kell irányulnia, hogy megtalálja a legmegfelelőbb mágneses anyagot.

## 5. Optikai memóriák

Jó néhány éve intenzív kutatás folyik a világ különböző laboratóriumaiban az optikai elven működő tárolók fejlesztése érdekében. A fénynyaláb igen kis területre fókuszálható, látható fény esetén mintegy 0,25 négyzetmikronnyi területre, ami azt jelenti, hogy 1 $cm^2$-nyi felületen elvileg $4 \times 10^8$ bit információt lehet tárolni. Természetesen ez egy ideális felső határ, a valóságban legalább egy nagyságrend csökkenéssel kell számolnunk, de még ez a bitsűrűség is igen vonzónak tűnik. Beírásnál és kiolvasásnál a fénynyaláb inerciamentes mozgatásával lehet a kívánt címet elérni és ez gyors működést biztosít. Nagy sebességgel beírni optikai úton információt akkor lehet, ha az anyaggal rövid idő alatt elegendő energiát tudunk közölni. Ebből a követelményből adódik, hogy fényforrásként célszerű lézert használni.

Az optikai memóriákat többféleképpen osztályozhatjuk. Mi a következő két csoportba soroljuk az optikai memóriákat:

— bit szervezésű, szekvenciális hozzáférésű memóriák,

— lapszervezésű, tetszőleges hozzáférésű holografikus memóriák.

A bit szervezésű memóriák előnye, hogy beírásnál on-line üzemmódban csatlakoztathatók a számítógéphez. Az elérhető legnagyobb kapacitás $10^{12}$ bit is lehet. Hátránya a nagy elérési idő.

A lapszervezésű, holografikus memóriáknak nagy előnye a rövid elérési idő, viszont hátránya a számítógéphez való csatlakoztatás bonyolultsága.

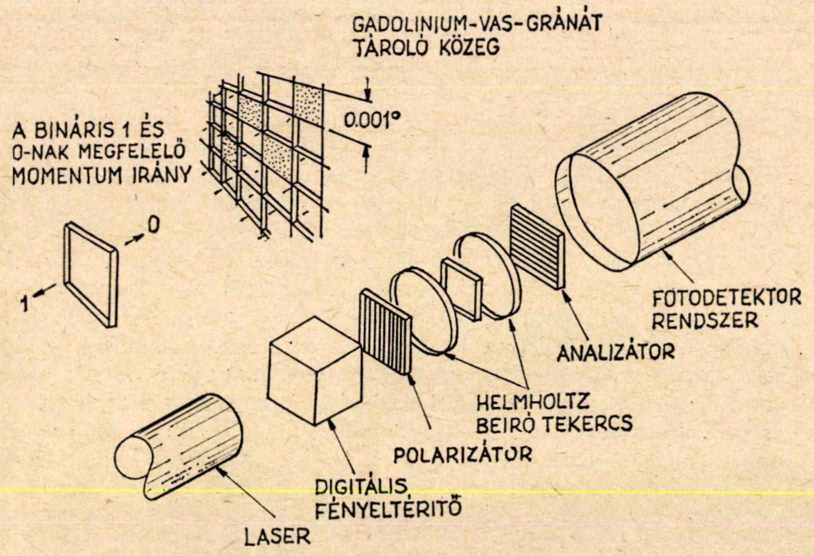
Mind a bit szervezésű, mind a lapszervezésű memóriáknak egyik legfontosabb része a beíró és kiolvasó fény hatására megfelelően reagáló tárolóanyag. A következőkben elsősorban ezekről a tárolóanyagokról szeretnék beszélni. A fény hatására vagy a tárolóanyag áteresztőképessége változik meg, vagy pedig olyan strukturális változást szenved, amelynek hatására törésmutatója, reflexióképessége stb. szenved változást. Az a fizikai hatás, amely a beírás folyamatában szerepet játszik, kétféle lehet: a fényenergia hővé alakul át, és megnövekedett hőmérséklet hatására változnak meg a tárolóanyag tulajdonságai; vagy a tárolóanyag atomjait, molekuláit gerjeszti a fény és ez használható ki a tárolás céljaira. Termikus folyamatok játszódhatnak le például ferromágneses anyagoknál, termoplasztikus és hő hatására deformálódó anyagoknál stb.

Már a bevezetőben említettem, hogy bizonyos vonatkozásban szoros kapcsolat van az optikai és mágneses tárolásnál felhasználásra kerülő anyagok között. Ennek bemutatására szeretnék néhány példát említeni az optikai tárolásnál számításba jövő mágneses anyagok köréből. Elképzelhető, hogy valamely mágneses vékonyréteg, amelynek könnyű mágnesezési iránya a réteg síkjára merőleges, elég alacsony Curie-ponttal rendelkezzék ahhoz, hogy lézer hatására paramágneses állapotba jusson. Ilyen anyag például a mangánbizmut. Induljunk ki abból, hogy a mangánbizmut egykristályból készült vékonyréteg egy adott irányban — természetesen a réteg síkjára merőlegesen — homogénen mágnesezett állapotban van. Ha most lézerfénnyel megvilágítjuk ennek a rétegnek egy kis felületelemét, akkor ez a tartomány rövid időre elveszti mágnesezettségét, de amikor lehűlés során eléri a Curie-pontot, segédtér alkalmazásával az alapréteg mágnesezettségével ellentétes irányba állítható be a mágnesezettsége. Így tehát a mangánbizmut vékonyrétegben lézerfény segítségével egymással ellentétesen mágnesezett tartományok alakíthatók ki, amelyek különbözőképpen változtatják meg a kiolvasásnál alkalmazott kisebb intenzitású lézerfény polarizációsíkját. Mangánbizmut vékonyréteg segítségével demonstrálták mind a bit szervezésű, mind a lapszervezésű optikai tárolás lehetőségét.

Érdemes talán megemlíteni még egy mágneses anyagcsaládot, amely a mangánbizmutnál is kedvezőbb tulajdonságokkal rendelkezik. A ferrimágneses anyagok azon családjáról van szó, amelyek ún. kompenzációs hőmérséklettel rendelkeznek. Kompenzációs hőmérsékletnek azt a hőmérsékletet nevezik, amelynél az egymással ellentétes alrács-mágnesezettségek éppen zérus eredőmágnesezettséget adnak. A kompenzációs hőmérséklet rendszerint jóval a Curie-pont alatt van. Ha most ilyen anyagból készítünk vékonyréteget, akkor az előzőkhöz teljesen hasonlóan belátható, hogyan lehet akár szekvenciális, akár holografikus optikai tárolásra felhasználni. Tegyük fel ismét, hogy a könnyű mágnesezés iránya merőleges a vékonyréteg síkjára és hogy az egész vékonyréteg homogén mágnesezett állapotban van. A lézerfény felhevíti a réteg egy kis darabját, és amikor lehűlésnél ez eléri a kompenzációs hőmérsékletet, egy kis előfeszítő tér segítségével a mágnesezettség irányát az alapréteg mágnesezettségével ellentétesre fordíthatjuk. A 22. ábrán láthatjuk egy egyszerű optikai tároló vázlatos rajzát.

Ma sokféle olyan anyag ismeretes, amely lehetővé teszi az optikai tárolást, azonban a belőlük készíthető vékonyrétegek minősége még elmarad a követelményektől.

A holografikus adatrögzítésről érdemes még annyit megjegyezni, hogy az információ a felfogóernyőn nem lokalizálva, hanem folytonosan elosztva jelenik meg, ezért a reprodukálásnál nem szükséges az egész hologramot megvilágítani, hanem ele-




*22. ábra.* Egyszerű optikai tároló vázlatos rajza

gendő annak csak egy kisebb részét felhasználni a kép megjelenítésére. Természetesen ez esetben a jel/zaj viszony csökkenni fog. Ez a tulajdonság teszi lehetővé, hogy egy tárolórétegre (lemezre) több hologramot vigyenek fel. Egy-egy részhologramban $100 \times 100$ bit tárolása elképzelhető, és ez azt jelenti, hogy egy $10^8$ bit kapacitású memória csak $100 \times 100$ részhologramot igényel. Ez a rendszer felbontóképességével szemben támasztott követelményeket erősen lecsökkenti. Már említettük, hogy a jel/zaj viszony rovására engedhetünk a pontossági követelményekből, és nem kell az egész részhologramot megvilágítani, elegendő, ha annak csak egy darabját világítjuk át. Ez lehetővé teszi a hozzáférési idő lerövidítését.

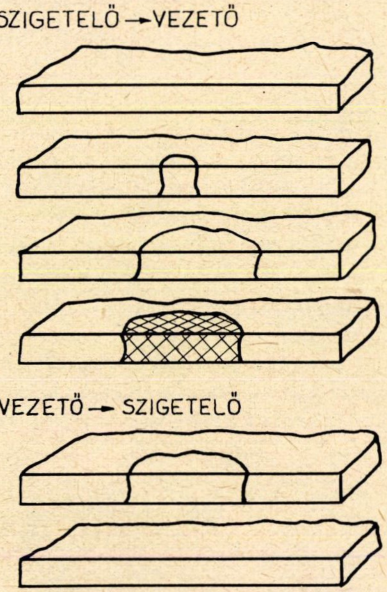
Természetesen korai volna még az optikai memóriák gyakorlati elterjedésének idejét megjósolni, de aligha tévedünk, ha azt állítjuk, hogy a következő 5 évben mindenképpen számíthatunk az optikai memóriák széles körű megjelenésével.

## 6. Félvezető memóriák

Az utóbbi időben a félvezető memóriák alkalmazásáról egyre több híradás jelenik meg. Ismeretes, hogy az IBM már bemutatott félvezető memóriával működő számítógépet. Tekintettel arra, hogy a félvezető memóriák perspektíváiról az utóbbbi időben számos közlemény jelent meg, nem szeretnék a ma már klasszikusnak minősülő típusokról, azok előnyeiről és hátrányairól beszélni. Inkább egy olyan új lehetőségre szeretnék rámutatni, amely az amorf-félvezetők alkalmazásával kapcsolatos.

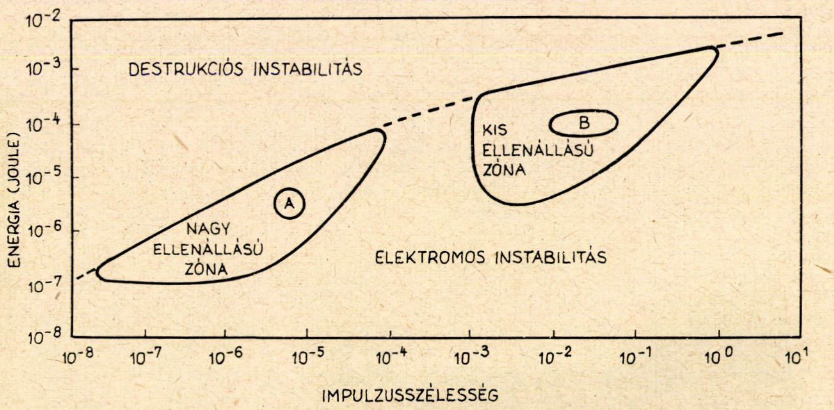
Ismeretes Ovshinskynak az a javaslata, hogy kapcsolóelemként üvegszerű, amorf-félvezető rétegeket célszerű felhasználni, amelyeknek az a tulajdonságuk, hogy az alkalmazott feszültség függvényében nemvezető állapotból ugrásszerűen vezető állapotba mennek át. Az igazság kedvéért meg kell említeni, hogy a jelenség már 1913 óta ismeretes. Ennek ellenére még ma is az a helyzet, hogy a nemvezető állapotból a vezető állapotba való átalakulás mechanizmusát szinte alig ismerjük, és talán ez az oka annak, hogy a nagy reményekre jogosító amorf-félvezető kapcsolóelemek eddig nem nagyon terjedtek el.

A leginkább számításba jövő anyagok között kell megemlítenünk a Ge-Te-Se-As négykomponensű amorf rétegeket, amelyek tulajdonságai természetesen erősen függnek az összetételtől. Ezekben a rétegekben a kapcsolási effektus legegyszerűbben a következő folyamatok hatására állhat elő. Amikor a rétegre adott feszültség egy bizonyos kritikus feszültséget, az ún. küszöbfeszültséget eléri, az elektronszerkezetben bekövetkező változás hatására áram indul, amely melegíteni kezdi az amorf állapotú anyagot, és ez megnöveli annak a csatornának a keresztmetszetét, amelyen keresztül áram folyhat. Így egy önmagát erősítő folyamat alakul ki: az egyre nagyobb erősségű áram egyre nagyobb átmérőjű csatornát hoz létre az amorf rétegben. A feszültség lekapcsolása után ez a csatorna feltehetően kristályos állapotúvá válik és megőrzi vezető tulajdonságait. A vezető állapotból a szigetelő állapotba való átmenet úgy történik, hogy megfelelő időtartamú feszültségimpulzussal a vezető csatornát ismét rendezetlen állapotba hozzák. Ha a feszültségimpulzus időtartama elég kicsi, ez esetben a



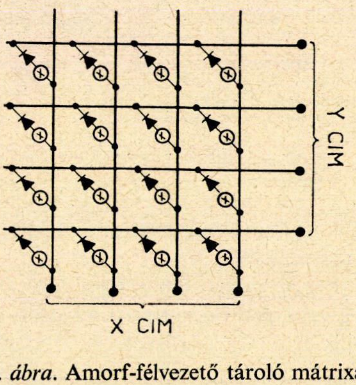

*23. ábra.* Amorf-félvezető átmenete nemvezető állapotba és viszont rendezetlen állapot befagyasztható, és így a nagy ellenállású állapot visszaállítható. A 23. ábra vázlatosan szemlélteti a most elmondott folyamatot.

Annak szemléltetésére, hogy a vezető és nemvezető állapot létrehozásában milyen szerepe van a feszültségimpulzus időtartamának és a disszipált energiának, szolgáljon a 24. ábra. Láthatjuk, hogy a vezető, illetve a nagy ellenállású állapot létrehozása csak bizonyos tartományba eső energia- és időtartam-értékek mellett lehetséges. Mivel a

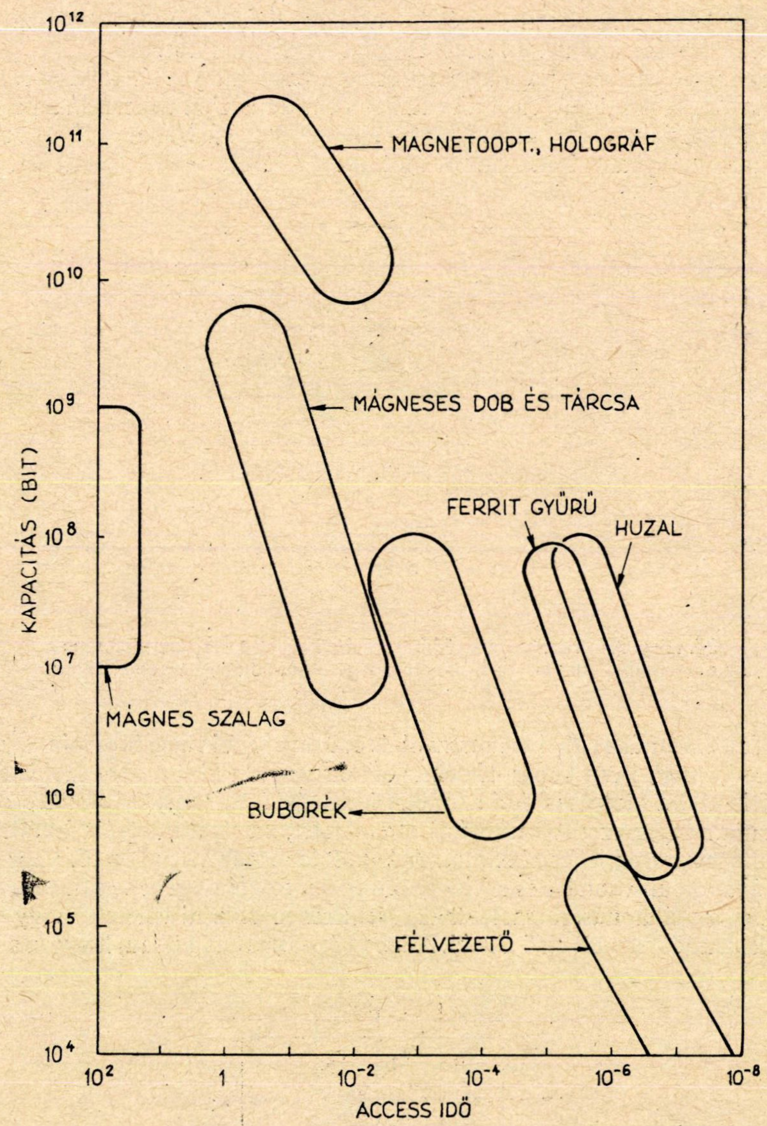



*24. ábra.* Az áramimpulzus időtartamának és intenzitásának szerepe az amorf-félvezető vezető, illetve nem-vezető állapotának létrehozásában

beírási időt a számításba jövő leghosszabb időtartam szabja meg és ez mintegy 10 millisec, várható, hogy ilyen kapcsolóelemekből elsősorban kiolvasásra szolgáló memóriák készíthetők, a kiolvasási idő azonban igen rövid, mintegy 0,10 mikrosec. A 25. ábra mutatja a legegyszerűbb tárolósík-elrendezést, amelyet integrált áramköri technológiával könnyen ki lehet alakítani. A kapcsolóelemek vagy vezető, vagy nagy ellenállású állapotban vannak, és a kiolvasó impulzusok lényegében csak ennek a ténynek a gyors megállapítására szolgálnak. Nem régen olvasni lehetett, hogy elkészült az ilyen elemekből felépült első tároló. Aligha kétkedhetünk abban, hogy az amorf-fél-



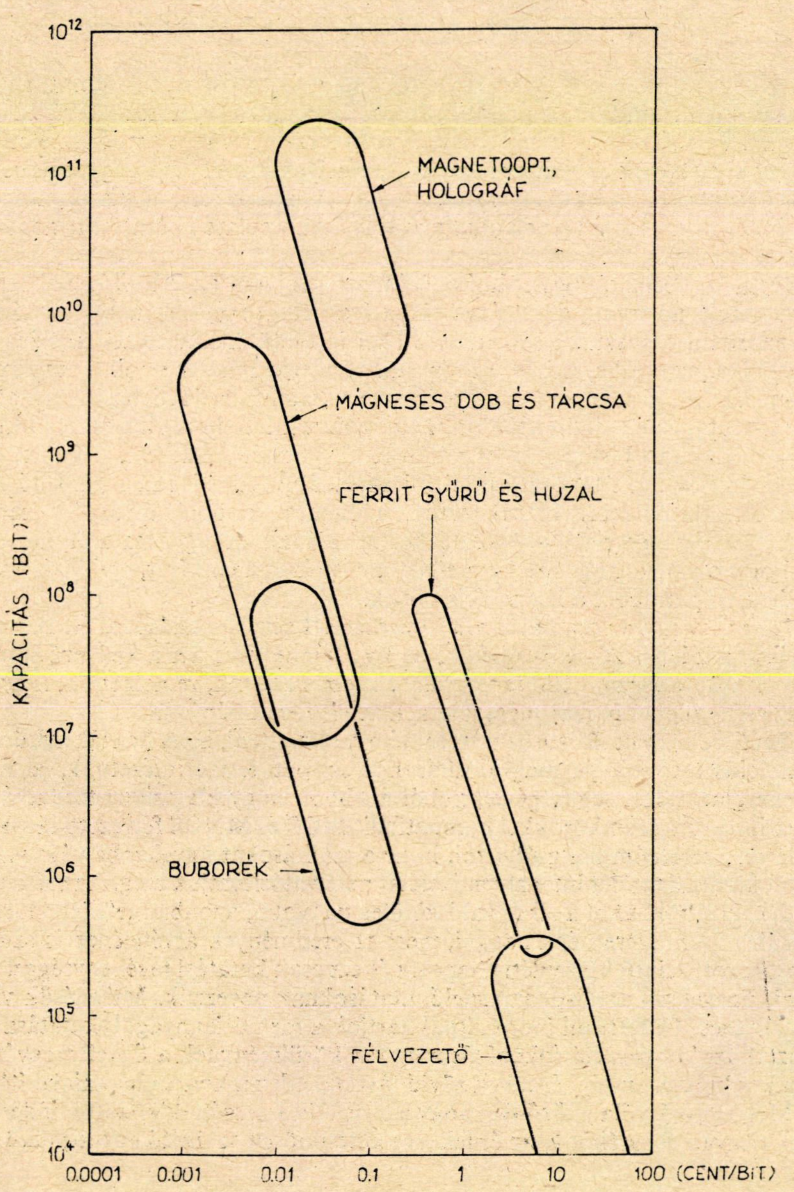

*25. ábra.* Amorf-félvezető tároló mátrixa




*26. ábra.* Különböző típusú tárolók kapacitásának (bit) függése az elérési időtől

vezető anyagok alkalmasak lesznek versenyképes termékek előállítására, ezért mindenképpen indokolt kutatásuk.

Befejezésül még két ábrára szeretném a figyelmet felhívni. Az egyiken (26. ábra) az elérési idő függvényében a különböző típusú tárolók kapacitása látható, míg a másikon (27. ábra) a kapacitás és az ár közötti kapcsolat szemlélhető a jelenleg használatos vagy perspektivikusan számításba jövő tárolórendszerek esetében.




*27. ábra*. A különböző típusú tárolók ára és kapacitása közötti összefüggés

## Néhány szó a Központi Fizikai Kutató Intézet terveiről

A Központi Fizikai Kutató Intézetben nagy jelentőséget tulajdonítunk azoknak a kutatásoknak, amelyek a számítógépipar középtávú és hosszú távú célkitűzéseit szolgálják. Természetesen a lehetőségek gondos számbavétele arra késztetett bennünket, hogy kiválasszuk azokat az irányokat, amelyek művelésére nagyobb erőket kívánunk koncentrálni. Jelentős kutatókapacitást hoztunk létre a kisszámítógépek fejlesztésére és a kisszámítógépek alkalmazásával kapcsolatos kutatási feladatok ellátására.

Meggyőződésünk, hogy számítógépkutatást folytatni a számítógépekben felhasználásra kerülő anyagok, alkatrészek kutatása nélkül nem lehet. Így azután felhasználva azokat a tapasztalatokat, amelyekkel intézetünk kutatólaboratóriumai a szilárdtestfizika, az optika, fizikai kémia stb. területén rendelkeznek, komplex kutatási program kidolgozásába kezdtünk a jövőben számításba jövő tárolóanyagok felkutatására. Kutatásokat indítottunk a memóriahuzal létrehozására és megfelelő minőségű memóriahuzal birtokában huzaltároló kifejlesztésére. Ezen a téren azt reméljük, hogy néhány év alatt laboratóriumi mintapéldány formájában megfelelő minőségű huzaltárolót állítunk elő. Hozzákezdtünk a mágneses buborékanyagok szisztematikus kutatásához. Az egykristály-növesztés technikájának kidolgozása után most az a feladat, hogy olyan anyagokat keressünk, amelyek doménméret, stabilitás és mozgási sebesség szempontjából a legmegfelelőbbek.

Megindítottuk az optikai tárolás bevezetését célzó kutatásokat is. Bár ezen a téren még a kezdet kezdetén vagyunk, de figyelembe véve azt a kedvező körülményt, hogy a lézerkutatásban kellő tapasztalattal rendelkezünk, remélhetjük, hogy az optikai tárolás területén hamar megszületnek az első eredmények.

Végül, de nem utolsósorban szeretném megemlíteni, hogy hozzákezdtünk az ionimplantációs technológia megvalósításához szovjet testvérintézetünk, a Kurcsatov Atomenergia Intézet segítségével, abból a célból, hogy klasszikus technikával kombinálva integrált áramkörökkel kompatibilis MOS és MNOS félvezető tárolókat hozzunk létre. Szeretném hangsúlyozni, hogy a realitásokat figyelembe véve valamennyi felsorolt kutatási terület intenzív művelését nem valósíthatjuk meg. Az erőket döntően oda koncentráljuk, ahol a siker valószínűleg nagyobb, azonban lefedetlenül egyetlenegy területet sem szeretnénk hagyni, mert az eredmények átvételéhez is szükség van meghatározott szintű készenléti állapotra és ezt csak kutatási tevékenységgel lehet biztosítani. Ezeket a kutatásokat figyelőkutatásoknak nevezzük. Művelésük viszonylag nem költséges. Feltétlenül indokoltnak tartjuk a memóriaanyagok kutatása területén a nemzetközi kooperáció fokozását annak a körülménynek a figyelembevételével is, hogy a konkrét gazdasági érdekek rövid távon esetleg a kooperáció kialakítását nehezítik. Meg vagyok róla győződve, hogy a szocialista országok között minden objektív feltétel megvan a hatékony, az érdekeket kölcsönösen szolgáló együttműködés kialakítására.

(Beérkezett: 1971. VII. 22.)

# NEW TRENDS IN RESEARCH AND DEVELOPMENT OF MEMORY MATERIALS FOR COMPUTERS

by

L. PÁL

Central Research Institute for Physics, Budapest, Hungary

The paper reviews the directions that are being taken by current research and development of memory materials for computers. Special critical attention is paid for the possible applications of thin-layer and bubble memories. An outline is given of the long-term prospects for research now being carried out on optical memories and finally an evaluation is presented of the potentialities of amorphous semiconductor elements as memories.

# A SPINORELMÉLET ALGEBRAI ALAPJAIRÓL

Írta: VESCAN ÁGNES*

Mint ismeretes, a spinorokat É. CARTAN vezette be 1913-ban, az egyszerű csoportok lineáris reprezentációinak tanulmányozásakor. Alkalmazásai az elméleti fizikában (melynek kezdete, az 1927—28-as években W. PAULI és P. DIRAC nevéhez fűződik) felkeltette az érdeklődést a spinorok tanulmányozása iránt. Ekkor már ismeretesek voltak a spinorok egyes tulajdonságai, bár matematikai szempontból nem voltak szigorúan definiálva.

1928 után nagyon sok matematikai munka jelent meg a spinorokkal kapcsolatban. Ezek közül felhívjuk a figyelmet a [8], [1], [3], [7], [4], [6] és [5] alatt említettekre.

Ezen dolgozatban a spinorok definícióját és a spinoralgebra fontosabb tulajdonságait szeretnénk röviden összefoglalni.

**I.** Tekintsünk egy $n$ dimenziós euklideszi komplex vektorteret, melyet $V_n$-nel fogunk jelölni. Legyenek $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ egy bázis vektorai $V_n$-ben. Egy $k$-adrendű kontravariáns tenzort *multivektor*nak nevezünk, ha komponensei: $a^{i_1 i_2 \ldots i_k}(i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n)$ antiszimmetrikusak minden indexpárra vonatkozóan. Ezt a multivektort röviden $k$-vektornak is nevezzük és $\underset{(k)}{a}$-val jelöljük. Általában $k$ egyenlő lehet $1, 2, \ldots, n$-nel, de megegyezhetünk abban, hogy $k=0$ is lehet és a 0-vektorok legyenek az alaptest (tehát a komplex számtest) elemei. Egy *k-vektor*t *egyszerű*nek nevezünk akkor, ha előállítható $k$ számú vektor külső szorzataként. Bázisvektorok segítségével is előállíthatunk $k$-vektorokat, melyeket bázis $k$-vektoroknak nevezünk és $\underset{(k)}{\mathbf{e}}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$-val jelölünk. Összesen $C_n^k$ lineárisan független bázis $k$-vektort tudunk felépíteni. A $k$-vektorok között definiáljuk az összeadást, valamint az operátorszorzatot (azaz egy $k$-vektornak komplex számmal való szorzatát) a tenzorok közötti műveletekhez hasonlóan. Ezek alapján könnyen bebizonyíthatjuk, hogy egy tetszés szerinti $k$-vektort a következő alakban írhatunk fel:

$$\underset{(k)}{\mathbf{a}} = \sum a^{i_1 i_2 \ldots i_k} \underset{(k)}{\mathbf{e}}_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \tag{1}$$

ahol az $i_1, i_2, \ldots, i_k$ indexek befutják az $1, 2, \ldots, n$ számokból alkotható kombinációkat. Tehát az összegnek $C_n^k$ tagja van és az indexeket minden tagban nagyságrend szerint vehetjük.

A spinorokat legáltalánosabban a következőképpen definiálhatjuk:

*Spinornak nevezünk egy 0-vektorból, 1-vektorból, 2-vektorból, ..., n-vektorból álló rendszert*, melyet $\varphi = (\mathbf{a}^0, \mathbf{a}, \underset{(2)}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{(n)}{\mathbf{a}})$-nel jelölünk. A spinort alkotó $k$-vektorok $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ komponenseit a spinor komponenseinek nevezzük és ezentúl $\varphi^{i_1 i_2 \ldots i_k}$-val jelöljük.

A spinorok között definiálhatjuk az összeadást, operátorszorzatot és szorzást. Az összeadást és operátorszorzatot úgy definiáljuk, mint a tenzoroknál. Már most

* Iaşi, Université „Al. I. Cuza", Faculté Mathématique—Mécanique. Roumanie.

könnyen ki lehet mutatni, hogy bármely spinort a

$$\varphi = \varphi^0 + \sum \varphi^{i_1} \mathbf{e}_{i_1} + \sum \varphi^{i_1 i_2} \underset{(2)}{\mathbf{e}}_{i_1 i_2} + \ldots + \sum \varphi^{i_1 i_2 \ldots i_k} \underset{(k)}{\mathbf{e}}_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \ldots + \sum \varphi^{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{(n)}{\mathbf{e}}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \tag{2}$$

alakban írhatunk, ahol minden összeg az $1, 2, \ldots, n$ számokból álló annyad rendű kombinációra terjed ki, ahány indexet tartalmaz. Az indexeket minden kombinációban nagyságrendbe tehetjük. Amint fentebb megállapítottuk, egy összeg az összes lineárisan független bázis $k$-vektorokat tartalmazza, tehát egy spinor (2) alatti kifejezésében összesen $C_n^1 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ tag van. Ezek szerint egy spinor nem más, mint egy 0-vektor, egy 1-vektor, ..., egy $n$-vektor direkt összege.

A már definiált műveleteken kívül a spinorok sokaságában még bevezethetjük a szorzást is. Két spinor szorzata teljesen meg lesz határozva, ha definiáljuk két bázis multi-vektor szorzatát. Legyen

$$\underset{(k)}{\mathbf{e}}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \underset{(h)}{\mathbf{e}}_{j_1 j_2 \ldots j_h} = (-1)^N \underset{(s)}{\mathbf{e}}_{q_1 q_2 \ldots q_s}, \tag{3}$$

ahol $N$ az $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_h$ permutáció inverzióinak a száma. A $q_1, q_2, \ldots, q_s$ indexeket úgy kaphatjuk meg, hogy az $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_h$ indexek közül azokat, amelyek kétszer fordulnak elő, elhagyjuk, a többieket pedig változatlanul, de nagyságrendben írjuk le. Ha minden index eltűnik, akkor $\underset{(s)}{\mathbf{e}}_{q_1 q_2 \ldots q_s}$ helyébe $l$-et teszünk.

A spinorszorzat definíciója alapján, az $\underset{(k)}{\mathbf{e}}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ bázis $k$-vektorok az $\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}$ bázisvektorok spinorszorzatának tekinthetők, mivel tudjuk, hogy $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Ezek szerint még megállapíthatjuk, hogy

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \underset{(2)}{\mathbf{e}}_{ij} = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = -\underset{(2)}{\mathbf{e}}_{ji} \quad \text{és} \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = 1. \tag{4}$$

**II.** Az így bevezetett műveletek tulajdonságait vizsgálva könnyen bebizonyíthatjuk, hogy a spinorok halmaza egy $m = 2^n$ dimenziós *Clifford*-féle algebrát alkot, melyet az $n$ dimenziós vektortérben, $V_n$-ben, felépített spinoralgebrának is nevezünk és $C_n$-nel jelölünk. A spinoralgebra nem kommutatív, asszociatív, van egysége éspedig az 1-es számmal egyenlő spinor. Ha nem vesszük figyelembe a szorzás műveletét, akkor a $C_n$ algebra egy $2^n$ dimenziós vektortérnek is tekinthető. Ezt a vektorteret $S_{2^n}$-nel jelöljük és spinortérnek nevezzük. A spinortér vektorai tehát spinorok, tenzorai spintenzorok, bázisai spinbázisok.

*Egy spinor*t *páros*nak *vagy páratlan*nak nevezünk aszerint, hogy csak páros, illetve csak páratlan $k$-vektorokból áll-e. A páros vagy páratlan spinorokat félspinoroknak is nevezzük. Amint a (2)-ből látszik, bármely spinor egy páros és egy páratlan spinor direkt összegeként írható fel.

A $V_n$ vektortérben definiált $C_n$ spinoralgebrának a következő fontos tulajdonságai vannak:

1. A páros félspinorok egy, a $C_{n-1}$ algebrával izomorf részalgebrát alkotnak.

2. Ha $n$ páratlan szám, akkor $C_n$ felírható mint két, a $C_{n-1}$ algebrával izomorf részalgebra direkt összege.

3. Legyen $C$ a $C_n$ algebra centruma. Ha $n = 2h$, akkor $C$ egybeesik az alaptesttel, ha pedig $n = 2h+1$, akkor a következő alakú elemeket tartalmazza:

$$\gamma = \gamma^0 + \gamma^{12 \ldots n} \underset{(n)}{\mathbf{e}}_{12 \ldots n}. \tag{5}$$

A tétel bizonyítására tekintsük a következő lineáris transzformációkat: $f_k(\varphi) = \frac{1}{2}[\varphi + e_k \varphi e_k]$, $(k=1, 2, \ldots, n)$, ahol a szorzatok spinorszorzatok. Már most könnyen beláthatjuk, hogy egy $\varphi \in C_n$ spinor akkor és csak akkor tartozik a centrumhoz, ha invariáns ezekkel a transzformációkkal szemben. A centrum összes elemeit tehát úgy kaphatjuk meg, hogy meghatározzuk az összes olyan spinorokat, amelyek invariánsak az $f_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ transzformációkkal szemben, vagy pedig egyszerűen az $f=f_n f_{n-1} \ldots f_2 f_1$ lineáris transzformációval szemben. A probléma még egyszerűsíthető, ugyanis elegendő meghatározni az $f$-fel szembeni invariáns bázis $k$-vektorokat, mert ezeknek a lineáris kombinációi meg fogják adni a centrum összes elemeit. Hogy a kívánt tételt megkapjuk, már csak azt kell bebizonyítani, hogy az $n = 2h+1$ esetben pedig csak 1 és $\underset{(n)}{e}_{12\ldots n}$ invariáns $f$-fel szemben. Ezen bizonyítás folyamán a következő eredményeket kapjuk:

$$\text{ha } n=2h, \text{ akkor } f(1)=1 \text{ és minden } f(\underset{(k)}{e}_{i_1 i_2 \ldots i_k})=0;$$

$$\text{ha } n = 2h+1, \text{ akkor } f(1) = 1, \ f(\underset{(n)}{e}_{12\ldots n}) = \underset{(n)}{e}_{12\ldots n}$$

és minden többi $f(e_{i_1 i_2 \ldots i_k})=0$. Ezek szerint bármely $\varphi \in C_n$ spinor esetében

$$f(\varphi) = \varphi^0, \text{ vagy } f(\varphi) = \varphi^0 + \varphi^{12\ldots n} \underset{(n)}{e}_{12\ldots n}, \tag{6}$$

aszerint, hogy $n$ páros vagy páratlan szám. Megjegyezzük, hogy bármely esetben feltételezhetjük, hogy $\varphi^0 \neq 0$, ha $\varphi \neq 0$.

Érdekes eredményt kapunk, ha a komplex test helyett a valós testet tekintjük a $C_n$ algebra alaptestének. Ekkor, $n = 2h+1$ esetben a centrum elemei testet alkotnak, ha $h$ páros szám, ugyanis direkt számítással ki lehet mutatni, hogy minden centrumelemnek van inverze.

4. Ami a spinoralgebrának az ideáljait illeti, ismét két esetet különböztetünk meg:

A) Ha $n=2h$, akkor a spinoralgebrának nincsenek valódi ideáljai.

B) Az $n = 2h+1$ esettel bővebben kívánunk foglalkozni. Tekintsük ebben az esetben az

$$\omega = \frac{1}{2}[1 + K \underset{(n)}{e}_{12\ldots n}] \quad \text{és} \quad \omega' = \frac{1}{2}[1 - K \underset{(n)}{e}_{12\ldots n}]$$

spinorokat, ahol $K = \pm i^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Könnyen kimutathatjuk, hogy $\omega + \omega' = 1$, $\omega\omega'=0$, $\omega^2=\omega$, $\omega'^2=\omega'$ és hogy a 3. pont értelmében $\omega$ és $\omega'$ centrumelemek. Hogy a $C_n$ összes valódi ideáljait meghatározhassuk, a következőképpen járunk el:

a) Kimutatjuk, hogy a centrumban csak az $\{\alpha\,\omega\}$ és $\{\alpha'\,\omega'\}$ alakú részsokaságok képeznek valódi ideált, ahol $\alpha$ és $\alpha'$ tetszés szerinti komplex számok. Tudjuk, hogy a centrum elemei (5) alakúak és hogy $\omega, \omega' \in C$. $\omega$ és $\omega'$ lineárisan függetlenek lévén, a centrumnak egy bázisát alkotják, tehát bármely $\gamma \in C$ így írható: $\gamma = \alpha\omega + \alpha'\omega'$. Most már csak azt kell kimutatni, hogy az $\omega$, illetve $\omega'$ által generált részsokaságok ideált alkotnak. Tekintsük tehát két $\alpha\omega$ alakú spinor összegét:

$$\beta\omega + \beta_1\omega = (\beta+\beta_1)\omega \in \{\alpha\omega\}$$

és legyen tetszés szerinti $\gamma \in C$, akkor

$$\gamma(\beta\omega) = (\alpha\omega + \alpha'\omega')(\beta\omega) = (\alpha\beta)\omega \in \{\alpha\omega\}.$$

b) A centrum és egy valódi ideál, $I$, metszete valódi ideál a centrumban. Valóban, ez a metszet nem üres, mert ha $\varphi \in I$, akkor egyrészt $f_k(\varphi) \in I$, tehát $f(\varphi) \in I$ is; másrészt $f(\varphi)$ a (6) alapján centrumelem, következik, hogy $f(\varphi) \in I \cap C$. Legyen most $\psi \in I \cap C$ és $\gamma \in C$, egyébként tetszőleges. Ekkor $\psi \in C$ és $\psi\gamma = \gamma\psi$ eleme $I$-nek is és $C$-nek is, tehát $\psi\gamma = \gamma\psi \in I \cap C$, ami azt jelenti, hogy az $I \cap C$ metszet valódi ideál $C$-ben.

Állításunkból következik, hogy $I \cap C$ nem lehet más, csak egyike az $\{\alpha\omega\}$ vagy $\{\alpha'\omega'\}$ ideáloknak. Ebből következik, hogy $I$ tartalmazza $\omega$-át vagy $\omega'$-et, vagy esetleg mind a kettőt.

c) Ha $C_n$ algebrának egy valódi ideálja, $I$, tartalmazza például $\omega$-át, és létezik legalább egy spinor $\psi \in I$ úgy, hogy $\psi\omega' \neq 0$, akkor a spinoralgebrának nincsenek valódi ideáljai. Azt kell tehát kimutatnunk, hogy a fenti $I$ nem valódi ideál. A $\varphi = \psi\omega'$ spinor $I$ eleme, ekkor azonban $f(\varphi) \in I$ is, továbbá

$$f_k(\psi\omega') = \frac{1}{2}[\psi\omega' + \mathbf{e}_k\psi\omega'\mathbf{e}_k] = f_k(\psi)\omega',$$

tehát $f(\varphi) = f(\psi\omega') = f(\psi)\omega'$ és ez is $I$ eleme. Tudjuk, hogy $f(\varphi)$ és $f(\psi)$ (6) alakúak, ami azt jelenti, hogy centrumelemek is. Már most ezen elemek az $\omega$ és $\omega'$ bázisvektorok segítségével a következőképpen írhatók:

$f(\varphi) = \alpha_1\omega + \alpha_1'\omega'$ és $f(\psi) = \beta_1\omega + \beta_1'\omega'$. Azonban $f(\varphi) = f(\psi)\omega' = \beta_1'\omega'$, azaz $f(\varphi)$ az $\{\alpha'\omega'\}$ centrumideál eleme, tehát $f(\varphi) \in I \cap C$. Ha most a $\beta_1' = 1$ esetet tekintjük, akkor $f(\varphi) = \omega'$ és $\omega' \in I \cap C$, tehát $\omega' \in I$. Ezek szerint $I$ tartalmazza az $\{\alpha\omega\}$ és az $\{\alpha'\omega'\}$ centrumideálokat, tehát magát a centrumot is: $C \subseteq I$ és akkor $I \cap C = C$. De $1 \in C$ és akkor $1 \in I$, ami azt jelenti, hogy $I$ nem valódi ideál.

d) Ha $C_n$ algebrának egy valódi ideálja, $I$, tartalmazza $\omega$-át és $I$ minden $\psi$ eleme esetében $\psi\omega' = 0$, akkor a $C_n$ algebrának a $\{\chi\omega\}(\forall\chi \in C_n)$ részsokaság valódi ideálja. Könnyen beláthatjuk, hogy a $\psi\omega' = 0$ feltételt teljesítik az összes $\psi = \chi\omega$ alakú spinorok. Fordítva, ha $\psi\omega' = 0$, akkor kimutatjuk, hogy $\psi = \chi\omega$. Tudjuk, hogy bármely spinor $\psi \in C_n$ $(n = 2h+1)$.

$$\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} = \psi_1'\omega + \psi_2'\omega' \tag{7}$$

alakban írható, ahol $\psi_1'$ és $\psi_2'$ páros félspinorok. (Lásd 2. pont és [5]). Ekkor azonban $\psi\omega' = \psi_2'\omega'$ és ez csak akkor lehet zéró, ha $\psi_2' = 0$, tehát $\psi = \psi_1'\omega$. Feltételeztük továbbá, hogy $\omega \in I$, akkor azonban minden $\psi = \chi\omega \in I$, ami azt jelenti, hogy $\{\chi\omega\} \subseteq I$. A feltételeinkből következik, hogy $I \subseteq \{\chi\omega\}$, tehát $I = \{\chi\omega\}$, ahol $\chi$ tetszőleges spinor $C_n$-ből.

Meg kell jegyeznünk, hogy ha $\omega' \in I$, akkor a $\{\chi\omega'\}$ $(\forall\chi \in C_n)$ részsokaság valódi ideált alkot, ha pedig $\omega, \omega' \in I$, akkor $\{\chi\omega\}$ és $\{\chi\omega'\}$ is valódi ideálok.

5. $n = 2h$ esetében $C_n$ izomorf egy $2^h$ dimenziós mátrixalgebrával, $M_{2^h}$-nal, mely az $S_{2^h}$ spinortér lineáris transzformációnak algebráját reprezentálja egy adott bázis esetén. Ez az izomorfizmus egyértelműen meg van határozva.

6. $n = 2h+1$ esetében $C_n$ omomorf ugyanazon mátrixalgebrával.

Az 5. és 6. pontokban megjelenő $2^h$ dimenziós spinortér, $S_{2^h}$, *az n dimenziós $V_n$ vektortérhez rendelt spinortér* nevet viseli. Ez a spinortér fontos szerepet játszik az alkalmazásokban.

7a) $n=2h$ esetében egy tetszőleges $\varphi$ spinor $C_n$-ből akkor és csakis akkor invertálható, ha az $M_{2^h}$ algebrából neki megfelelő mátrix invetárlható.

7b) $n = 2h+1$ esetében egy tetszőleges $\varphi$ spinor akkor invertálható, ha a $\varphi^{(1)}$ és $\varphi^{(2)}$ (lásd [7]) spinorok invertálhatók.

Tudjuk, hogy a $C_n$ algebra invertálható elemeinek sokasága multiplikatív csoportot alkot. Ezt a csoportot $G_s$-sel jelöljük és *teljes spinorcsoport*nak nevezzük.

**III.** Vessünk most egy pillantást RASEVSZKI gondolatmenetére, melyet a spinortér bevezetésekor követett. Legyen $V_n$ egy komplex vektortér. RASEVSZKI agregátnak nevez egy 0-vektorból, 1-vektorból, 2-vektorból, ..., $n$-vektorból álló rendszert. Az összeadás, operátorszorzat és szorzás bevezetése után kimutatja, hogy az agregátok $2^n$ dimenziós lineáris algebrát alkotnak. Azután az 5. és 6. pontokban foglaltakhoz hasonlóan, bebizonyítja, hogy az agregátok algebrája $n=2h$ esetben izomorf és $n = 2h+1$ esetben omomorf az $S_{2^h}$, $2^h$ dimenziós vektortér lineáris transzformációinak algebrájával; egy adott bázis esetén pedig a megfelelő mátrixalgebrával. Az $S_{2^h}$ vektorteret a $h$ dimenziós vektortér, $V_h$, agregátjainak algebrájából kapja, nem véve figyelembe a szorzás műveletét. Ezután az $S_{2^h}$ vektorteret (a $V_n$-hez rendelt) spinortérnek nevezi el; vektorait spinoroknak, tenzorait spintenzoroknak, bázisait spinbázisoknak nevezvén. Tehát szerinte spinorok a $V_h$ vektortérben definiált agregátok, ugyanis ezek alkotják az $S_{2^h}$ vektorteret.

Ezek szerint, egyrészt, a $V_n$ vektortérben definiált agregátok is spinorok, ők alkotják az $S_{2^n}$ spinorteret, másrészt, $S_{2^n}$ nem más, mint a $V_{2^n}$ és $V_{2^{n+1}}$ vektorterekhez rendelt spinortér. Végeredményben tehát RASEVSZKI agregátjai spinorok. Az agregát fogalom bevezetése csak nehézkessé teszi a spinorok algebrai szempontból való tárgyalását. Ezért dolgozatainkban igyekeztünk az agregát bevezetése nélkül definiálni a spinoralgebrát.

Meg kívánjuk jegyezni, hogy RASEVSZKI az 1, 2, 4A, 5 és 6 pontokban foglalt tulajdonságokat az agregátokra mondja ki és bizonyítja be.

**IV.** Tekintsünk most egy pszeudo-euklideszi vektorteret, $V_n^{(s)}$-et, ahol $s$ a negatív négyzetek száma a következő kifejezésben:

$$(\mathbf{x})^2 = -(x^1)^2-(x^2)^2-\ldots-(x^s)^2+(x^{s+1})^2+\ldots+(x^n)^2.$$

Itt az $\mathbf{x}$ vektor $x^i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ komponensei valós számok, tehát az alaptest valós számtest. Ha $s=0$, nincsen egy negatív négyzet sem és a valós euklideszi vektorteret kapjuk.

Legyen most $\mathbf{e}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ egy bázis a $V_n$ komplex vektortérben. Az $i\mathbf{e}_1$, $i\mathbf{e}_2, \ldots, i\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_{s+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ vektorok szintén bázist alkotnak. Ha most az összes olyan vektorokat tekintjük, melyeknek komponensei valósak ebben a második bázisban, akkor megkapjuk a $V_n^{(s)}$ pseudo-euklideszi valós, vagy valós vektorteret a $V_n$ komplex vektortérbe ágyazva.

Ekkor a $V_n^{(s)}$-ben levő spinoralgebra, $C_n^{(s)}$ valós részalgebrája $C_n$-nek.

Még csak annyit kívánunk megjegyezni, hogy $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$, $V_5$, valamint a megfelelő pszeudo-euklideszi valós, vagy valós vektorterek esetében az adott definíciók és tételek alapján megkapjuk az összes ismert algebrai, geometriai és főleg fizikai eredményeket. Ezen állítás illusztrálása céljából legyen például a $V_1^{(1)}$ pszeudoeuklideszi vektortérben definiált $C_1^{(1)}$ spinoralgebra, ennek elemei egybeesnek a komplex számokkal; a $V_2$-ben levő $C_2$ spinorai nem mások, mint a komplex quaterniónok, a $V_2^{(0)}$ valós euklideszi vektortérbeli $C_2^{(0)}$ spinorai pedig a valós quaterniónok. A $C_2$ spinoralgebrával izomorf mátrixalgebra egyik generátorrendszere a *Pauli*-féle mátrixokból áll. Ha most áttérünk a $V_4$ vektortérre, észrevesszük, hogy $C_4$ $2^4=16$ dimenziós. A $C_4$-gyel izomorf mátrixalgebra egyik generátorrendszere pedig nem más, mint a fizikában $\gamma_i$-vel jelölt *Dirac*-mátrixok. Hogy ezeket az állításokat kimutassuk, csak egyszerű bázistranszformációkat kell elvégeznünk.

## IRODALOM

[1] BRAUER, R.—WEYL, H.: Spinors in *n* dimensions. *Amer. Journ. Math.* **57** (1935) 425—449.
[2] CARTAN, É.: Les groupes projectifs qui ne laissent invariant aucune multiplicité plane. *Bull. Soc. Math. de France,* **41** (1913) 53—96.
[3] CARTAN, É.: *Leçons sur la théorie des spineurs.* I, II. k, 1938.
[4] CHEVALLEY, Cl. C.: *The algebraic theory of spinors,* 1954.
[5] RASEVSZKI, P. K.: Teoria spinorov. *UMN.* **10,** 2 (64) 1955.
[6] RIESZ, M.: *Clifford numbers and spinors* (Ch. I—IV). Lectures delivered Oct. 1957—Jan. 1958, Lectures delivered Oct 1957—Jan. 1958, Lectures S, № 38. The Inst. for Fluid Dyn. and Appl. Math. Univ. of Maryland.
[7] SCHOUTEN, J. A.: On the geometry of spin spaces. *Indag. Math.* **11,** 3, 4, 5 (1949).
[8] Van der WAERDEN, B. L.: Spinoranalyse. *Gött. Nachr.* **100** (1929)
[9] VESCAN, A.: Contribuţiuni la generalizarea noţiunii de spinor. *Anal. şt. Univ. Iaşi, S. Ia. Mat.* T. IV, 1960, f. 3.
[10] VESCAN, A.: *Contribuţiuni la precizarea şi generalizarea notiunii de spinor.* Doktori értekezés, Iaşi, 1963.
[11] VESCAN, A.: Algebra spinorilor. *Anal. şt. Univ. Iaşi, S. Ia. Mat,* T. X, 1964, f. 2.
[12] VESCAN, A.: Contribuţiuni la studiul proprietăţilor algebrice ale spinorilor. *Anal, şt. Univ. Iaşi, S. Ia. Mat,* T.XI, f, 1, 1965.
[13] VESCAN, A.: Noi proprietăţi ale algebrei spinorilor. *Anal. şt. Univ. Iaşi, S. Ia. Mat,* T. XII, f. 1, 1966.

(Beérkezett: 1971. IX. 20.)

# STEINFELD OTTÓ EGY GYŰRŰELMÉLETI EREDMÉNYÉNEK MODULUSELMÉLETI ANALOGONJA

Írta: SZÁSZ FERENC

Legyen $I$ ideál az $A$ gyűrűben és $P$ prímideál az $I$ gyűrűben. Ekkor, miként STEINFELD OTTÓ ([7], Theorem 1) igazolta azt,

$$(P:I) = [a;\ a\in A,\ Ia+aI \subseteqq P]$$

prímideál lesz az $A$ gyűrűben.

Ebben a dolgozatban definiáljuk gyűrűk általános *Amitsur—Kuroš*-radikáljai [2] segítségével egy $A$ gyűrű felett vett $M$ $A$-jobbmodulus $N$ $A$-részmodulusának az általános radikálját, amely az $A$ gyűrűnek lesz egy ideálja. Megállapítjuk e radikál több tulajdonságát, pl. az 5. Tétel annak a kritériumát adja meg, hogy ez a radikál prímideál legyen. A dolgozat legfőbb célja, miként a dolgozat címe is mutatja, STEINFELD OTTÓ [7] fent említett eredményének modulushányadosokra és erre a részmodulus-radikálra való módosítása, amit a 8. Tételben mondunk ki.

STEINFELD OTTÓ [8], gyűrűk ideálhálója helyett, általánosabb hálószerűen rendezett félcsoportokban is vizsgálta az $X\to(x:y)$ leképezés több tulajdonságát, ahol $(x:y)$ a részben rendezett félcsoport jobbreziduuma. Tehát fennáll a logikai ekvivalencia definíció szerint:

$$z\leqq(x:y) \Leftrightarrow yz\leqq x\,.$$

Jól ismert, hogy a jobbreziduumok legfőbb tulajdonságait G. BIRKHOFF [1] monográfiája foglalta össze. Ehhez későbbi könyvek közül lásd pl. L. FUCHS [4] műve 189—191 oldalait.

Ismeretes, hogy egy hálószerűen rendezett grupoid két $(x_1:y_1)$ és $(x_2:y_2)$ jobbreziduumának háló-egyesítése nem feltétlen lesz újra jobbreziduum, tehát általában nem lesz $(x_3:y_3)$ alakú. Ezt a kérdést szerző [9] dolgozata vizsgálja, elegendő feltételt megadva.

Ugyancsak L. FUCHS ([4] pp. 195—208.) foglalja össze a $\Phi$-primer és $\Phi$-tercier radikálra vonatkozó definíciókat és legfőbb eredményeket, amelyek egy része L. LESIEUR és R. CROISOT [5] és J. A. RILEY [6] munkáiban korábban tárgyalva voltak. A felhasznált *Abel*-csoportos eredményekre nézve L. FUCHS [3] monográfiájára, gyűrűk radikálelméleti fogalmaira nézve pedig N. DIVINSKY [2] kiváló bevezető könyvére és a szerző [10] monográfiájára utalunk.

Megjegyezzük, hogy szerző jelen dolgozatának bizonyítási módszerei olykor részben hasonlítanak J. A. RILEY [6] módszereihez, de e dolgozat általánosabb eredményeket tartalmaz, és eredményei újak.

A továbbiakban pontosan definiáljuk egy $N$ $A$-részmodulus gyűrűbeli általános radikálját.

Legyen $A$ tetszőleges asszociatív gyűrű, $M$ egy $A$-jobbmodulus, $N$ az $M$ egy $A$-részmodulusa és $R$ gyűrűknek *Amitsur—Kuroš* radikál tulajdonsága.

$M$-nek az $L_1$ és $L_2$ részmodulusaira legyen definíció szerint $L_1 : L_2 = [a;\ a \in A,\ L_2 a \subseteqq L_1]$. Világos, hogy ez kétoldali ideál $A$-ban és maximális azon $K$ ideálok közt, amelyekre $L_2 K \subseteqq L_1$. Tehát $L_2(L_1 : L_2) \subseteqq L_1$ és fennáll a logikai ekvivalencia:

$$L_2 K \subseteqq L_1 \Leftrightarrow K \subseteqq L_1 : L_2 .$$

Mármost $A$-nak az a maximális $R(N)$ részhalmaza, amelyre

$$R(N)/(N : M) = R(A/(N : M))$$

teljesül, lesz $N$-nek az $R$-radikálja $A$-ban. Nyilván $R(N) \supseteqq (N : M)$, és $R(N)$ tényleg ideál a második izomorfia-tétel szerint.

Ha $(N : M) = R(A)$, akkor világos, hogy fennáll: $R(A) = R(N)$. Továbbá, ha $J$ a *Jacobson*-radikál, és ha $N = \Phi(M)$ az $M$ *Frattini*-részmodulusa, akkor $J(N) \supseteqq J(A)$ teljesül, mert ekkor $(N : M) \supseteqq J(A)$ érvényes.

Azt mondjuk, hogy az $N$ részmodulus $R$-primér $M$-ben, ha $A$ minden $I$ ideáljára $m \in M$, $m \notin N$ és

$$mI \subseteqq N$$

esetén $I \subseteqq R(N)$, ahol $R$ egy Amitsur—Kuroš-radikál.

1. ÁLLÍTÁS. *$N$ akkor és csakis akkor $R$-primer részmodulus $M$-ben, ha $M$ minden $K$ $A$-részmodulusára $Ka \subseteqq N$, ahol $a \in A$, és $K \nsubseteq N$ esetén következik $a \in R(N)$.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $N$ egy $R$-primer $A$-jobbmodulus $M$-ben, és legyen $k \in K$, $k \notin N$. Ekkor

$$k(Aa) = (kA)a \subseteqq kA \subseteqq N,$$

ahonnan, ha $(a)$ jelenti az $a$-val $A$-ban generált kétoldali főideált, definíció szerint $k(a) \subseteqq N$ adódik, és így

$$(a) \subseteqq R(N), \quad \text{tehát} \quad a \in R(N).$$

Fordítva, ha teljesülnek az 1. Állításban említett feltételek, akkor így bizonyítható az, hogy $N$ $R$-primér. Legyen $K = mA$ és $K \nsubseteq N$. Ekkor, minthogy

$$K \cdot I = (mA)I \subseteqq mI \subseteqq N,$$

ezért $Ka \subseteqq N$ minden $a \in I$ elemre; tehát $a \in R(N)$ és így $I \subseteqq R(N)$.

2. ÁLLÍTÁS. *Legyen $R(A/I)$ nilpotens az $A$ minden $I$ ideáljára, továbbá $N$ egy $R$-primér részmodulus $M$-ben. Ekkor $P = R(N)$ prímideál $A$-ban.*

*Bizonyítás.* Legyen $I_1$ és $I_2$ két olyan ideál $A$-ban, hogy $I_1 . I_2 \subseteqq P$, de $I_1 \nsubseteq P$. Ekkor feltételeink és a definíció miatt van olyan $e$ kitevő, hogy $M(I_1 I_2)^e \subseteqq N$ de $M(I_1 I_2)^{e-1} \nsubseteq N$. Legyen most $K = M(I_1 I_2)^{e-1}$ és $k_1 \in K$, de $k_1 \notin N$, ekkor

$$(k_1 I_1) I_2 = k_1 (I_1 I_2) \subseteqq N$$

és minthogy $I_1 \nsubseteq P$ miatt $k_1 I_1 \nsubseteq N$, ezért, ha $k_2 \in k_1 I_1$ de $k_2 \notin N$, nyilván $k_2 I_2 \subseteqq N$. Tehát $k_2 \notin N$ miatt $I_2 \subseteqq P = R(N)$, tehát $P$ tényleg prímideál.

3. ÁLLÍTÁS. *Legyen speciálisan $R$ a Baer—Koethe-féle felső nilradikál és legyen $A$ jobb-Noether-féle, vagy jobb-Artin-féle gyűrű, továbbá $N$ egy $R$-primer részmodulus $M$-ben. Ekkor $R(N)$ prímideál $A$-ban.*

4. MEGJEGYZÉS. Minthogy nincs feltételünk az $A$ egységelemének a létezéséről vagy $A^+$-ban $C(p^\infty)$ alcsoportok hiányáról (L. FUCHS [3]), az $A$ jobb-*Artin*-féleségéből nem folyik $A$ jobb-*Noether*-félesége.

*Bizonyítás* a 3. Állításra. $R(A/I)$ mind a jobb-*Noether*-féle esetben nilpotens lesz J. LEVITZKI [2] tétele miatt, mind pedig a jobb-*Artin*-féle esetben nilpotens lesz Ch. HOPKINS [2] tétele miatt, és elég alkalmazni ezekre az esetekre az előbbi 2. Állítást.

Legyen $N$ $P$-primér, ha $P=R(N)$ prímideál $A$-ban.

5. TÉTEL. *Legyen $R$ olyan radikál és $A$ olyan gyűrű, hogy $R(A/I)$ az $A$ adott gyűrű minden $I$ ideáljára nilpotens ideál. Az, hogy $P$ prímideál az $A$ gyűrűben, és hogy $N$ pedig $P$-primer részmodulus legyen $A$-ban, ekvivalens az alábbi három feltétel egyidejű fennállásával:*

(1) *Az $A$ minden $I$ ideáljára és minden $m\in M$ elemre $mI\subseteqq N$ és $m\notin N$ esetén $I\subseteqq P$ teljesül,*

(2) $(N:M)\subseteqq P$,

(3) *Minden $X\in P$ elemhez van olyan $e$ kitevő, hogy*

$$M.(x)^e\subseteqq N.$$

*Bizonyítás.* Ha $N$ egy $P$-primér ideál, akkor (1) és (2) a definícióból közvetlenül következnek. Megmutatjuk, hogy (3) is teljesül. Ha ugyanis $\chi\in P$, akkor az $A/I$ $R$-radikáljára tett nilpotencia-feltételek alapján $(x)\subseteqq P$, tehát $M(x)^e\subseteqq N$ alkalmas $e$ kitevővel.

Megfordítva, tegyük fel, hogy (1), (2) és (3) teljesülnek, és megmutatjuk a következő módon azt, hogy $P$ prímideál $A$-ban, és hogy az $N$ részmodulus $P$-primer $M$-ben, és hogy élesebben $P=R(N)$ is teljesül. Látható, hogy e harmadik állításból az első kettő is következik.

Legyen $\chi\in P$ tetszőleges elem. Ekkor (3) alapján $M(x)^e\subseteqq N$ teljesül az $(x)$ főideálra alkalmas $e$ kitevővel. Legyen $Q$ tetszőleges olyan prímideál $A$-ban, amelyre fennáll $(N:M)\subseteqq Q$. Ekkor $(x)^e\subseteqq Q$ és $\bigcap_\alpha Q_\alpha=R(N)$ miatt $x\in R(N)$, ahonnan tényleg: $P\subseteqq R(N)$ adódik.

Ha most $y\in R(N)$ tetszőleges elem, akkor van, az $R(A/I)$ nilpotenciáját feltételezve, olyan $e$ kitevő, hogy $M(y)^e\subseteqq N$, de $M(y)^{e-1}\nsubseteqq N$. Ha itt $e=1$ volna, akkor $(y)\subseteqq(N:M)$, ahonnan (2) feltételünk alapján $y\in P$, és $y$ tetszőlegessége miatt ez esetben tényleg $R(N)\subseteqq P$ következik. Ha pedig $e\geqq 2$, legyen $K=M(y)^{e-1}$, és $k\in K$ tetszőleges olyan elem, amelyre $k\notin N$. Minthogy

$$k(y)\subseteqq M(y)^e\subseteqq N,$$

ezért (1) feltételünk alapján $(y)\subseteqq P$, tehát $y\in P$, és szintén $y$ tetszőleges megválasztása miatt $R(N)\subseteqq P$. Megfordítva pedig, $P\subseteqq R(N)$ triviális reláció, amivel a tételt bebizonyítottuk.

6. ÁLLÍTÁS. *Legyen $R$ a Baer—Koethe-féle felső nilradikál és legyen $A$ vagy jobb-Noether-féle gyűrű, vagy jobb-Artin-féle gyűrű. Ekkor az 5. Tételben szereplő* (1), (2) *és* (3) *feltételek egyidejű fennállása szükséges és elégséges ahhoz, hogy $P=R(N)$ prímideál legyen az $A$ gyűrűben, $N$ pedig $P$-primér részmodulus legyen $M$-ben.*

Az állítás *bizonyítása* az előző 5. Tétel, továbbá J. LEVITZKI [2] és CH. HOPKINS [2] tételei alapján, amelyek a nilradikál nilpotenciáját mondják ki, nyilvánvaló.

7. ÁLLÍTÁS. *Legyen $P$ tetszőleges az $A$ gyűrűben, amelyben $R(A/I)$ nilpotens minden $I$ ideálra. Véges sok tetszőleges $P$-primér $N_1, N_2, \ldots, N_k$ $A$-részmodulusnak az $N=N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k$ metszete szintén $P$-primér $A$-részmodulus bármely $M$ $A$-jobbmodulusban.*

*Bizonyítás.* Az $N$ $A$-részmodulusra és a $P$ prímideálra az 5. Tételt fogjuk alkalmazni. Minthogy $N_i \supseteq N$, ezért minden $i$-re $(i=1, 2, \ldots, k)$ az 5. Tétel (2) feltétele alapján:

$$(N: M) \subseteq (N_i: M) \subseteq P$$

teljesül. Továbbá a (3) feltétel alapján vannak olyan $e_i$ kitevők, amelyekre $x \in P$ esetén

$$M(x)^{e_i} \subseteq N_i$$

teljesül. Legyen $e=\max(e_1, e_2, \ldots, e_k)$. Ekkor

$$M(x)^e \subseteq N.$$

Ha most az $A$-gyűrűből egy tetszőleges $I$ ideállal $mI \subseteq N$ és $m \notin N$ teljesül, ahol $m \in M$, akkor van olyan $i$ index, hogy $m \notin N_i$, amiből $mI \subseteq N_i$ miatt $I \subseteq (RN) = P$ következik.

8. TÉTEL. *Legyen $R$ olyan radikális, hogy az $A$ gyűrű minden $I$ ideáljára $R(A/I)$ nilpotens, legyen $P$ tetszőleges prímideál $A$-ban, $N$ tetszőleges $P$-primer részmodulus az $M$ $A$-jobbmodulusban, valamint $I$ legyen $A$ tetszőleges olyan ideálja, hogy $I \subsetneqq P = R(N)$. Legyen továbbá:*

$$N^* = [m; m \in M, mI \subseteq N].$$

*Ekkor $N^*$ olyan $A$-részmodulus $M$-ben, amely szintén $P$-primér.*

*Bizonyítás.* Az előbbi 5. Tételt a $P$ prímideálra és az $N^*$ részmodulusra fogjuk alkalmazni.

Ha $a \in A \cap (N^*: M)$ tetszőleges elem, akkor $Ma \subseteq N^*$ tehát definíció szerint:

$$MaI \subseteq N.$$

Ekkor az $I \subsetneqq P = R(N)$ feltétel miatt $Ma \subseteq N$, mert ha $K = Ma$ és $K \nsubseteq N$ volna, akkor $k \in K$ esetén $kI \subseteq N$ miatt $k \notin N$ és így az $I \subseteq P$ ellentmondás következnék. Ezért valóban $a \in (N: M) \subseteq P$, és így az 5. Tételben szereplő (2) feltételt igazoltuk, mert $(N^*: M) \subseteq P$ is teljesül.

Legyen most $B$ olyan ideál $A$-ban, hogy $m \in M$, $m \notin N^*$, de $mB \subseteq N^*$ teljesüljenek. Ekkor definíció szerint

$$mBI \subseteq N$$

adódik, minthogy pedig nyilván $N \subseteq N^*$, ezért $m \notin N$. Ennélfogva, $J \subsetneqq P = R(N)$ alapján az 5. Tételbeli (1) feltétel szerint $B \subseteq P$ adódik, ugyanis $BI \subseteq P$ és $P$ prímideál.

Legyen végül $x \in P = R(N)$ tetszőleges elem. Ekkor $M(x)^e \subseteqq N$ teljesül alkalmas $e$ kitevővel, az 5. Tétel (3) feltétele szerint. Minthogy azonban $N \subseteqq N^*$, ezért egyszersmind

$$M(x)^e \subseteqq N^*$$

is adódik, ami $N^*$-ra éppen az 5. Tétel (3) feltétele.

Ezzel a 8. Tételt bebizonyítottuk.

## IRODALOMJEGYZÉK


[1] G. BIRKHOFF: *Lattice Theory,* Providence, 1948.
[2] N. DIVINSKY: *Rings and Radicals,* London, 1965.
[3] L. FUCHS: *Abelian Groups,* Budapest, Akadémiai Kiadó, 1958.
[4] L. FUCHS: *Partially Ordered Algebraic Systems,* Oxford—London—New York—Paris, 1963.
[5] L. LESIEUR-R. CROISOT: *Algèbre noetherienne noncommutative,* Gauthier-Villars, Paris, 1963.
[6] J. A. RILEY: Axiomatic primary and tertiary decomposition theory, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **105** (1962) 177—201.
[7] O. STEINFELD: On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **4** (1953) 289—298.
[8] O. STEINFELD: On residuals in partially ordered semigroups, *Publ. Math. Debrecen,* **12** (1965) 107—116.
[9] F. SZÁSZ: On right-residuals in lattice-ordered groupoids, *Math. Nachrichten* (megjelenés alatt).
[10] F. SZÁSZ, *Radikale der Ringe,* Budapest, Akadémiai Kiadó (megjelenés alatt).


(Beérkezett: 1972. III. 20.)

## DIE MODULTHEORETISCHE MODIFIKATION EINES RINGTHEORETISCHEN RESULTATES VON OTTÓ STEINFELD

von

F. SZÁSZ

### Zusammenfassung

Verfasser definiert das allgemeine Radikal eines $A$-Untermoduls $N$ eines $A$-Rechtsmoduls $M$ über einem Ring $A$ mit der Hilfe der allgemeinen *Amitsur-Kuros*schen Radikale der Ringe. Dieses Radikal der Untermoduln liegt im Operatorrings. $A$. Verfasser bestätigt einige Eigenschaften dieses Radikals, so z. B. ein Kriterium dafür, daß dieses Radikal ein Primideal ist. Das Hauptresultat der Arbeit ist Satz 8, der die im Titel der Arbeit erwähnte Modifikation auf Modulquotienten realisiert.

# AZ EKVIDISZTÁNS CSOMÓPONTOKON ALAPULÓ TRIGONOMETRIKUS INTERPOLÁCIÓRÓL*

Írta: NÉVAI G. PÁL

## 1. § BEVEZETÉS

Legyen $f(x)$ egy $2\pi$ szerint periodikus függvény. Jelölje $S_n(x,f)$ azt a legfeljebb $n$-ed rendű ($n=0, 1, 2, \ldots$) trigonometrikus polinomot, amely az

$$(1.1)\qquad x_k \equiv x_{kn} = \frac{2k\pi}{2n+1} \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

alappontokban az $f(x_k)$ értékeket veszi fel. Jól ismert, hogy $S_n(x,f)$ felírható az

$$(1.2)\qquad S_n(x,f) = \sum_{k=-n}^{n} f(x_k) D_n(x-x_k)$$

alakban, ahol

$$(1.3)\qquad D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{(2n+1)\sin\frac{t}{2}}$$

az $n$-edik *Dirichlet*-féle magfüggvény[1].

A trigonometrikus *Fourier*-sorok elméletének fejlődésével párhuzamosan a trigonometrikus interpoláció — elsősorban az ekvidisztáns (1.1) csomópontokon alapuló — is felkeltette a kutatók figyelmét. Igen sok neves matematikus foglalkozott és foglalkozik a trigonometrikus interpolációval; köztük szép számmal találhatunk magyarokat (így pl. FEJÉR LIPÓT, RIESZ MARCELL, GRÜNWALD GÉZA, FELDHEIM ERVIN, SZEGŐ GÁBOR, PÓLYA GYÖRGY, KALMÁR LÁSZLÓ, TURÁN PÁL, ERDŐS PÁL, FREUD GÉZA, KIS OTTÓ, SZABADOS JÓZSEF, VÉRTESI PÉTER).

Az alapprobléma a következő. Milyen feltételekből következik a

$$\lim_{n\to\infty} [f(x)-S_n(x,f)] = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \max_{-\pi\le x\le\pi} |f(x)-S_n(x,f)| = 0$$

reláció? Ezenkívül, ha az $f(x)$ függvényről valami közelebbit tudunk, akkor mit mondhatunk az

$$|f(x)-S_n(x,f)|, \quad \max_{-\pi\le x\le\pi} |f(x)-S_n(x,f)|$$

kifejezések nagyságrendjéről? Találhatók-e továbbá aszimptotikus becslések, illetve egyenlőségek a

$$\sup_{f\in U} |f(x)-S_n(x,f)|, \quad \sup_{f\in U} \max_{-\pi\le x\le\pi} |f(x)-S_n(x,f)|$$

* A dolgozat megegyezik a szerző egyetemi doktori disszertációjával.

[1] Itt eltérünk az irodalomban szokásos jelöléstől, általában a $\frac{2n+1}{2}\cdot D_n(t)$ kifejezést nevezik *Dirichlet*-féle magfüggvénynek.

mennyiségekre, ahol $U$ a $2\pi$ szerint periodikus függvények valamilyen halmaza. Sok más nem kevésbé fontos kérdés is felmerül (divergencia, lineáris és nem lineáris szummációs eljárások, ekvikonvergencia stb.), ezekkel azonban ebben a dolgozatban nem foglalkozom.

Jelölje

$$(1.4)\qquad \Delta_h^R f(x)=\sum_{\nu=0}^{R}(-1)^{R-\nu}\binom{R}{\nu}f(x+\nu h)\qquad (R=0,1,2,\dots)$$

az $f$ függvénynek az $x$ pontbeli $h$ lépésközzel mért $R$-edik differenciáját. (A rövidség kedvéért a továbbiakban mindenütt $\Delta^R f(x)$-et, illetve $\Delta_h f(x)$-et fogunk írni $\Delta^R_{\frac{2\pi}{2n+1}} f(x)$, illetve $\Delta_h^1 f(x)$ helyett.)

A 2. §-ban be fogok bizonyítani két tételt, amelyek lényegében azt fejezik ki, hogy bizonyos feltételek mellett

$$|f(x)-S_n(x,f)|\approx 2^{-R}|S_n(x,\Delta^R f)|.$$

E két tétel (tulajdonképpen segédtétel) lehetőséget nyújt ahhoz, hogy a fentebb felsorolt problémákat új szemszögből vizsgáljuk.

1. Segítségükkel olyan tételek fogalmazhatók meg, amelyekből explicite kiderül, hogy annál jobb a konvergencia nagyságrendje egy adott pontban, minél közelebb van ez a pont valamelyik $x_k$ csomóponthoz (l. 3.2., 3.3., 4.1., 5.1. és 5.2. tételeket).

2. Sikerült a simasági modulusok terminológiájában kifejeznem a konvergencia sebességét (l. 3.4., 4.2., 4.3. és 5.3. tételeket).

3. Bizonyos $U$ halmazokra sikerült aszimptotikus egyenlőségeket (l. 3.3, 3.4., 4.1. és 4.2. tételeket), illetve aszimptotikusan pontos becsléseket (l. 5.1., 5.2. és 5.3. tételeket) találnom a $\sup\limits_{f\in U}|f(x)-S_n(x,f)|$ mennyiségre.

4. A 4.3. Tételben egy új konvergencia kritériumot bizonyítok be.

Közismert az analógia a *Fourier*-sorok és az ekvidisztáns csomópontokon alapuló trigonometrikus interpoláció között, így felvetődik a kérdés, hogy eredményeim közül mi vihető át a *Fourier*-sorok elméletébe, illetve melyik tételt előzte meg egy hasonló tétel a *Fourier*-sorok elméletében.

A 2.2. Tétel és a belőle következő 3.4., 4.2., 4.3., 5.3. tételek *Fourier*-részletösszegekre is lényegében igazak maradnak. A 2.2 és 5.3. tételek analógjával kapcsolatban l. NÉVAI G. P. [14]. A 3.4. Tétel analógját velem egyidőben, tőlem függetlenül és más módszerekkel bebizonyította V. V. ZSUK leningrádi matematikus is (még nem publikálta)*. A 4.3. Tételnek megfelelő tételt — ugyancsak más módszerrel — az $R=2$ esetre és nagyságrendi becslés nélkül bizonyította be F. I. HARSILADZE [6] és [7].

A 3.2. Tételnek a *Fourier*-sorok elméletében sokkal pontosabb megfelelője létezik (l. SZ. M. NYIKOLSZKIJ [17] és [18]). A 4.1. Tétel is előbb volt ismert a *Fourier*-részletösszegekre (l. V. G. KOMINAR [9]). Az 5.1. és 5.2. tételek analógja G. I. NATANSZON nevéhez fűződik (l. [10]).

Szeretném felhívni az Olvasó figyelmét arra, hogy a 3.2. Tételben szereplő konstansok nem pontosak, ha $r\geqq 1$, és pontos értékük csak az $\omega(f^{(r)};\delta)\equiv\delta$ esetre ismertek (l. SZ. M. NYIKOLSZKIJ [16], [18] és I. M. GANZBURG [5]).

* Időközben megtörtént a publikálás: *Известия ВУЗ-ов*. серия Математика, 8 (1972), 46-59.

A 4. § azon tételei, amelyekben pontos konstansok vannak, még akkor is új eredménynek számítanának, ha csak nagyságrendi becslést adtam volna. A 3.4. Tétel ellenben nem állított volna semmi újat, ha úgy fogalmaztam volna meg, hogy

$$|f(x)-S_n(x,f)| = O\left[\log n \cdot \omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\right],$$

hiszen ezt lényegében már LEBESGUE és kortársai is ismerték.

Dolgozatom eredményei a 4.2., 4.3. és 5.3. tételek kivételével a [11], [12] és [13] cikkeimben találhatók meg (a 2.1. Tételt [11]-ben csak az $R > r+1$ esetre bizonyítottam be, míg most a bizonyítás bizonyos módosításával az $R = r+1$ esetre is kimutatom).

E helyen szeretném megköszönni FREUD GÉZÁnak, KIS OTTÓnak, LEINDLER LÁSZLÓnak és G. I. NATANSZONnak (Leningrád) azt a sok ötletet, konzultációt és biztatást, amit tőlük dolgozataim megírásánál kaptam.

## 1.1. A simasági modulusokról

Egy az $(a, b)$ intervallumon folytonos és korlátos $f(x)$ függvény $k$-adrendű $(k=0, 1, 2, \ldots)$ simasági modulusán az

$$\omega_k(f; a, b; \delta) = \sup_{x,\, x+kh \in (a,b);\, |h| \leq \delta} |\Delta_h^K f(x)| \quad (\delta \geqq 0)$$

függvényt értjük. Az elsőrendű simasági modulust folytonossági modulusnak is szokás nevezni, és $\omega(f; a, b; \delta)$-val jelölni. Ha egyszerűen $\omega_k(f; \delta)$-t írunk, akkor ezen az $\omega_k(f; -\infty, \infty; \delta)$-t értjük.

Az alábbiakban igen sokszor fogjuk felhasználni a simasági modulusok különféle tulajdonságait. Ezeket a tulajdonságokat most felsoroljuk, a továbbiakban pedig külön hivatkozás nélkül fogjuk alkalmazni őket.

$$\omega_k(f; a, b; \delta_1) \leqq \omega_k(f; a, b; \delta_2) \quad (0 \leqq \delta_1 < \delta_2),$$

$$\omega_\nu(f; a, b; \delta) \leqq 2^{\nu-k} \omega_k(f; a, b; \delta) \quad (0 \leqq k < \nu),$$

$$\omega_k(f; a, b; \lambda\delta) \leqq (\lambda+1)^k \omega_k(f; a, b; \delta) \quad (\lambda > 0),$$

$$\alpha \cdot \omega(f; a, b; \delta) \leqq 2\omega(f; a, b; \alpha\delta) \quad (0 \leqq \alpha \leqq 1),$$

$$\frac{\omega_k(f; a, b; \delta_2)}{\delta_2^k} \leqq 2^k \frac{\omega_k(f; a, b; \delta_1)}{\delta_1^k} \quad (0 < \delta_1 < \delta_2).$$

Ha $f(x)$ $i$-szer $(i=0, 1, 2, \ldots)$ folytonosan differenciálható az $(a, b)$ intervallumon, akkor

$$\omega_{k+i}(f; a, b; \delta) \leqq \delta^i \omega_k(f^{(i)}; a, b; \delta)$$

és

$$\omega_i(g; a, b; \delta) \leqq \delta^i \omega(f^{(i)}; |\varepsilon|),$$

ahol $g(x) = f(x+\varepsilon) - f(x)$.

Ha egy $\omega(\delta)$ $(\delta \geqq 0)$ függvény önmagának a folytonossági modulusa, vagyis $\omega(\omega; \delta) = \omega(\delta)$, akkor ezt a függvényt majoránsnak fogjuk nevezni. Megjegyezzük, hogy minden függvény folytonossági modulusa majoráns.

$H_\omega$-val azoknak a $2\pi$ szerint periodikus folytonos függvényeknek az osztályát jelöljük, amelyeknek a folytonossági modulusa nem nagyobb, mint egy előre megadott $\omega(\delta)$ majoráns.

$W^{(r)}H_\omega$ azoknak az $r$-szer $(r=0, 1, 2, \ldots)$ folytonosan differenciálható $2\pi$ szerint periodikus függvényeknek az osztálya, amelyekre $f^{(r)} \in H_\omega (W^{(0)}H_\omega \equiv H_\omega)$.

Az ebben a pontban említettekkel kapcsolatban l. A. F. TYIMAN [22] (III. rész).

## 2. § FŐTÉTELEK

2.1. TÉTEL. *Legyen $f(x)$ $r$-szer $(r=0, 1, 2, \ldots)$ folytonosan differenciálható $2\pi$ szerint periodikus függvény, $R(>r)$ tetszőleges rögzített egész szám. Jelöljük $\alpha$-val az $x$ ponthoz legközelebb fekvő $x_k$ csomópont indexét (ha két ilyen csomópont van, akkor a kisebbik indexe.) Ha $n>R$, akkor*

$$S_n(x,f)-f(x) = \tag{2.1}$$

$$= 2^{-R} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq -R+\alpha}}^{n} \Delta^R f(x_k) D_r(x-x_{K+R}) + 0(1)\cdot n^{-r}\cdot \omega\left(f^{(r)}; \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right),$$

*ahol* $|0(1)|<K(r, R)$.[2]

2.2. TÉTEL. *Legyen $R$ tetszőleges rögzített nem-negatív egész szám. Ha $f(x)$ egy $2\pi$ szerint periodikus folytonos függvény, akkor*

$$S_n(x,f)-f(x) = (-2)^{-R}S_n(x, \Delta^R f)+0(1)\cdot\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right), \tag{2.2}$$

*ahol* $|0(1)|<K(R)$.

Hasonlítsuk össze a 2.1. és 2.2. tételeket. Ha olyan $x$ pontokban vizsgáljuk az $S_n(x,f)-f(x)$ különbséget, amelyekre $|\sin(n+\frac{1}{2})x|>e>0$ (pl. $x=0{,}5\cdot[x_k+x_{k+1}]$), akkor világos, hogy a 2.2. Tétel lényegesen többet állít a 2.1. Tételnél, hiszen

1) a 2.2. Tételben a priori csak az $f(x)$ függvény folytonosságát kötjük ki, míg a 2.1. Tételben a jó maradéktag biztosítása érdekében feltételeznünk kell megfelelő számú derivált létezését;

2) ha a vizsgált $f(x)$ függvény történetesen $r$-szer folytonosan differenciálható, és $R>r$, akkor a 2.2. Tétel $\omega_R(f; n^{-1})$ nagyságrendű maradéktagja nem nagyobb, mint $n^{-r}\omega_{R-r}(f^{(r)}; n^{-1})$, míg a 2.1. Tétel csak egy $n^{-r}\omega(f^{(r)}; n^{-1})$ nagyságrendű maradéktag létezését biztosítja.

Ha viszont pl. $R=1$, $r=0$ és az $x$ pont a csomópontokhoz közel helyezkedik el, amin azt értjük, hogy $|\sin(n+\frac{1}{2})x| = o(1)$ ($x$ függhet $n$-től), akkor a 2.1. Tétel válik élesebbé a 2.2. Tételnél.

[2] $K(\quad)$ csak a zárójelben levő argumentumoktól függő konstansot jelöl.

### A 2.1. tétel bizonyítása

A tétel bizonyításánál alapvető szerepet fog játszani a következő

2.1.1. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\varphi(x)$ egy tetszőleges $2\pi$-periodikus függvény, $\nu$* pedig *egy nem-negatív egész szám. Ekkor*

$$S_n(x,\varphi)=2^{-\nu}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu}\varphi(x_k)D_n(x-x_{k+\nu})+ \tag{2.3}$$

$$+2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{i=1}^{\nu}\binom{\nu}{i}\Delta^{\nu+1-i}\varphi(x_k)\cdot D_n^i(x-x_{k+1+\nu-i})+$$

$$+2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{i=1}^{\nu}\binom{\nu}{i}\Delta^{\nu-i}\varphi(x_k)D_n^{i+1}(x-x_{k+\nu-i}),$$

*ahol*

$$\Delta^j\varphi(x_k)=\sum_{\mu=0}^{j}(-1)^{j-\mu}\binom{j}{\mu}\varphi(x_{k+\mu})\qquad (j=0,1,\ldots) \tag{2.4}$$

*és*

$$D_n^j(x-x_k)=\sum_{\mu=0}^{j}\binom{j}{\mu}D_n(x-x_{k+\mu})\qquad (j=0,1,\ldots) \tag{2.5}$$

$$(D_n^0=D_n).$$

*Bizonyítás.* Az alábbiakban többször fel fogjuk használni — külön említés nélkül — a következő két azonosságot:

$$\Delta^j\varphi(x_{k+1})-\Delta^j\varphi(x_k)=\Delta^{j+1}\varphi(x_k)\qquad (j=0,1,\ldots)$$

és

$$D_n^j(x-x_k)+D_n^j(x-x_{k+1})=D_n^{j+1}(x-x_k)\qquad (j=0,1,\ldots).$$

Ezek az azonosságok $\Delta^j\varphi$ és $D_n^j$ definíciójából rögtön következnek.

Ha $\nu=0$, akkor (2.3) nyilvánvalóan igaz, hiszen ebben az esetben azt állítjuk, hogy

$$S_n(x,\varphi)=\sum_{k=-n}^{n}\varphi(x_k)D_n(x-x_k),$$

ami megegyezik (1.3)-mal, ha ott $f$ helyett $\varphi$-t írunk. Legyen most $\nu\geqq 1$, és tegyük fel, hogy a (2.3) összefüggést $(\nu-1)$-re már bebizonyítottuk. Ha egy $A(x)$ függvény $2\pi$-periodikus, akkor világos, hogy $\sum_{k=-n}^{n}A(x_k)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=-n}^{n}A(x_k)+\sum_{k=-n}^{n}A(x_{k+1})\right]$. Mivel a (2.3) azonosságban szereplő összes függvény $2\pi$-periodikus, ezért

$$S_n(x,\varphi)=\frac{1}{2}\Bigg\{2^{-\nu+1}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu-1}\varphi(x_k)D_n(x-x_{k+\nu-1})+$$

$$+2^{-\nu}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{i=1}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{i}\Delta^{\nu-i}\varphi(x_k)D_n^i(x-x_{k+\nu-i})+$$

$$+2^{-\nu}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{i=1}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{i}\Delta^{\nu-1-i}\varphi(x_k)D_n^{i+1}(x-x_{k+\nu-1-i})+$$

$$+2^{-\nu+1}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu-1}\varphi(x_{k+1})D_n(x-x_{k+\nu})+$$

$$+2^{-\nu}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{i=1}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{i}\Delta^{\nu-i}\varphi(x_{k+1})D_n^i(x-x_{k+1+\nu-i})+$$

$$+2^{-\nu}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{i=1}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{i}\Delta^{\nu-1-i}\varphi(x_{k+1})D_n^{i+1}(x-x_{k+\nu-i})\Bigg\}\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2}[A+B+C+D+E+F].$$

Először az $\frac{1}{2}[A+D]$ kifejezést fogjuk átalakítani. Világos, hogy

$$\frac{1}{2}[A+D]=2^{-\nu}\sum_{k=-n}^{n}[\Delta^{\nu-1}\varphi(x_{k+1})-\Delta^{\nu-1}\varphi(x_k)]D_n(x-x_{k+\nu})+$$

$$+2^{-\nu}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu-1}\varphi(x_k)[D_n(x-x_{k+\nu-1})+D_n(x-x_{k+\nu})].$$

Tehát

$$\frac{1}{2}[A+D]=2^{-\nu}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu}\varphi(x_k)D_n(x-x_{k+\nu})+$$

$$+2^{-\nu}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu-1}\varphi(x_k)D_n^1(x-x_{k+\nu-1})\equiv A_1+A_2.$$

$A_1$-en már nem változtatunk, $A_2$-t pedig a következőképpen alakítjuk át.

$$A_2=2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu-1}\varphi(x_k)D_n^1(x-x_{k+\nu-1})+$$

$$+2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu-1}\varphi(x_{k+1})D_n^1(x-x_{k+\nu})=$$

$$=2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}[\Delta^{\nu-1}\varphi(x_{k+1})-\Delta^{\nu-1}\varphi(x_k)]D_n^1(x-x_{k+\nu})+$$

$$+2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu-1}\varphi(x_k)[D_n^1(x-x_{k+\nu-1})+D_n^1(x-x_{k+\nu})],$$

vagyis

$$A_2=2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu}\varphi(x_k)D_n^1(x-x_{k+\nu})+2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu-1}\varphi(x_k)D_n^2(x-x_{k+\nu-1}).$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\frac{1}{2}[A+D]=2^{-\nu}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu}\varphi(x_k)D_n(x-x_{k+\nu})+ \tag{2.6}$$

$$+2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu}\varphi(x_k)D_n^1(x-x_{k+\nu})+2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\Delta^{\nu-1}\varphi(x_k)D_n^2(x-x_{k+\nu-1}).$$

Egybevetve (2.6)-ot és (2.3)-at megállapíthatjuk, hogy az $\frac{1}{2}[A+D]$ kifejezés adja (2.3)-ban az első összeget, valamint a második és a harmadik tagban az $i=1$ indexnek megfelelő összegek $\nu$-ed részét. Tekintsük most $\frac{1}{2}[B+E]$-t.

$$\frac{1}{2}[B+E]=2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{i=1}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{i}[\Delta^{\nu-i}\varphi(x_{k+1})-\Delta^{\nu-i}\varphi(x_k)]D_n^i(x-x_{k+1+\nu-i})+$$

$$+2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{i=1}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{i}\Delta^{\nu-i}\varphi(x_k)[D_n^i(x-x_{k+\nu-i})+D_n^i(x-x_{k+1+\nu-i})]=$$

$$=2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\left[\sum_{i=1}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{i}\Delta^{\nu-i+1}\varphi(x_k)D_n^i(x-x_{k+1+\nu-i})+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{\nu}\binom{\nu-1}{i-1}\Delta^{\nu-i+1}\varphi(x_k)D_n^i(x-x_{k+1+\nu-i})\right].$$

Felhasználva most a $\binom{\nu-1}{i}+\binom{\nu-1}{i-1}=\binom{\nu}{i}$ azonosságot, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}[B+E]=2^{-\nu-1}\sum_{k=-n}^{n}\left[(\nu-1)\Delta^{\nu}\varphi(x_k)D_n^1(x-x_{k+\nu})+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{\nu}\binom{\nu}{i}\Delta^{\nu+1-i}\varphi(x_k)D_n^i(x-x_{k+1+\nu-i})\right].$$

Tehát $\frac{1}{2}[B+E]$ egyenlő a (2.3) második tagjában levő, az $i=2,3,\dots,\nu$ indexeknek megfelelő összegekkel, valamint az $i=1$ indexhez tartozó összeg $\frac{\nu-1}{\nu}$-ed részével. Pontosan ugyanígy látható be, hogy az $\frac{1}{2}[C+F]$ kifejezés adja a (2.3)-ból eddig hiányzó részt. A 2.1.1. Segédtételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. Szeretném felhívni az Olvasó figyelmét arra, hogy (2.3) nem *Abel*-féle átalakítás. Az általam ismert dolgozatokban a szerzők az $|S_n(x,f)-f(x)|$ nagyságrendjének a vizsgálatánál vagy az általánosított *Jackson* tételt alkalmazták, vagy pedig *Abel*-féle átalakításokkal értek célhoz. (2.3) segítségével sokkal finomabb eredményeket lehet elérni, mint a fentebb említett módszerek alkalmazásával. Ezért részleteztem a viszonylag egyszerű (2.3) azonosságot.

2.1.2. SEGÉDTÉTEL. *Legyenek $j$ és $R$ olyan egész számok, hogy $1\leq j\leq R$. Ha $n>R$, akkor*

$$(2.7)\qquad |D_n^j(\hat{x}-x_{k+R-j})|=0(1)\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\cdot|k|^{-j-1}\qquad\left(0\leq\hat{x}\leq\frac{\pi}{2n+1}\right),$$

$$(k\neq -R,\,-R+1,\dots,0),\quad\text{ahol}\quad 0(1)<K(R).$$

*Bizonyítás.* Emlékeztetjük az Olvasót, hogy (l. (2.5))

$$D_n^j(\hat{x}-x_{k+R-j})=\sum_{\mu=0}^{j}\binom{j}{\mu}D_n(\hat{x}-x_{k+R-j+\mu}).$$

$D_n$ meghatározásából következik, hogy

$$|D_n^j(\hat{x}-x_{k+R-j})| = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{2n+1}\left|\Delta^j_{\frac{\pi}{2n+1}} \operatorname{cosec}\frac{x_{k+R-j}-\hat{x}}{2}\right|,$$

ha $k\neq -R, -R+1, \dots, 0$. Könnyen belátható, hogy

$$2^{-1}(x_{k+R-j}-\hat{x})+\frac{\mu\pi}{2n+1}\in\left[\frac{1}{2}x_{k-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}x_{k+R}\right], \quad \text{ha} \quad \mu=0, 1, \dots, j.$$

Tehát

$$|D_n^j(\hat{x}-x_{k+2-j})| \leqq \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{2n+1}\omega_j\left(\operatorname{cosec} t; \frac{x_{k-\frac{1}{2}}}{2}, \frac{x_{k+R}}{2}; \frac{\pi}{2n+1}\right).$$

A simasági modulusok tulajdonságai folytán

$$(2.8) \qquad |D_n^j(\hat{x}-x_{k+R-j})| \leqq \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{2n+1}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^j \cdot \max_{\frac{x_{k-\frac{1}{2}}}{2}\leqq t\leqq\frac{x_{k+R}}{2}} |(\operatorname{cosec} t)^{(j)}|.$$

Most egy rövid kitérőt teszünk, és bebizonyítjuk, hogy

$$(2.9) \qquad |(\operatorname{cosec} x)^{(l)}| \leqq (2l-1)!!\,|\operatorname{cosec}^{l+1} x| \quad (0<|x|<\pi), \qquad l=1, 2, \dots.$$

Mindenek előtt megmutatjuk, hogy

$$(2.10) \qquad (\operatorname{cosec} x)^{(l)} = H_l(x)\operatorname{cosec}^{l+1} x,$$

ahol $H_l(x)$ egy legfeljebb $l$-ed fokú trigonometrikus polinom. Ezt indukció útján fogjuk belátni. Ha $l=1$, akkor

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\cos x \operatorname{cosec}^2 x = H_1(x)\operatorname{cosec}^2 x.$$

Legyen $l>1$. Ekkor

$$(\operatorname{cosec} x)^{(l)} = [(\operatorname{cosec} x)^{(l-1)}]' = [H_{l-1}(x)\operatorname{cosec}^l x]' =$$
$$= H_{l-1}(x)'\operatorname{cosec}^l x + H_{l-1}(x)\cdot l\cdot\operatorname{cosec}^{l-1} x\cdot(-\cos x)\cdot\operatorname{cosec}^2 x =$$
$$= \operatorname{cosec}^{l+1} x\{H_{l-1}(x)'\sin x - l\cos x H_{l-1}(x)\}.$$

Jelöljük most $H_l(x)$-szel a szögletes zárójelben levő kifejezést. Tehát (2.10) igaz. A *Bernstein*-féle egyenlőtlenség szerint egy trigonometrikus polinom deriváltja nem nagyobb, mint a polinom fokszámának és a polinom maximumának a szorzata. Tehát

$$\max_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|H_l(x)| \leqq (l-1)\max_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|H_{l-1}(x)| + l\cdot\max_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|H_{l-1}(x)|,$$

vagyis

$$\max_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|H_l(x)| \leqq (2l-1)\cdot\max_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|H_{l-1}(x)|.$$

Ezek után (2.9) következik a $\max\limits_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|H_1(x)|\leqq 1$ egyenlőtlenségből.

(2.8) és (2.9)-ből következik az alábbi becslés:

$$|D_n^j(\hat{x}-x_{k+R-j})| \leqq (2R-1)!!\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{2n+1}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^j \cdot \max_{\frac{x_{k-\frac{1}{2}}}{2}\leqq t\leqq\frac{x_{k+R}}{2}} |\operatorname{cosec}^{j+1} t|.$$

Innen és a $|\operatorname{cosec} t| \leqq \frac{\pi}{2}|t|^{-1}$ $\left(0<|t|\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ egyenlőtlenségből egyszerű számolással azt kapjuk, hogy

$$|D_n^j(\hat{x}-x_{k+R-j})| \leqq$$

$$\leqq (2R-1)!!\left(\frac{\pi}{2}\right)^{j+1}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{2n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^j\cdot\begin{cases}\left|\frac{x_{k+R}}{2}\right|^{-j-1} & (-n\leqq k\leqq -R-1)\\ \left(\frac{x_{k-\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-j-1} & (1\leqq k\leqq n-R)\\ \left(\frac{x_{n-R}}{2}\right)^{-j-1} & (n-R<k\leqq n),\end{cases}$$

azaz

$$|D_n^j(\hat{x}-x_{k+R-j})| = 0(1)\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\cdot n^{-j-1}(x_k)^{-j-1} \qquad (k\neq -R, -R+1, \dots, 0).$$

Mivel $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$, ezért (2.7) következik a fenti becslésből.

2.1.3. Segédtétel. *Legyenek $\hat{x}, y^0, y^1, \dots, y^r$ $(r\geqq 0)$ tetszőleges valós számok, $\tau=\left[\frac{r+1}{2}\right]$*[3]*. Létezik egy olyan legfeljebb $\tau$-ad fokú trigonometrikus polinom $H_\tau(x)$, hogy*

$$H_\tau(x)^{(i)}|_{x=\hat{x}} = y^i \qquad (i=0, 1, \dots, r). \tag{2.11}$$

*Ha páratlan $r$ esetén az $\int_{-\pi}^{\pi} H_\tau(x)\,dx=0$ feltétel is teljesül, akkor a $H_\tau(x)$ polinomot a fenti feltételek egyértelműen definiálják. Továbbá*

$$\max_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|H_\tau(x)| < C\cdot\max_{0\leqq i\leqq r}|y^i|, \tag{2.12}$$

*ahol $C$ egy $x$-től független pozitív állandó.*

*Bizonyítás.* Különválasztjuk a páros, illetve páratlan $r$-ek esetét.

a) Legyen $r=2\tau$, $H_\tau(x) = \frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{k=1}^{\tau}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$. Ekkor (2.11)-et

[3] $[a]$ az $a$ szám egész részét jelöli.

úgy tekinthetjük, mint egy olyan lineáris egyenletrendszert, amelyben $H_\tau(x)$ együtthatói az ismeretlenek. (2.11)-nek akkor és csak akkor van egyértelműen definiált megoldása, ha a hozzá tartozó homogén egyenletrendszernek csakis triviális megoldása létezik. Mivel egy $\tau$-ad fokú trigonometrikus polinomnak csak akkor lehet $(2\tau+1)$ multiplicitással rendelkező nullpontja, ha maga a polinom azonosan egyenlő nullával, ezért a homogén egyenletrendszernek csak triviális megoldása létezik.

b) Legyen $r = 2\tau-1$. Az a) pont szerint létezik egy olyan egyértelműen definiált $\tilde{H}_\tau(x)$ legfeljebb $\tau$-ad fokú trigonometrikus polinom, amely eleget tesz a

$$\tilde{H}_\tau(\hat{x}) = 0, \quad \tilde{H}_\tau(x)^{(i)}|_{x=\hat{x}} = y^{i-1} \qquad (i=1,2,\dots,r+1)$$

feltételeknek. Világos, hogy feladatunkat a $H_\tau(x) = (\tilde{H}_\tau(x))'$ polinom megoldja.

Most rátérünk a

$$\max_{-\pi\le x\le\pi} |H_\tau(x)| < C \cdot \max_{0\le i\le r} |y^i|$$

egyenlőtlenség bebizonyítására. Az egyszerűség kedvéért legyen $r = 2\tau-1$. Jelöljük a (2.11) egyenletrendszer mátrixát $V(\hat{x})$-szel. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{\tau} (|a_k|+|b_k|) \le 2\tau \max_{0\le k\le 2\tau-1} \sum_{i=0}^{2\tau-1} |\alpha_{ik}| \cdot \max_{0\le i\le r} |y^i| \tag{2.13}$$

(l. F. R. GANTMAHER [4] 411. o.), ahol $a_k, b_k$ $(k=1,2,\dots,\tau)$ a $H_\tau(x)$ együtthatói, $\alpha_{ik}$ pedig a $V(\hat{x})^{-1}$ mátrix elemeit jelöli. Tehát

$$\alpha_{ik} = [\det V(\hat{x})]^{-1} \cdot A_{ik},$$

ahol $A_{ik}$ a $V(\hat{x})$ mátrix $v_{ik}$ eleméhez tartozó aldetermináns. $A_{ik}$ tehát egy olyan $(2\tau-1)$ rangú mátrix determinánsa, amely elemeinek abszolút értéke nem nagyobb $\tau^r$-nél. Tehát $|A_{ik}| \le r!\tau^{r^2}$. Továbbá $|\det V(x)|$ az $x$ változónak folytonos függvénye, és egy tetszőleges $x=\hat{x}$ pontban $|\det V(x)| \ne 0$, tehát $|\det V(x)| > \varepsilon > 0$ minden $x$-re. A fentiekből következik, hogy

$$|\alpha_{ik}| < \varepsilon^{-1} r!\, \tau^{r^2}. \tag{2.14}$$

(2.12) következik (2.13)- és (2.14)-ből.

Most már hozzáfoghatunk a 2.1. Tétel bizonyításához.

Vegyünk egy tetszőleges $x=\hat{x}$ pontot és rögzítsük. Az $S_n(x,f)-f(x)$ kifejezést a továbbiakban az $x=\hat{x}$ pontban fogjuk vizsgálni. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $-\frac{1}{2}x_1 < \hat{x} \le \frac{1}{2}x_1$, vagyis $\alpha=0$, hiszen az $x_k$ csomópontok egyenlő lépésközűek. Sőt, szimmetria okoból kifolyólag azt is feltételezhetjük, hogy $0 < \hat{x} \le \dfrac{1}{2}x_1 = \dfrac{\pi}{2n+1}$.

A tételt először olyan függvényekre fogjuk bebizonyítani, amelyek az első $r$ deriváltjukkal együtt eltűnnek az $x=\hat{x}$ pontban. Legyen tehát $\varphi(x)$ egy ilyen függvény, vagyis

$$\varphi^{(i)}(x)|_{x=\hat{x}} = 0 \qquad (i=0,1,\dots,r). \tag{2.15}$$

Legyen továbbá $R(>r)$ egy tetszőleges rögzített egész szám. A 2.1.1. Segédtételből következik, hogy

$$S_n(\hat{x},\varphi) = S_n^1(\hat{x},\varphi) + S_n^2(\hat{x},\varphi) + S_n^3(\hat{x},\varphi), \tag{2.16}$$

ahol

$$S_n^1(\hat{x}, \varphi) = 2^{-R} \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq -R}}^{n} \Delta^R \varphi(x_k) D_n(\hat{x} - x_{k+R}), \tag{2.17}$$

$$S_n^2(\hat{x}, \varphi) = 2^{-R} \Delta^R \varphi(x_{-R}) D_n(\hat{x}) +$$

$$+ 2^{-R-1} \sum_{k=-R}^{0} \sum_{i=1}^{R} \binom{R}{i} [\Delta^{R+1-i} \varphi(x_k) D_n^i(\hat{x} - x_{k+1+R-i}) + \Delta^{R-i} \varphi(x_k) D_n^{i+1}(\hat{x} - x_{k+R-i})]$$

és

$$S_n^3(\hat{x}, \varphi) = 2^{-R-1} \left( \sum_{k=-N}^{-R-1} + \sum_{k=1}^{n} \right) \sum_{i=1}^{R} \binom{R}{i} \Delta^{R+1-i} \varphi(x_k) D_n^i(\hat{x} - x_{k+1+R-i}) + \tag{2.18}$$

$$+ 2^{-R-1} \left( \sum_{k=-n}^{-R-1} + \sum_{k=1}^{n} \right) \sum_{i=1}^{R} \binom{R}{i} \Delta^{R-i} \varphi(x_k) D_n^{i+1}(\hat{x} - x_{k+R-i}).$$

A továbbiakban megmutatjuk, hogy

$$S_n^2(\hat{x}, \varphi),\ S_n^3(\hat{x}, \varphi) = 0(1) \cdot n^{-r} \cdot \omega \left( \varphi^{(r)}; \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \hat{x}}{n} \right).$$

$\Delta_\varphi^j$ és $D_n^j$ meghatározásából következik, hogy

$$|S_n^2(\hat{x}, \varphi)| \leq |\varphi(0) D_n(\hat{x})| + \sum_{|k|=1}^{R} |\varphi(x_k) D_n(\hat{x} - x_k)| + \sum_{k=-R+1}^{0} |\Delta^R \varphi(x_k)|\, |D_n(\hat{x} - x_{k+R})|.$$

A *Taylor*-formulát és a (2.15) feltételt felhasználva kapjuk, hogy

$$|\varphi(0) D_n(\hat{x})| \leq |\varphi(0)| \leq \frac{\hat{x}^r}{r!} \max_{0 \leq t \leq \hat{x}} |\varphi^{(r)}(t)| \leq \frac{2^{-r} x_1^r}{r!} \omega(\varphi^{(r)}; \hat{x}) \leq$$

$$\leq \frac{\pi^r}{r!} \frac{1}{(2n+1)^r} \omega \left( \varphi^{(r)}; \frac{\left( n + \frac{1}{2} \right) \hat{x}}{n} \right) \leq \left( \frac{\pi}{2} \right)^r \frac{1}{r!} n^{-r} \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) \omega \left( \varphi^{(r)}; \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \hat{x}}{n} \right).$$

Továbbá

$$\sum_{|k|=1}^{R} |\varphi(x_k) D_n(\hat{x} - x_k)| = \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \hat{x} \sum_{|k|=1}^{R} \frac{|\varphi(x_k)|}{(2n+1) \left| \sin \frac{x_k - \hat{x}}{2} \right|} \leq$$

$$\leq \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \hat{x} \cdot 2R \frac{1}{(2n+1) \sin \frac{x_1}{4}} \cdot \max_{|t| \leq x_R} |\varphi(t)| \leq 2R \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \hat{x} \cdot \max_{|t| \leq x_R} |\varphi(t)|.$$

Ismét alkalmazva a *Taylor*-formulát és (2.15)-öt azt kapjuk, hogy

$$\sum_{|k|=1}^{R} |\varphi(x_k) D_n(\hat{x}-x_k)| \leqq \frac{2R}{r!} x_R^r \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\omega(\varphi^{(r)}; x_{R+1}) \leqq$$

$$\leqq \frac{4R}{r!} x_R^r \omega\left(\varphi^{(r)}; \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n}\pi(R+1)\right) = 0(1)\cdot n^{-r}\omega\left(\varphi^{(r)}; \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n}\right).$$

Ezenkívül

$$\sum_{k=-R+1}^{0} |\Delta^R\varphi(x_k)|\,|D_n(\hat{x}-x_{k+R})| \leqq \omega_R\left(\varphi; \frac{2\pi}{2n+1}\right)\cdot \sum_{k=-R+1}^{0} |D_n(\hat{x}-x_{k+R})| \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^r \omega_{R-r}\left(\varphi^{(r)}; \frac{2\pi}{2n+1}\right)\cdot \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\cdot R =$$

$$= 0(1) n^{-r} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\omega\left(\varphi^{(r)}; \frac{1}{n}\right) = 0(1)\cdot n^{-r}\cdot\omega\left(\varphi^{(r)}; \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n}\right).$$

Tehát

$$S_n^2(\hat{x}, \varphi) = 0(1)\cdot n^{-r}\cdot\omega\left(\varphi^{(r)}; \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n}\right). \tag{2.19}$$

Rátérünk $S_n^3(\hat{x}, \varphi)$ (l. (2.18)) becslésére. A 2.1.2. Segédtételből következik, hogy

$$|\Delta^{R+1-j}\varphi(x_k) D_n^j(\hat{x}-x_{k+R+1-j})| =$$

$$= 0(1)\cdot\omega_{R+1-j}\left(\varphi; x_k, x_{k+R+1-j}; \frac{2\pi}{2n+1}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\cdot k^{-j-1},$$

$k=1, 2, \dots, n$ és $j=1, 2, \dots, R+1$. Tehát

$$|\Delta^{R+1-j}\varphi(x_k) D_n^j(\hat{x}-x_{k+R+1-j})| =$$

$$= 0(1)\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\cdot\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^{R+1-j}\cdot \max_{x_k \leqq t \leqq x_{k+R+1-j}} |\varphi^{(R+1-j)}(t)|\cdot k^{-j-1},$$

$k=1, 2, \dots, n$ és $j=1, 2, \dots, R+1$. Mivel $\varphi(x)$ az $x=\hat{x}$ pontban eltűnik az első $r$ deriváltjával együtt, ezért ez utóbbi kifejezés

$$0(1)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\cdot\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^{R+1-j}\cdot(x_{k+R})^{r-R-1+j}\cdot\omega(\varphi^{(r)}; x_{k+R})\cdot k^{-j-1}$$

nagyságrendű, vagyis

$$|\Delta^{R+1-j}\varphi(x_k) D_n^j(\hat{x}-x_{k+R+1-j})| = \tag{2.20}$$

$$= 0(1)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\cdot n^{-r}\cdot\omega\left(\varphi^{(r)}; \frac{1}{n}\right)\cdot|k|^{r-R-1} \qquad (j=1, 2, \dots, R+1),$$

$k=1, 2, \ldots, n$. Ez a becslés akkor is igaz, ha $k = -n, -n+1, \ldots, -R-1$. Ahhoz, hogy ezt kimutassuk, nem kell mást tennünk, mint szóról szóra megismételnünk az előbbi okoskodásokat. (2.18) és (2.20)-ból következik, hogy

$$|S_n^3(\hat{x}, \varphi)| = 0(1)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\cdot n^{-r}\cdot\omega\left(\varphi^{(r)}; \frac{1}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{r-R-1}.$$

Mivel $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\cdot\omega(\varphi^{(r)}; n^{-1}) \leqq 2\omega\left(\varphi^{(r)}; n^{-1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\right)$ és $\sum_{k=1}^{n} k^{r-R-1} \leqq$ $\leqq \sum_{k=1}^{n} k^{-2} < \frac{\pi^2}{6}$, ezért

$$|S_n^3(\hat{x}, \varphi)| = 0(1)\cdot n^{-r}\omega\left(\varphi^{(r)}; \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n}\right). \tag{2.21}$$

(2.16), (2.17), (2.19) és (2.21)-ből következik, hogy

$$S_n(\hat{x}, \varphi) - \varphi(\hat{x}) = 2^{-R}\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq -R}}^{n} \Delta^R\varphi(x_k)D_n(\hat{x}-x_{k+R}) + 0(1)\cdot n^{-r}\cdot\omega\left(\varphi^{(r)}; \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n}\right),$$

ha $0\leqq\hat{x}\leqq \frac{1}{2}x_1$ és a $\varphi(x)$ függvény eleget tesz a (2.15) feltételnek.

A továbbiakban meg fogunk szabadulni az igen kellemetlen (2.15) feltételtől.

Legyen most $\psi(x)$ egy olyan $r$-szer ($r=0, 1, \ldots$) folytonosan differenciálható $2\pi$-periodikus függvény, amely legalább egy pontban eltűnik.

Mielőtt továbbmennénk, megjegyezzük, hogy a *Rolle*-tétel következtében a $\psi', \psi'', \ldots, \psi^{(r)}$ függvényeknek is van nullpontjuk. Ha

$$\psi(x)^{(i)}|_{x=\theta_i} = 0 \qquad (i=0, 1, \ldots, r),$$

ahol $-\pi\leqq\theta_i\leqq\pi$, akkor világos, hogy

$$|\psi(x)^{(r)}| = |\psi(x)^{(r)} - \psi(x)^{(r)}|_{x=\theta_r}| \leqq \omega(\psi^{(r)}; 2\pi) \quad (-\pi\leqq x\leqq\pi)$$

és

$$|\psi(x)^{(j)}| = |\psi(x)^{(j)} - \psi(x)^{(j)}|_{x=\theta_j}| = \left|\int_{\theta_j}^{x}\psi(t)^{(j+1)}\,dt\right| \leqq$$

$$\leqq 2\pi\max_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|\psi(x)^{(j+1)}| \qquad (-\pi\leqq x\leqq\pi;\ j=0, 1, \ldots, r-1).$$

Tehát

$$\max_{\substack{-\pi\leqq x\leqq\pi\\ 0\leqq i\leqq r}}|\psi(x)^{(i)}| \leqq (2\pi)^r\omega(\psi^{(r)}; 2\pi). \tag{2.22}$$

A 2.1.3. Segédtételt felhasználva konstruáljunk most egy olyan $H_\tau(x)$ legfeljebb $\tau$-ad fokú trigonometrikus polinomot, amely az $x=\hat{x}$ pontban megegyezik $\psi(x)$-szel, továbbá

$$H_\tau(x)^{(i)}|_{x=\hat{x}} = \psi(x)^{(i)}|_{x=\hat{x}} \qquad (i=1, 2, \ldots, r).$$

Jelöljük

$$\varphi(x) = \psi(x) - H_\tau(x).$$

*Ha* $n \geqq \tau$, akkor

$$S_n(x, \psi) - \psi(x) = S_n(x, \psi - H_\tau) - [\psi(x) - H_\tau(x)],$$

vagyis

$$S_n(\hat{x}, \psi) - \psi(\hat{x}) = S_n(\hat{x}, \varphi).$$

Mivel

$$\varphi(x)^{(i)}|_{x=\hat{x}} = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots, r),$$

ezért a már bebizonyítottak értelmében

$$S_n(\hat{x}, \varphi) = 2^{-R} \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq -R}}^{n} \Delta^R \varphi(x_k) D_n(\hat{x} - x_{k+R}) + 0(1) \cdot n^{-r} \cdot \omega \left( \varphi^{(r)}; \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n} \right).$$

Tehát

$$S_n(\hat{x}, \psi) - \psi(\hat{x}) = 2^{-R} \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq -R}}^{n} \Delta^R [\psi(x_k) - H_\tau(x_k)] D_n(\hat{x} - x_{k+R}) +$$

$$+ 0(1) n^{-r} \omega \left( \psi^{(r)} - H_\tau^{(r)}; \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n} \right).$$

Mivel két tetszőleges függvény különbségének folytonossági modulusát a két függvény folytonossági modulusának összege mindig majorálja, ezért az előbbi formulából következik, hogy

$$S_n(\hat{x}, \psi) - \psi(\hat{x}) = 2^{-R} \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq -R}}^{n} \Delta^R \psi(x_k) D_n(\hat{x} - x_{k+R}) - \tag{2.23}$$

$$- 2^{-R} \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq -R}}^{n} \Delta^R H_\tau(x_k) D_n(\hat{x} - x_{k+r}) + 0(1) n^{-r} \omega \left( \psi^{(r)}; \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n} \right) +$$

$$+ 0(1) \cdot n^{-r} \cdot \omega \left( H_\tau^{(r)}; \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n} \right).$$

Most megmutatjuk, hogy a $H_\tau^{(r)}$ függvény folytonossági modulusát a $\psi_\tau^{(r)}$ függvény folytonossági modulusa majorálja, vagyis

$$\omega(H_\tau^{(r)}; \delta) \leqq C_1 \omega(\psi^{(r)}; \delta) \quad (0 \leqq \delta \leqq 2\pi), \tag{2.24}$$

ahol a $C_1 (\geqq 0)$ konstans nem függ sem $x$-től, sem $f$-től, sem $\delta$-tól, csupán $r$-től. Világos, hogy

$$\omega(H_\tau^{(r)}; \delta) \leqq \delta \cdot \max_{-\pi \leqq x \leqq \pi} |H_\tau(x)^{(r+1)}| \leqq \delta \tau^{r+1} \max_{-\pi \leqq x \leqq \pi} |H_\tau(x)|.$$

A 2.1.3. Segédtétel második állításából következik, hogy

$$\omega(H_\tau^{(r)};\delta) \leqq C\tau^{r+1}\cdot\delta\cdot \max_{0\leqq i\leqq r} |\psi(x)^{(i)}|_{x=\hat{x}}| \leqq C\tau^{r+1}\cdot\delta\cdot \max_{\substack{0\leqq i\leqq r\\ -\pi\leqq x\leqq\pi}} |\psi(x)^{(i)}|.$$

Figyelembe véve (2.22)-t, azt kapjuk, hogy

$$\omega(H_\tau^{(r)};\delta) \leqq C\tau^{r+1}\cdot(2\pi)^r\cdot\delta\cdot\omega(\psi^{(r)};2\pi) \leqq 2C\tau^{r+1}(2\pi)^{r+1}\omega(\psi^{(r)};\delta) \quad (0\leqq\delta\leqq 2\pi),$$

vagyis (2.24) igaz és $C_1$ egyenlő lehet $2C\tau^{r+1}(2\pi)^{r+1}$-gyel.

Most becsülni fogjuk a

$$H = \sum_{\substack{k=-n\\ k\neq -R}}^{n} \Delta^R H_\tau(x_k) D_n(\hat{x}-x_{k+R})$$

kifejezést. Világos, hogy

$$H = \sum_{\substack{k=-n\\ k\neq -R}}^{n} \Delta^R H_\tau(x_{k+R}-x_R) D_n(\hat{x}-x_{k+R}) = \sum_{\substack{k=-n\\ k\neq 0}}^{n} \Delta^R H_\tau(x_k-x_R) D_n(\hat{x}-x_k) =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \Delta^R H_\tau(x_k-x_R) D_n(\hat{x}-x_k) - \Delta^R H_\tau(-x_R) D_n(\hat{x}) =$$

$$= \Delta^R H_\tau(\hat{x}-x_R) - \Delta^R H_\tau(-x_R) D_n(\hat{x}),$$

hiszen $n > R > \tau$ és $\Delta^R H_\tau(x-x_R)$ egy legfeljebb $\tau$-ad fokú trigonometrikus polinom Innen

$$H = \Delta^R[H_\tau(\hat{x}-x_R) - H_\tau(-x_R)] + \Delta^R H_\tau(-x_R)[1-D_n(\hat{x})].$$

Tehát

$$|H| \leqq \omega_R\left(h;\frac{2\pi}{2n+1}\right) + \omega_R\left(H_\tau;\frac{2\pi}{2n+1}\right)\cdot\hat{x}\cdot \max_{-\pi\leqq x\leqq\pi} |D_n(x)'|,$$

ahol $h(t) = H_\tau(\hat{x}+t) - H_\tau(t)$. A *Bernstein*-egyenlőtlenséget és a simasági modulusok tulajdonságait alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$|H| \leqq \left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^r \omega_{R-r}\left(h^{(r)};\frac{2\pi}{2n+1}\right)^r + \left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^r\cdot n\hat{x}\cdot\omega_{R-r}\left(H_\tau^{(r)};\frac{2\pi}{2n+1}\right) =$$

$$= 0\left\{n^{-r}\omega\left(h^{(r)};\frac{2\pi}{2n+1}\right) + n^{-r}n\hat{x}\omega\left(H_\tau^{(r)};\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right\} =$$

$$= 0\left\{n^{-r}\omega(H_\tau^{(r)};\hat{x}) + n^{-r}n\hat{x}\omega\left(H_\tau^{(r)};\frac{1}{n}\right)\right\} = 0\left\{n^{-r}\omega\left(H_\tau^{(r)};\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n}\right)\right\}.$$

(2.24) következtében tehát

$$\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq -R}}^{n} \Delta^R H_\tau(x_k) D_n(\hat{x}-x_{k+R}) = 0(1)n^{-r}\cdot\omega\left(\psi^{(r)};\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n}\right). \tag{2.25}$$

Összegezve (2.23), (2.24) és (2.25)-öt, azt bizonyítottuk be, hogy ha az $r$-szer ($r=0, 1, \ldots$) folytonosan differenciálható $2\pi$-periodikus $\psi(x)$ függvénynek van nullpontja, akkor

$$(2.26)\qquad S_n(\hat{x}, \psi)-\psi(\hat{x}) =$$

$$= 2^{-R} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq -R}}^{n} \Delta^R \psi(x_k) D_n(\hat{x}-x_{k+R}) + 0(1)\cdot n^{-r}\omega\left(\psi^{(r)}; \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n}\right).$$

Ezek után a tételt már pár szóban be tudjuk bizonyítani. Ha az $f(x)$ függvény eleget tesz a tétel feltételeinek, akkor a $\psi(x) = f(x)-f(0)$ függvényre (2.26)-ot alkalmazhatjuk. Mivel $S_n(\hat{x}, f)-f(\hat{x}) = S_n(\hat{x}, \psi)-\psi(\hat{x})$ és $\omega(f^{(r)}; \delta)\equiv\omega(\psi^{(r)}; \delta)$, továbbá $\Delta^R f(x)\equiv\Delta^R\psi(x)$, ezért

$$S_n(\hat{x}, f)-f(\hat{x}) =$$

$$= 2^{-R} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq -R}}^{n} \Delta^R f(x_k) D_n(\hat{x}-x_{k+R}) + 0(1)\cdot n^{-r}\cdot\omega\left(f^{(r)}; \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\hat{x}}{n}\right),$$

ahol tehát $0 < \hat{x} \leqq \frac{\pi}{2n+1}$, $R>r$ és $n>R$, amit bizonyítanunk kellett.

## A 2.2. tétel bizonyítása

Ugyanúgy, mint a 2.1. Tétel bizonyításánál, itt is egy azonosságból fogunk kiindulni.

2.2.1. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\varphi(x)$ egy tetszőleges $2\pi$ szerint periodikus függvény, $R$ pedig egy nemnegatív egész szám. Ekkor*

$$(2.27)\qquad S_n(x, \varphi) = (-2)^{-R} S_n(x, \Delta^R\varphi)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[S_n\left(x, \sum_{i=0}^{R-1}(-2)^{-i}\Delta^i\varphi\right)+S_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}, \sum_{i=0}^{R-1}(-2)^{-i}\Delta^i\varphi\right)\right].$$

*Bizonyítás.* Először — indukció segítségével — lássuk be a

$$(2.28)\qquad \varphi(x) = (-2)^{-R}\Delta^R\varphi(x)+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{R-1}(-2)^{-i}\Delta^i\varphi(x)+\sum_{i=0}^{R-1}(-2)^{-i}\Delta^i\varphi\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]$$

egyenlőséget. Ez nyilvánvalóan igaz, ha $R=0$, hiszen $\Delta^0\varphi(x)=\varphi(x)$. Ha $R>0$, akkor az indukciós feltevés folytán

$$\varphi(x) = (-2)^{-R+1}\Delta^{R-1}\varphi(x)+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{R-2}(-2)^{-i}\Delta^i\varphi(x)+\sum_{i=0}^{R-2}(-2)^{-i}\Delta^i\varphi\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right],$$

vagyis

$$\varphi(x) = (-2)^{-R}\left[\Delta^{R-1}\varphi\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\Delta^{R-1}\varphi(x)\right]-$$

$$-(-2)^{-R}\left[\Delta^{R-1}\varphi(x)+\Delta^{R-1}\varphi\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{R-2}(-2)^{-i}\Delta^{i}\varphi(x)+\sum_{i=0}^{R-2}(-2)^{-i}\Delta^{i}\varphi\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right].$$

Mivel $\Delta^{R-1}\varphi\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\Delta^{R-1}\varphi(x) = \Delta^{R}\varphi(x)$, ezért (2.28)-at bebizonyítottuk.

Most megjegyezzük, hogy minden $2\pi$-periodikus $\psi(x)$ függvényre

$$S_n(x, \bar{\psi}) = S_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}, \psi\right),$$

ahol $\bar{\psi}(x) = \psi\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)$. Valóban

$$S_n(x, \bar{\psi}) = \sum_{k=-n}^{n}\bar{\psi}(x_k)D_n(x-x_k) = \sum_{k=-n}^{n}\psi(x_{k+1})D_n(x-x_k) =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}\psi(x_{k+1})D_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}-x_{k+1}\right) = S_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}, \psi\right).$$

(2.27) következik (2.28)-ból és ez utóbbi megjegyzésből.

Most megismételjük mindazon észrevételeket, amelyeket a 2.1.1. Segédtétel bizonyítása után tettünk. (2.27) nem Abel-féle átalakítás, ehhez hasonlót mindössze egy dolgozatban láttam. KIS OTTÓ a [8] cikkében az $R=1$ esetre bizonyítja be (2.27)-et, erre a cikkre a továbbiakban még visszatérek.

2.2.2. SEGÉDTÉTEL. *Ha $\zeta(x)$ egy tetszőleges $2\pi$-periodikus függvény, akkor*

$$\frac{1}{2}\left[S_n(x, \zeta)+S_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}, \zeta\right)\right] \leqq \frac{4}{\pi}\sup_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|\zeta(x)| \quad (-\pi\leqq x\leqq\pi).$$

Ez a tétel SZ. N. BERNSTEIN [3] nevéhez fűződik.

2.2.3. SEGÉDTÉTEL. *Minden $2\pi$ szerint periodikus folytonos $f(x)$ függvényhez és minden $R$ nem negatív egész számhoz található egy olyan legfeljebb $n$-ed fokú $H(x)$ trigonometrikus polinom, hogy*

$$\max_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|f(x)-H(x)| \leqq K(R)\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right). \tag{2.29}$$

Ezt SZ. B. SZTECSKIN [19] bizonyította (l. még A. F. TYIMAN [22] 274. o.). Ezt általánosított JACKSON-, vagy más néven a JACKSON—AHIÉZER—TYIMAN—SZTECSKIN-tételnek is nevezik.

E három segédtétel alapján a tételt nem lesz nehéz bebizonyítanunk. Legyen

$$\varphi(x) = f(x) - H(x),$$

ahol a $H(x)$ legfeljebb $n$-ed fokú trigonometrikus polinomot úgy választjuk meg, hogy (2.29) teljesüljön. Mivel

$$S_n(x,f) - f(x) = S_n(x, \varphi) - \varphi(x),$$

ezért (2.27) alapján

$$S_n(x,f) - f(x) = (-2)^{-R} S_n(x, \Delta^R f) - (-2)^{-R} S_n(x, \Delta^R H) + \tag{2.30}$$

$$+\frac{1}{2}\left[S_n\left(x, \sum_{i=0}^{R-1}(-2)^{-i}\Delta^i(f-H)\right) + S_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}, \sum_{i=0}^{R-1}(-2)^{-i}\Delta^i(f-H)\right)\right] -$$

$$-[f(x) - H(x)].$$

Mivel $\Delta^R H(x)$ — ugyanúgy, mint $H(x)$ — egy legfeljebb $n$-ed fokú trigonometrikus polinom, ezért

$$(-2)^{-R} S_n(x, \Delta^R H) = (-2)^{-R} \Delta^R H(x).$$

Tehát

$$|(-2)^{-R} S_n(x, \Delta^R H)| \leqq 2^{-R}\omega_R\left(H; \frac{2\pi}{2n+1}\right) \leqq \tag{2.31}$$

$$\leqq 2^{-R}\omega_R\left(f-H; \frac{2\pi}{2n+1}\right) + 2^{-R}\omega_R\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) \leqq$$

$$\leqq \max_{-\pi\leqq x\leqq\pi} |f(x) - H(x)| + 2^{-R}\omega_R\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) = 0(1)\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right).$$

A 2.2.2. Segédtétel alapján

$$\frac{\pi}{4}\left|\frac{1}{2}\left[S_n\left(x, \sum_{i=0}^{R-1}(-2)^{-i}\Delta^i(f-H)\right) + S_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}, \sum_{i=0}^{R-1}(-2)^{-i}\Delta^i(f-H)\right)\right]\right| \leqq \tag{2.32}$$

$$\leqq \max_{-\pi\leqq x\leqq\pi}\left|\sum_{i=0}^{R-1}(-2)^{-i}\Delta^i\left(f(x) - H(x)\right)\right| \leqq \sum_{i=0}^{R-1} 2^{-i}\omega_i\left(f-H; \frac{2\pi}{2n+1}\right) \leqq$$

$$\leqq R \max_{-\pi\leqq x\leqq\pi} |f(x) - H(x)| = 0\left[\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\right].$$

(2.30), (2.31), (2.32) és (2.29)-ből következik, hogy

$$S_n(x,f) - f(x) = (-2)^{-R} S_n(x, \Delta^R f) + 0(1)\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

amit bizonyítanunk kellett.

## 3. § ALKALMAZÁSOK FOLYTONOS FÜGGVÉNYEKRE

Mielőtt rátérnék az e pontban megtárgyalásra kerülő tételek megfogalmazására, ismertetni fogok egy segédtételt, amelynek ismeretében már e tételek olvasásakor érezhető lesz, hogy ezek a 2.1. és 2.2. tételeknek szinte triviális következményei, noha e tételek maguk korántsem triviálisak.

3.1. SEGÉDTÉTEL. *Minden n-re teljesülnek az alábbi összefüggések:*

$$\sum_{k=-n}^{n} |D_n(x-x_k)| = \frac{2}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \log n + 0(1) \tag{3.1}$$

*és*

$$\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq\alpha}}^{n} |D_n(x-x_k)| = \frac{2}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| [\log n + 0(1)], \tag{3.2}$$

*ahol* $\alpha$ *az* $x$ *ponthoz legközelebb eső* $x_k$ *csomópont indexe (ha* $x=\frac{1}{2}(x_{k_0}+x_{k_0+1})$, *akkor* $\alpha=k_0$).

(3.1.)-et SZ. M. NYIKOLSZKIJ [15] bizonyította be, (3.2) pedig a (3.1) bizonyítása közben kapott részeredmény. A $\sum_{k=-n}^{n} |D_n(x-x_k)|$ kifejezés nem más, mint az (1.1) alappontokhoz tartozó trigonometrikus interpoláció *Lebesgue*-féle függvénye.

3.2. TÉTEL. *Ha* $f(x)$ *egy r-szer* ($r=0, 1, \ldots$) *folytonosan differenciálható* $2\pi$*-periodikus függvény, akkor*

$$|f(x)-S_n(x,f)| \leqq \frac{\pi^{r-1}}{(2n+1)^r}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \cdot \log n \cdot \omega\left(f^{(r)}; \frac{2\pi}{2n+1}\right) + \tag{3.3}$$

$$+0\left\{n^{-r}\omega\left(f^{(r)}; \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right)\right\}.$$

3.3. TÉTEL. *Legyen* $\omega(\delta)$ *egy előre megadott majoráns. Ekkor*

$$\sup_{f\in H_\omega} |f(x)-S_n(x,f)| = \tag{3.4}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \log n \cdot \omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + 0(1)\cdot\omega\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right).$$

Megjegyezzük, hogy SZ. M. NYIKOLSZKIJ [16], [18] megmutatta, hogy

$$\sup_{f\in H_\omega} |f(x)-S_n(x,f)| = \tag{3.5}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \log n\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + 0(1)\cdot\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Az olyan $x$ pontokra, amelyekre $|\sin(n+\frac{1}{2})x| \geqq \varepsilon > 0$, (3.4) megegyezik SZ. M. NYIKOLSZKIJ eredményével, ha viszont $|\sin(n+\frac{1}{2})x| = 0(1)$, akkor (3.4) többet mond a $\sup_{f \in H_\omega} |f(x)-S_n(x,f)|$ kifejezésről, mint (3.5). SZ. M. NYIKOLSZKIJ *Abel*-féle átalakításokkal nyerte (3.5)-öt, míg mi más utat követünk. Kötelességemnek érzem felhívni az Olvasó figyelmét arra, hogy a *Nyikolszkij*-féle bizonyítás módosításával is ki lehet mutatni (3.4)-et.

3.4. TÉTEL. *Ha R rögzített nem-negatív egész szám, akkor minden folytonos* $2\pi$*-periodikus* $f(x)$ *függvényre*

$$(3.6)\qquad |f(x)-S_n(x,f)| \leqq$$

$$\leqq 2^{-R+1}\pi^{-1}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \log n \cdot \omega_R\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right)+0(1)\cdot\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

*ahol* $|0(1)|<K(R)$.

*Továbbá a* $2^{-R+1}\pi^{-1}$ *konstans pontos abban az értelemben, hogy*

$$(3.7)\qquad \sup_f \frac{|f(x)-S_n(x,f)|}{\log n\cdot\omega_R\left(f;\frac{2\pi}{2n+1}\right)} = 2^{-R+1}\pi^{-1}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|+0\left(\frac{1}{\log n}\right),$$

*ahol a szuprémumot az összes* $2\pi$*-periodikus folytonos* $f(x)$ *függvény szerint vesszük.*

Ezt a tételt az $R=1$ esetre KIS OTTÓ [8] is bebizonyította.

## Bizonyítások

Ha a 2.1. Tételt alkalmazzuk az $R=r+1$ esetre, akkor

$$S_n(x,f)-f(x) = 2^{-r-1}\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq -r-1+\alpha}}^{n} \Delta^{r+1}f(x_k)D_n(x-x_{k+r+1})+$$

$$+0(1)n^{-r}\omega\left(f^{(r)};\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right).$$

A 3.2. Tétel innen és a (3.2) becslésből triviálisan következik.

Rátérünk a 3.3. Tétel bizonyítására. A

$$(3.8)\qquad \sup_{f\in H_\omega}|f(x)-S_n(x,f)| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\log n\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)+0(1)\omega\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right)$$

egyenlőtlenség a 3.2. Tétel folyománya ($r=0$). Az egyenlőség az SZ. M. NYIKOLSZKIJ által — a (3.5) bizonyítása közben — konstruált extremális függvényre fennáll. Ez az $f_0(t)=f_0(t,n,x,\omega)$ függvény a következőképpen van definiálva. Ha $0\leqq x<\frac{\pi}{2n+1}$, akkor

(3.9)

$$f_0(t)=\begin{cases} 0 & \left(0\leqq t\leqq \dfrac{2\pi}{2n+1}\right), \\ -\dfrac{1}{2}\,\omega\left(t-\dfrac{2\pi}{2n+1}\right) & \left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\leqq t\leqq \dfrac{4\pi}{2n+1}\right), \\ (-1)^{\mu+1}\left\{\dfrac{1}{2}\,\omega\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)-\omega\left(t-\dfrac{2\mu\pi}{2n+1}\right)\right\} & \left(\dfrac{2\mu\pi}{2n+1}\leqq t\leqq \dfrac{2(\mu+1)\pi}{2n+1}\right. \\ & \left.(\mu=2,3,\ldots,n)\right), \\ -\dfrac{1}{2}\,\omega(-t) & \left(\dfrac{-2\pi}{2n+1}\leqq t\leqq 0\right), \\ (-1)^{\mu}\left\{\dfrac{1}{2}\,\omega\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)-\omega\left(t-\dfrac{2\mu\pi}{2n+1}\right)\right\} & \left(\dfrac{2\mu\pi}{2n+1}\leqq t\leqq \dfrac{2(\mu+1)\pi}{2n+1}\right. \\ & \left.(\mu=-2,-3,\ldots,-n)\right). \end{cases}$$

Ha $x\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2n+1}\right)$, akkor a $t$ változó megfelelő lineáris transzformációjával nyerjük a keresett extremális függvényt.

Megjegyezzük, hogy SZ. M. NYIKOLSZKIJ csak arra az esetre mutatta ki az $f_0\in H_\omega$ relációt, ha $\omega(\delta)$ konkáv majoráns (pl. $\omega(\delta)=\delta^\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$). Azt, hogy minden $\omega(\delta)$ majoránsra $f_0\in H_\omega$, I. M. GANZBURG [5] bizonyította be.

Az $f_0$ függvény definíciójából következik, hogy

$$|S_n(x,f_0)-f_0(x)| = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq 0,1}}^{n}|D_n(x-x_k)|,$$

tehát (3.2) folytán

$$|f_0(x)-S_n(x,f_0)| = \frac{1}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|[\log n+0(1)]\,\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

(3.4) következik innen és (3.8)-ból.

A 3.4 Tétel első része közvetlenül következik a 2.2. Tételből és a (3.1) becslésből. (3.7) bizonyításához nyilvánvalóan elegendő megmutatnunk egy olyan $2\pi$-periodikus folytonos $f_1(t)=f_1(t,n,x)$ függvény létezését, amelyre

$$|f_1(x)-S_n(x,f_1)| = 2^{-R}\omega_R\left(f_1;\frac{2\pi}{2n+1}\right)\sum_{k=-n}^{n}|D_n(x-x_k)|+0\left\{\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Rögzítsünk egy $x$ pontot, és legyen

$$f_1(x_k, n, x) = \operatorname{sign} D_n(x-x_k) \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n), \tag{3.10}$$

$$f_1(-\pi)=f_1(\pi)=0,$$

továbbá definiáljuk $f_1(t, n, x)$-et a többi pontban lineáris interpoláció segítségével. Világos, hogy

$$\omega_R\left(f_1; \frac{2\pi}{2n+1}\right) = 2^R$$

és

$$|f_1(t)| \leqq 1 = 2^{-R}\omega_R\left(f_1; \frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

Tehát

$$|S_n(x, f_1)-f_1(x)| = \left|\sum_{k=-n}^{n} |D_n(x-x_k)| - f_1(x)\right| =$$

$$= 2^{-R}\omega_R\left(f_1; \frac{2\pi}{2n+1}\right)\sum_{k=-n}^{n} |D_n(x-x_k)| + 0(1)\omega_R\left(f_1; \frac{1}{n}\right),$$

amit bizonyítanunk kellett.

## 4. § ALKALMAZÁSOK KORLÁTOS VÁLTOZÁSÚ FÜGGVÉNYEKRE

Jelöljük $H(v, \omega)$-val azoknak a folytonos, $2\pi$-periodikus függvényeknek az osztályát, amelyeknek a $[-\pi, \pi]$ szakaszon a változása, illetve folytonossági modulusa nem nagyobb egy előre megadott nem-negatív $v$ számnál, illetve $\omega(\delta)$ majoránsnál. *$H(v, \omega)$ tehát $H_\omega$ azon $f$ elemeiből áll, amelyekre* $\operatorname*{var}_{-\pi}^{\pi} f \leqq v$.

4.1. TÉTEL. *Érvényes a*

$$\sup_{f\in H(v,\omega)} |f(x)-S_n(x,f)| = \tag{4.1}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \log\left(1+\min\left\{n, \frac{V}{2\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)}\right\}\right)\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)+$$

$$+0(1)\omega\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right)$$

*aszimptotikus egyenlőség.*

Megjegyezük, hogy ha $v=2\pi$ és $\omega(\delta)\equiv\delta$, akkor $H(v, \omega)\equiv H_\omega$. Valóban, a $H(v, \omega)\subset H_\omega$ reláció triviális, ha pedig $f\in H_\omega$, akkor a $[-\pi, \pi]$ szakasz minden $\tau$

$$\tau: \qquad -\pi=\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_m=\pi$$

beosztására

$$\sum_{i=0}^{m-1} |f(\tau_{i+1})-f(\tau_i)| \leqq \sum_{i=0}^{m-1} (\tau_{i+1}-\tau_i) = 2\pi,$$

tehát $\overset{\pi}{\underset{-\pi}{\mathrm{var}}} f \leqq 2\pi$. A 4.1. Tételből következik tehát, hogy ha $\omega(\delta) \equiv \delta$, akkor

$$\sup_{f\in H_\omega} |f(x)-S_n(x,f)| = \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\frac{\log n}{n}+0\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right),$$

amely állítás egyébként bennfoglaltatik a 3.2. tételben is.

A *Fourier*-részletösszegekre vonatkozó, a (4.1)-hez hasonló aszimptotikus becsléssel V. G. KOMINÁR foglalkozott (l. [9]-et és hozzá kapcsolódóan SZ. A. TYELJAKOVSZKIJ [21] referátumát).

4.2. TÉTEL. *Legyen $f(x)$ egy folytonos és $2\pi$-periodikus függvény, R természetes szám,*

$$w(f,R,n)=\sum_{k=-n}^{n}|\Delta^R f(x_k)|. \tag{4.2}$$

*Ekkor*

$$|f(x)-S_n(x,f)| \leqq \tag{4.3}$$

$$\leqq \frac{2^{-R+1}}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\log\left[1+\min\left\{n,\frac{w(f,R,n)}{2\omega_R\left(f;\frac{2\pi}{2n+1}\right)}\right\}\right]\omega_R\left(f;\frac{2\pi}{2n+1}\right)+$$

$$+0(1)\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

*ahol* $|0(1)|<K(R)$.

*A $2^{-R+1}\pi^{-1}$ tényező nem helyettesíthető egy nálánál kisebb számmal úgy, hogy (4.3) továbbra is igaz maradjon minden folytonos $2\pi$-periodikus függvényre. Sőt, minden előre megadott nem-negatív $w(n)$ $(n=1,2,\dots)$ sorozathoz konstruálható egy olyan $2\pi$ szerint periodikus, folytonos $f_3(t)=f_3(t,n,x,R,w)$ függvény, hogy*

$$w(f_3,R,n)\leqq w(n) \tag{4.4}$$

*és*

$$|f_3(x)-S_n(x,f_3)| = \tag{4.5}$$

$$=\frac{2^{-R+1}}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\log\left[1+\min\left\{n,\frac{w(n)}{2\omega_R\left(f_3;\frac{2\pi}{2n+1}\right)}\right\}\right]\cdot\omega_R\left(f_3;\frac{2\pi}{2n+1}\right)+$$

$$+0(1)\cdot\omega_R\left(f_3;\frac{1}{n}\right).$$

Könnyen belátható, hogy a 3.4. Tétel következik a 4.2. Tételből.

KÖVETKEZMÉNY. *A 4.2. Tétel jelölései mellett*

$$\max_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|f(x)-S_n(x,f)| = 0\left[\left\{1+\log\left(1+\frac{w(f,R,n)}{\omega_R\left(f;\frac{2\pi}{2n+1}\right)}\right)\right\}\omega_R\left(f;\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]. \tag{4.6}$$

Egy $2\pi$-periodikus $f(x)$ függvényt akkor fogunk az (1.1) *alappontokban R-korlátos változásúnak* ($R$ természetes szám) nevezni, ha

$$\sup_n \sum_{k=-n}^{n} |\Delta^R f(x_k)| < \infty .$$

A 4.2. Tételből triviálisan következik az alábbi konvergencia-kritérium is, amely — véleményem szerint — megérdemli, hogy külön tételben fogalmazzuk meg.

4.3. TÉTEL. *Ha egy $2\pi$-periodikus $f(x)$ függvény folytonos és az* (1.1) *alappontokban R-korlátos változású valamely R természetes szám mellett, akkor $S_n(x,f)$ az egész $[-\pi, \pi]$ intervallumon egyenletesen konvergál $f(x)$-hez, pontosabban szólva érvényes a*

$$\max_{-\pi\leq x\leq\pi} |f(x)-S_n(x,f)| = 0\left[\left|\log \omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)\right|\cdot\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)\right] \tag{4.7}$$

*becslés.*

Megjegyezzük, hogy ha egy $2\pi$ szerint periodikus függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon korlátos változású, akkor feltétlenül az (1.1) alappontokban 1-korlátos változású is lesz, fordítva azonban ez nem igaz (l. D. L. BERMAN [2]).

Továbbá még arra is felhívom az Olvasó figyelmét, hogy ha

$$\sup_n \sum_{k=-n}^{n} |\Delta^{R_0} f(x_k)| < \infty ,$$

akkor minden $R(>R_0)$-ra is

$$\sup_n \sum_{k=-n}^{n} |\Delta^{R} f(x_k)| < \infty ,$$

fordítva azonban ez sem igaz, vagyis az (1.1) alappontokban való $R$-korlátos változásból nem következik az (1.1) alappontokban való $(R-1)$-korlátos változás (l. F. I. HARSILADZE [6] és [7]).

Ily módon a 4.3. Tétel a DIRICHLET—JORDAN—JACKSON-tétel általánosítása, amely azt állítja, hogy ha $f(x)$ folytonos $2\pi$-periodikus függvény és $\operatorname{var}_{-\pi}^{\pi} f<\infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \max_{-\pi\leq x\leq\pi} |f(x)-S_n(x,f)| = 0.$$

(A DIRICHLET—JORDAN—JACKSON-tétel a 4.1. Tételből is következik.)

## A 4.1. tétel bizonyítása

Szükségünk lesz a 3.1. Segédtétel következő általánosítására:

4.1.1. SEGÉDTÉTEL. *Ha s egy n-nél nem nagyobb természetes szám, akkor*

$$\sum_{\substack{k=\alpha-s\\ k\neq\alpha}}^{\alpha+s} |D_n(x-x_k)| = \frac{2}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| [\log(s+1)+0(1)], \tag{4.8}$$

*ahol $\alpha$ az x ponthoz legközelebb eső $x_k$ csomópont indexe, illetve, ha két ilyen csomópont van, akkor a kisebbiké.*

*Bizonyítás.* Az alábbi gondolatmenet azonos az SZ. M. NYIKOLSZKIJ [15] és V. I. SZMIRNOV—N. A. LEBEGYEV [20] (88. o.) munkákban találhatóval. Mindenek előtt megjegyezzük, hogy csak felső becslést fogunk adni, mivel az alsó becslés analóg módon végezhető el. Továbbá — az egyszerűség kedvéért — csak a

$$\sum_{k=\alpha+1}^{\alpha+s} |D_n(x-x_k)|$$

kifejezést fogjuk vizsgálni. $D_n(x)$ meghatározásából következik, hogy

$$\sum_{k=\alpha+1}^{\alpha+s} |D_n(x-x_k)| = \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{2n+1} \sum_{k=\alpha+1}^{\alpha+s}{}' \operatorname{cosec}\frac{x_k-x}{2} =$$

$$= \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{2n+1} \operatorname{cosec}\frac{x_{\alpha+1}-x}{2} + \frac{\left|\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)x\right|}{\pi} \sum_{k=\alpha+2}^{\alpha+s} \operatorname{cosec}\frac{x_k-x}{2}\cdot\frac{\pi}{2n+1}.$$

Ez utóbbi összeg az

$$\int_{\frac{1}{2}(x_{\alpha+1}-x)}^{\frac{1}{2}(x_{\alpha+s}-x)} \operatorname{cosec} t\, dt$$

integrálhoz konstruált *Riemann—Darboux*-féle összeg. Mivel $\operatorname{cosec} t$ konkáv a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, ezért

$$\sum_{k=\alpha+2}^{\alpha+s} \operatorname{cosec}\frac{x_k-x}{2}\cdot\frac{\pi}{2n+1} \leqq \int_{\frac{1}{2}(x_{\alpha+1}-x)}^{\frac{1}{2}(x_{\alpha+s}-x)} \operatorname{cosec} t\, dt \leqq \int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{1}{2}x_s+\frac{\pi}{2(2n+1)}} \operatorname{cosec} t\, dt =$$

$$= \log\left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{s\pi}{2(2n+1)}+\frac{\pi}{4(2n+1)}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4(2n+1)}}\right] \leqq \log(2s+1).$$

Tehát

$$\sum_{k=\alpha+1}^{\alpha+s} |D_n(x-x_k)| \leqq \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \left[1+\frac{1}{\pi}\log(2s+1)\right] \leqq$$

$$\leqq \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| [\log(s+1)+\log(e2^{\frac{1}{\pi}})].$$

Rátérünk a tétel bizonyítására. A 2.1. Tételt az $r=0$, $R=1$ esetre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$(4.9)\quad S_n(x,f)-f(x) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=\alpha-n\\k\neq\alpha}}^{\alpha+n} \Delta f(x_{k-1})D_n(x-x_k)+0(1)\omega\left(f; \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right).$$

Tehát

(4.10)
$$|S_n(x,f)-f(x)| \leqq \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=\alpha-n\\ k\neq\alpha}}^{\alpha+n} |\Delta f(x_{k-1})|\,|D_n(x-x_k)| + 0(1)\omega\left(f; \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right).$$

Mivel felső becslést kívánunk adni, és

$$|D_n(x-x_{\alpha+1})|,\ |D_n(x-x_{\alpha-1})| \geqq |D_n(x-x_{\alpha+2})|,\ |D_n(x-x_{\alpha-2})| \geqq \dots$$
$$\dots \geqq |D_n(x-x_{\alpha+n})|,\ |D_n(x-x_{\alpha-n})|,$$

ezért már a priori feltételezhetjük, hogy

(4.11)
$$|\Delta f(x_\alpha)|,\ |\Delta f(x_{\alpha-2})| \geqq |\Delta f(x_{\alpha+1})|,\ |\Delta f(x_{\alpha-3})| \geqq \dots$$
$$\dots \geqq |\Delta f(x_{\alpha+n-1})|,\ |\Delta f(x_{\alpha-n-1})|$$

(l. A. ZYGMUND [23] 122. o.). Továbbá $f\in H(v, \omega)$-ból következik, hogy

(4.12)
$$\sum_{k=-n}^{n} |\Delta f(x_k)| \leqq v.$$

(4.11) és (4.12) folytán feltételezhetjük tehát, hogy

(4.13)
$$|\Delta f(x_{k-1})| \leqq \frac{v}{2|k-\alpha|} \quad (k\neq\alpha).$$

Jelöljük

(4.14)
$$N = \min\left\{n, \left[\frac{v}{2\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)}\right]\right\}.$$

(4.10)-et írjuk át az

$$|S_n(x,f)-f(x)| \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=\alpha-n}^{\alpha-N-1} + \sum_{\substack{k=\alpha-N\\ k\neq\alpha}}^{\alpha+N} + \sum_{k=\alpha+N+1}^{n}\right) |\Delta f(x_{k-1})|\cdot|D_n(x-x_k)| +$$
$$+0(1)\omega\left(f; \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right)$$

formába. Innen (4.13) és a $|\Delta f(x_{k-1})| \leqq \omega\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) \leqq \omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)$, $|D_n(x-x_k)| =$

$= 0\left(\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\frac{1}{|k-\alpha|}\right)$ $(k\neq\alpha)$ becslések segítségével azt kapjuk. hogy

$$|S_n(x,f)-f(x)| \leqq \frac{\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{2} \sum_{\substack{k=\alpha-N\\ k\neq\alpha}}^{\alpha+N} |D_n(x-x_k)| +$$

$$+0\left\{\sum_{k=N+1}^{n} \frac{v\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{k^2} + \omega\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right)\right\}.$$

Vizsgáljuk meg a $\sum_{k=N+1}^{n} v\cdot\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\cdot k^{-2}$ kifejezést. Ha $N=n$, akkor ez nullával egyenlő, ha pedig $N = \left[\frac{v}{2\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)}\right]$, akkor

$$\sum_{k=N+1}^{n} \frac{v\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{k^2} \leqq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{v\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{k^2} = 0\left\{\frac{v\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{N+1}\right\} =$$

$$= 0\left\{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right\} = 0\left\{\omega\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right)\right\}.$$

Tehát

$$|f(x)-S_n(x,f)| \leqq \frac{\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{2} \sum_{\substack{k=\alpha-N\\ k\neq\alpha}}^{\alpha+N} |(D_n(x-x_k)| + 0\left\{\omega\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right)\right\}.$$

A 4.1.1. Segédtételből következik, hogy

$$\sup_{f\in H(v,\omega)} |f(x)-S_n(x,f)| \leqq \frac{1}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \log(N+1)\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) +$$

$$+0\left\{\omega\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right)\right\},$$

ahol tehát $N$-et a (4.14)-ben határoztuk meg. A 4.1. Tétel bebizonyításához már csak azt kell megmutatnunk, hogy létezik egy olyan $f_2(t)=f_2(t, n, x, \omega)\in H(v, \omega)$, amelyre

(4.15)
$$|f_2(x)-S_n(x,f_2)| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \log(N+1)\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + 0\left\{\omega\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right)\right\}.$$

Ezt az $f_2(t)$ függvényt a (3.9.)-ben konstruált Sz. M. NYIKOLSZKIJ-féle $f_0(t)$ függvény módosításával nyerjük. Jelölje $t_0$ az $\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)=2\omega(t)$ egyenlet legkisebb gyökét. Legyen az egyszerűség kedvéért $0<x\leqq\frac{\pi}{2n+1}$. Ekkor

(4.16)

$$f_2(t)=\begin{cases} 0, & 0\leqq t\leqq\frac{2\pi}{2n+1},\\ -\frac{1}{2}\omega\left(t-\frac{2\pi}{2n+1}\right), & \frac{2\pi}{2n+1}\leqq t\leqq\frac{4\pi}{2n+1},\\ (-1)^{k+1}\left\{\frac{1}{2}\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\omega\left(t-\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right\}, & \frac{2k\pi}{2n+1}\leqq t\leqq\frac{2(k+1)\pi}{2n+1}\\ & (k=2,3,\dots,N-1),\\ (-1)^{N+1}\left\{\frac{1}{2}\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\omega\left(t-\frac{2N\pi}{2n+1}\right)\right\}, & \frac{2N\pi}{2n+1}\leqq t\leqq\frac{2N\pi}{2n+1}+t_0,\\ 0, & \frac{2N\pi}{2n+1}+t_0\leqq t\leqq\pi,\\ f_3\left(-t+\frac{2\pi}{2n+1}\right), & -\pi\leqq t\leqq 0,\\ f_3(t+2\pi)=f_3(t). \end{cases}$$

Látható, hogy az $f_2(t)$ függvényt $f_0(t)$-ből úgy nyerjük, hogy $f_2(t)=f_0(t)$ ha $|t|\leqq\frac{2N\pi}{2n+1}+t_0$ és $f_2(t)=0$, ha $\frac{2N\pi}{2n+1}+t_0\leqq|t|\leqq\pi$. Tehát $f_2\in H_\omega$. Továbbá triviális a $\overset{\pi}{\underset{-\pi}{\operatorname{var}}} f_2\leqq v$ egyenlőtlenség. Következésképpen $f_2\in H(v,\omega)$. (4.15) a 4.1.1. Segédtétel és $f_2(t)$ konstrukciójának az egyszerű következménye.

### A 4.2. tétel bizonyítása

a 4.1. Tételéhez hasonlóan végezhető el. Röviden vázoljuk a bizonyítás szkémáját. A 2.2. Tételt felhasználva

$$|f(x)-S_n(x,f)|\leqq 2^{-R}\sum_{\substack{k=\alpha-n\\k\neq\alpha}}^{\alpha+n}|\Delta^R f(x_k)|\,|D_n(x-x_k)|+0\left[\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)\right].$$

Továbbá feltételezve a

$$|\Delta^R f(x_k)|\leqq\frac{w(f,R,n)}{2|k-\alpha|}\quad(k\neq\alpha)$$

egyenlőtlenséget és bevezetve az

$$N_1 = \min\left\{n, \left[\frac{w(f, R, n)}{2\omega_R\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right)}\right]\right\}$$

jelölést, megismételhetjük a 4.1. Tétel bizonyításának gondolatmenetét, és így (4.3)-at nyerjük. A (4.4) és (4.5) feltételeknek eleget tevő $f_3(t)=f_3(t, n, x, R, w)$ függvényt a következőképpen konstruálhatjuk. Legyen

$$f_3(x_k, n, x, R, w) = \begin{cases} 2^{-R}\operatorname{sign} D_n(x-x_k) & (k = \alpha\pm 1, \alpha\pm 2, \dots, \alpha\pm N_2) \\ 0 & (k = \alpha, \alpha\pm(N_2+1), \dots, \pm n), \end{cases}$$

ahol

$$N_2 = \min\left\{n, \left[\frac{w(n)}{2}\right]\right\}.$$

Ha $\omega_R\left(f_3; \frac{2\pi}{2n+1}\right) = 1$, akkor a többi pontban lineáris interpolációval fogjuk $f_3(t)$-t meghatározni, ha $\omega_R\left(f_3; \frac{2\pi}{2n+1}\right) < 1$, akkor legyen

$$f_3(t) = (-1)^k 2^{-R}, \quad \text{ha} \quad t = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) \qquad (k=1, 2, \dots, R),$$

és ezek után definiáljuk $f_3(t)$-t a többi pontban lineáris interpoláció segítségével. Világos, hogy

$$\sum_{k=-n}^{n} |\Delta^R f_3(x_k)| \leqq 2N_2 \leqq w(n)$$

és

$$|f_3(x) - S_n(x, f_3)| = 2^{-R} \sum_{\substack{k=\alpha-N_2 \\ k\neq\alpha}}^{\alpha+N_2} |D_n(x-x_k)| + O\left[\omega_R\left(f_3; \frac{1}{n}\right)\right],$$

tehát (4.4) teljesül, illetve a 4.1.1. Segédtétel következtében (4.5) is, hiszen $\omega_R\left(f_3; \frac{2\pi}{2n+1}\right) = 1.$

## 5. § ALKALMAZÁSOK MONOTON FÜGGVÉNYEKRE

Ebben a pontban az (1.1) alappontokhoz tartozó, általánosított értelemben szakaszosan monoton függvények által generált, trigonometrikus interpolációs eljárás konvergencia sebességét fogjuk megvizsgálni. A tételek kimondásához szükségünk lesz néhány definícióra.

*Egy $f(x)$ függvényt akkor nevezünk $q$-monotonnak ($q=0, 1, \dots$) az $[a, b]$ intervallumon, ha $x$ és $\delta \geqq 0$ minden olyan értékeire, amelyekre $x, x+q\delta \in [a, b]$, az $f(x)$ függvény $q$-adik differenciája $\delta$ lépésközzel, azaz $\Delta_\delta^q f(x)$ megtartja az előjelét. Ha $q=1$, akkor a függvény a szokásos értelemben monoton, ha $q=2$, akkor konvex vagy konkáv.*

$M(N, q)$-val fogjuk jelölni azoknak a $2\pi$-periodikus $f(x)$ függvényeknek az osztályát, amelyekre létezik a $[-\pi, \pi]$ intervallumnak $N$ részből álló olyan $\varrho=\varrho(f)$ beosztása —

$$\varrho: \quad -\pi=C_0<C_1<\ldots<C_N=\pi$$

—, hogy minden $[c_k, c_{k+1}]$ $(k=0, 1, \ldots, N-1)$ szakaszon az $f(x)$ függvény $q$-monoton. *$M(N, q)$ tehát az $N$-szakaszosan $q$-monoton $2\pi$-periodikus függvények halmaza.*

Egy $\omega(\delta)$ majoráns akkor elégíti ki az (5.0) feltételt, ha létezik egy olyan $A>0$ és $\theta\in(0, 1)$ szám, hogy

$$\omega(n\delta)\leqq An^{\theta}\omega(\delta) \tag{5.0}$$

ha $0<\delta\leqq 2\pi$ és $n=1, 2, \ldots$.

Megjegyezzük, hogy ha

$$\delta\cdot\int_{\delta}^{2\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt = 0[\omega(\delta)],$$

akkor az $\omega(\delta)$ majoráns kielégíti az (5.0) feltételt (l. N. K. BARI—SZ. B. SZTECSKIN [1]), vagy ha $\omega(\delta)=\delta^{\alpha}$ $(0<\alpha<1)$, akkor is teljesül (5.0).

5.1. TÉTEL. *Ha $f\in W^{(r)}H_{\omega}\cap M(N, r+1)$, ahol $r\geqq 0$, $N\geqq 1$ egész számok és $\omega(\delta)$ eleget tesz az (5.0) feltételnek, akkor*

$$|f(x)-S_n(x,f)| \leqq K(r, \omega)\frac{\log(N+1)}{n^r}\,\omega\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right). \tag{5.1}$$

5.2. TÉTEL. *Ha $f\in W^{(r)}H_{\omega}\cap M(N, R)$, ahol $r\geqq 0$, $N\geqq 1$, $R>r+1$ egész számok, akkor*

$$|f(x)-S_n(x,f)| \leqq K(r, R)\frac{\log(N+1)}{n^r}\,\omega\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right). \tag{5.2}$$

5.3. TÉTEL. *Ha $f\in M(N, R)$, ahol $N\geqq 1$ és $R\geqq 2$ egész számok, akkor*

$$|f(x)-S_n(x,f)| \leqq K(R)\log(N+1)\,\omega_{R-1}\left(f; \frac{1}{n}\right). \tag{5.3}$$

Mivel az 5.3. Tételt pontosan ugyanúgy kell bizonyítani, mint az 5.2. Tételt — a különbség csak annyi, hogy a 2.1. Tétel helyett a 2.2. Tételből kell kiindulni — ezért e tétel bizonyítását mellőzni fogjuk.

Az Olvasóra bízzuk, hogy párhuzamot vonjon a három tétel között ($x$, $r$ és $R$ milyen értékeire ekvivalens pl. az 5.2. és 5.3. Tétel, mikor élesebb az egyik a másiknál?).

G. I. NATANSZON [10] bebizonyította, hogy ha $F_n(x,f)$-fel az $f(x)$ függvény trigonometrikus *Fourier*-sorának az $n$-edik részletösszegét jelöljük, akkor az 5.1., illetve az 5.2. Tétel feltételei mellett

$$|f(x)-F_n(x,f)| \leqq K\frac{\log(N+1)}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

ahol az első esetben $r$ és $\omega$-tól, a másodikban pedig $r$ és $R$-től függ a $K$ érték.

Mielőtt rétérnénk a tételek bizonyítására, két megjegyzést fűzünk az 5.1. Tételhez. Legyen az egyszerűség kedvéért $r=0$.

1. Az $f\in M(N, 1)$ feltétel nem helyettesíthető a $\operatorname*{var}_{-\pi}^{\pi} f=v<\infty$ feltétellel. Ellenpéldául a (4.16)-ben definiált függvény szolgálhat, ahol is az $\omega(\delta)$ majoránst úgy választjuk meg, hogy az (5.0) feltétel teljesüljön. Ez a megjegyzés — véleményem szerint — azért érdekes, mert a monoton és a korlátos változású függvények osztályai között igen szoros kapcsolat áll fenn.

2. Az $\omega(\delta)$ majoránsra kirótt (5.0) feltétel lényeges, vagyis a tétel a Lip 1 osztályra, valamint annak egy kis környezetére már nem igaz. Ezt bebizonyítandó konstruálni fogunk egy olyan $\psi(t)=\psi(t, n, x)$ függvényt, amelyre

$$|\psi(x)-S_n(x,\psi)| > K\frac{\log n}{n}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|,$$

és ugyanakkor $\psi\in W^{(0)}H_\omega\cap M(2, 1)$, ahol $\omega(\delta)\equiv\delta$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $0<x\leqq\dfrac{\pi}{2n+1}$. Legyen

$$\psi(t)=\begin{cases}-x_k & \text{ha } t=x_k,\ k \text{ páros}, \quad k=1,2,\dots,n,\\ -x_{k-1} & \text{ha } t=x_k,\ k \text{ páratlan}, \quad k=1,2,\dots,n,\\ \text{lineáris}, & \text{ha } x_k\leqq t\leqq x_{k+1}, \quad k=0,1,2,\dots,n-1\end{cases}$$

és

$$\psi(-t)=\begin{cases}\psi\left(t+\dfrac{2\pi}{2n+1}\right), & \text{ha } 0\leqq t\leqq x_{n-1}\\ \psi(x_n), & \text{ha } x_{n-1}\leqq t\leqq x_{n+1}.\end{cases}$$

Az $[x_{-n-1}, x_n]$ szakaszon kívül a $2\pi$-periodicitás megtartásával folytassuk a $\psi(t)$ függvényt. Könnyen belátható, hogy $\psi(t)$ 2-szakaszosan 1-monoton, és eleget tesz a Lip 1 feltételnek. A 2.1. Tételből következik, hogy

$$S_n(x,\psi)-\psi(x)=\frac{1}{2}\sum_{|k|=1}^{n}{}' \Delta\psi(x_k)D_n(x-x_{k+1})+O\left(\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{n}\right).$$

A $\psi(t)$ függvény definíciójából következően tehát

$$S_n(x,\psi)-\psi(x)=$$

$$=-\frac{\pi}{2n+1}\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ páratlan}}}^{n} D_n(x-x_{k+1})+\frac{\pi}{2n+1}\sum_{\substack{k=-1\\ k \text{ páratlan}}}^{-1} D_n(x-x_{k+1})+O\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n}\right).$$

A

$$D_n(x-x_{k+1})=(-1)^k\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{(2n+1)\sin\dfrac{x_{k+1}-x}{2}}$$

egyenlőségből következik, hogy

$$\operatorname{sign} D_n(x-x_{k+1}) = \begin{cases} (-1)^k, & k=1,2,\dots,n-1,\\ (-1)^{k+1}, & k=-1,-2,\dots,-n.\end{cases}$$

Tehát

$$S_n(x,\psi)-\psi(x) = \frac{\pi}{2n+1}\sum_{\substack{|k|=1\\ k \text{ páratlan}}}^{n} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{(2n+1)\left|\sin\frac{x_{k+1}-x}{2}\right|} + 0\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n}\right) >$$

$$> K\frac{\log n}{n}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

valamilyen pozitív $K$ konstanssal, amit bizonyítanunk kellett.

## Bizonyítások

Az 5.1. és 5.2. tételek bizonyítását párhuzamosan fogjuk elvégezni. Ahogy a dolgozat során már nagyon sokszor feltételeztük, legyen $0 < x \leqq \frac{\pi}{2n+1}$. Ez a megkötés most sem jelenti az általánosság leszűkítését, hiszen ha $x \notin \left(0, \frac{\pi}{2n+1}\right)$, akkor csupán az alábbi gondolatmenetünket kell „lineárisan transzformálni". Ha $f \in W^{(r)}H_\omega$, akkor a 2.1. Tétel következtében minden $v(>r)$ egész számra

$$S_n(x,f)-f(x) = 2^{-v}\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq -v}}^{n} \Delta^v f(x_k)D_n(x-x_{k+v}) + 0\left\{n^{-r}\omega\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n}\right)\right\},$$

tehát a továbbiakban elegendő az

$$S_n'(x,f) = \sum_{\substack{k=-n\\ k\neq -v}}^{n} \Delta^v f(x_k)D_n(x-x_{k+v})$$

kifejezést vizsgálnunk, ahol $v$ az $r+1$, illetve az $R$ értékeket fogja felvenni, attól függően, hogy melyik tételt kívánjuk bizonyítani. Sőt, mivel

$$\left|\sum_{k=-v+1}^{0} \Delta^v f(x_k)D_n(x-x_{k+v})\right| \leqq \omega_v\left(f;\frac{2\pi}{2n+1}\right)\sum_{k=-v+1}^{0}|D_n(x-x_{k+v})| =$$

$$= 0(1)\omega_v\left(f;\frac{1}{n}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x = 0(1)n^{-r}\omega_{v-r}\left(f^{(r)};\frac{1}{n}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x =$$

$$= 0(1)n^{-r}\omega\left(f^{(r)};\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n}\right),$$

ezért az alábbiakban csak az

(5.4) $$S_n(x,f)_1 = \left(\sum_{k=-n}^{-\nu-1} + \sum_{k=1}^{n}\right) \Delta^\nu f(x_k) \cdot D_n(x - x_{k+\nu})$$

kifejezést fogjuk becsülni. Mindenek előtt meghatározunk egy $\{k_\mu\}$ sorozatot a következőképpen:

(5.5) $$-n = k_{-Q_1} < k_{-Q_1+1} < \dots < k_{-1} = -\nu - 1 < 0 < k_1 = 1 < \dots < k_{Q_2} = n$$

$(Q_1 + Q_2 = Q)$. Tekintsük a

$$\varrho(f): \quad -\pi = c_0 < c_1 < \dots < c_N = \pi$$

beosztást. Legyen

$$d_i = \begin{cases} c_i - \nu \dfrac{2\pi}{2n+1}, & \text{ha} \quad c_i - \nu \dfrac{2\pi}{2n+1} > c_{i-1}, \\ c_{i-1}, & \text{ha} \quad c_i - \nu \dfrac{2\pi}{2n+1} < c_{i-1} \end{cases}$$

$(i = 1, 2, \dots, N)$. Legyen $\varkappa$ azoknak a $k$ indexeknek a halmaza, amelyekre

$$x_k \in \bigcup_{i=1}^{N} [d_i, c_i] \cup \{x_{-n}, x_{-\nu-1}, x_1, x_n\} \setminus \{x_{-\nu}, x_{-\nu+1}, \dots, x_0\}.$$

Világos, hogy $\varkappa$ elemeit elláthatjuk $\mu$ indexekkel úgy, hogy $\{k_\mu\}$ valóban (5.5) alakú legyen. Ennek a $\{k_\mu\}$ indexsorozatnak két alapvetően fontos tulajdonsága van. Az egyik az, hogy

(5.6) $$Q \leqq \nu N + 4,$$

a másik pedig, hogy

(5.7) $\operatorname{sign} \Delta^\nu f(x_k)$ nem változik, ha $k_\mu < k < k_{\mu+1}$ $(\mu \neq -1)$.

Ez abból következik, hogy $[x_{k_\mu+1}, x_{k_{\mu+1}-1+\nu}]$ teljes egészében beletartozik valamelyik $[c_i, c_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \dots, N-1)$ intervallumba. Most (5.4)-et átírhatjuk a következő formába:

$$S_n(x,f)_1 = \sum_{\mu=-Q_1}^{-2} \sum_{k=k_\mu+1}^{k_{\mu+1}-1} \Delta^\nu f(x_k) D_n(x - x_{k+\nu}) + \sum_{\mu=-Q_1}^{-1} \Delta^\nu f(x_{k_\mu}) D_n(x - x_{k_\mu+\nu}) +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{Q_2-1} \sum_{k=k_\mu+1}^{k_{\mu+1}-1} \Delta^\nu f(x_k) D_n(x - x_{k+\nu}) + \sum_{\mu=1}^{Q_2} \Delta^\nu f(x_{k_\mu}) D_n(x - x_{k_\mu+\nu}) \equiv \sum_{i=1}^{4} S_n(x,f)_1^i.$$

A továbbiakban csak $S_n(x,f)_1^3$ és $S_n(x,f)_1^4$ becslésével fogunk foglalkozni, a másik két összeg becslése ezekétől semmiben sem különbözik. Világos, hogy

$$|S_n(x,f)_1^4| \leqq \omega_\nu\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) \sum_{\mu=1}^{Q_2} |D_n(x - x_{k_\mu+\nu})| \leqq$$

$$\leqq \omega_\nu\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) \sum_{k=1}^{Q_2} |D_n(x - x_k)| = 0(1) \cdot \omega_\nu\left(f; \frac{1}{n}\right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \sum_{k=1}^{Q_2} \frac{1}{k} =$$

$$= 0(1) n^{-r} \omega \left(f^{(r)}; \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n}\right) \log Q_2 = 0(1) \cdot \log(N+1) n^{-r} \omega \left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n}\right).$$

Az 5.1. és 5.2. tételek bebizonyításához már csak $S_n(x,f)_1^3$-et kell megbecsülnünk. (5.7) és (5.8)-ból következik, hogy

$$|S_n(x,f)_1^3| \leqq \sum_{\mu=1}^{Q_2-1} \left| \sum_{k=k_\mu+1}^{k_{\mu+1}-1} \Delta^\nu f(x_k) |D_n(x-x_{k+\nu})| \right|.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$|D_n(x-x_{k+\nu})| = 0\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{k-1}\right) \qquad (k=2, 3, \ldots, n),$$

tehát

$$|S_n(x,f)_1^3| = 0(1)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \cdot \sum_{\mu=1}^{Q_2-1}\left|\sum_{k=k_\mu+1}^{k_{\mu+1}-1} \Delta^\nu f(x_k)\cdot\frac{1}{k-1}\right|.$$

Tételeink bizonyításához elég belátnunk, hogy

$$S \equiv \sum_{\mu=1}^{Q_2-1}\left|\sum_{k=k_\mu+1}^{k_{\mu+1}-1} \Delta^\nu f(x_k)\frac{1}{k-1}\right| = 0\left[n^{-r}\log Q_2\cdot\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{5.9}$$

hiszen $Q_2 = 0(N)$. Mostantól kezdve külön kell választanunk azt az esetet, amikor $\nu = r+1$ és az $\omega(\delta)$ majoráns kielégíti az (5.0) feltételt, valamint a $\nu = R(>r+1)$ esetet.

Legyen először $\nu = r+1$ és $\omega(\delta)$ elégítse ki az (5.0) feltételt. Egyszerű számolással adódik az

$$S \equiv \sum_{\mu=1}^{Q_2-1}\left|\sum_{k=k_\mu+2}^{k_{\mu+1}-1} \frac{\Delta^r f(x_k)-\Delta^r f(x_{k_\mu+1})}{(k-2)(k-1)} + \frac{\Delta^r f(x_{k_\mu+1})-\Delta^r f(x_{k_{\mu+1}})}{k_{\mu+1}-2}\right|$$

egyenlőség, ha $\nu = r+1$. Tehát

$$S \leqq \left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^r \left[\sum_{\mu=1}^{Q_2-1}\sum_{k=k_{\mu+2}}^{k_{\mu+1}-1} \frac{\omega\left(f^{(r)};(k-k_{\mu-1})\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{(k-2)(k-1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=1}^{Q_2-1}\frac{\omega\left(f^{(r)};(k_{\mu+1}-k_\mu-1)\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{k_{\mu+1}-2}\right] \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^r\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)}{(k-2)(k-1)} + \sum_{\mu=1}^{Q_2-1}\frac{\omega\left((k_{\mu+1}-k_\mu-1)\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{k_{\mu+1}-2}\right] \leqq$$

$$\leqq A\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^r\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\theta}{(k-2)(k-1)} + \sum_{\mu=1}^{Q_2-1}\frac{(k_{\mu+1}-k_\mu-1)^\theta}{k_{\mu+1}-2}\right],$$

hiszen az $\omega(\delta)$ majoráns eleget tesz (5.0)-nak. Vagyis

$$S = 0(1)n^{-r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left[1+\sum_{\mu=1}^{Q_2-1}\frac{(k_{\mu+1}-k_\mu-1)^\theta}{k_{\mu+1}-1}\right].$$

Az 5.1. Tétel bizonyításához már csak azt kell megmutatnunk, hogy

$$\sum_{\mu=2}^{Q_2} \frac{(k_\mu - k_{\mu-1} - 1)^\theta}{k_\mu - 1} = 0(\log Q_2).$$

Legyen $l$ az az index, amelyre $k_l \leqq Q_2^{\frac{1}{1-\theta}} + 1 < k_{l+1}$. Ekkor

$$\sum_{\mu=2}^{Q_2} \frac{(k_\mu - k_{\mu-1} - 1)^\theta}{k_\mu - 1} = \left(\sum_{\mu=2}^{l} + \sum_{\mu=l+1}^{Q_2}\right) \frac{(k_\mu - k_{\mu-1} - 1)^\theta}{k_\mu - 1} \leqq$$

$$\leqq \sum_{\mu=2}^{l} \frac{k_\mu - k_{\mu-1} - 1}{k_\mu - 1} + \sum_{\mu=l+1}^{Q_2} (k_\mu - 1)^{\theta-1} \leqq \sum_{\mu=1}^{l-1} \sum_{k=k_\mu}^{k_{\mu+1}-1} \frac{1}{k} + \sum_{\mu=l}^{Q_2} \left(Q_2^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{\theta-1} \leqq$$

$$\leqq \log(k_l - 1) + 0(1) \leqq \frac{1}{1-\theta} \log Q_2 + 0(1) = 0(\log Q_2).$$

Az 5.1. Tételt ily módon bebizonyítottuk.

Legyen most $v = R$, és tekintsük a bizonyításra szoruló (5.9) becslést. Világos, hogy

$$S = \sum_{\mu=1}^{Q_2-1} \left| \frac{-\Delta^{R-1} f(x_{k_\mu+1})}{k_\mu} + \sum_{k=k_\mu+2}^{k_{\mu+1}-1} \frac{\Delta^{R-1} f(x_k)}{(k-2)(k-1)} + \frac{\Delta^{R-1} f(x_{k_{\mu+1}})}{k_{\mu+1} - 2} \right| \leqq$$

$$\leqq \omega_{R-1}\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) \left( \sum_{\mu=1}^{Q_2-1} \frac{1}{k_\mu} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k-2)(k-1)} + \sum_{\mu=2}^{Q_2} \frac{1}{k_\mu - 2} \right) =$$

$$= 0(1) \log Q_2 \cdot \omega_{R-1}\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) = 0(1) n^{-r} \log Q_2 \omega_{R-r}\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 0(1) n^{-r} \log Q_2 \omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right) = 0(1) \cdot n^{-r} \log Q_2 \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

amit be kellett bizonyítanunk.

Az 5.2. Tétel bizonyítása is teljes.

## IRODALOMJEGYZÉK


[1] Бари, Н. К.—Стечкин, С. Б.: Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, *Труды Московского матем. общества* **5** (1956), 483—522.

[2] Берман, Д. Л.: Об одном интерполяционном алалоге критерия Винера непрерывности функций ограниченной вариации, *Доклады АН СССР*, **196** (1971), 495—497.

[3] Бернштейн, С. Н.: О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов, *Доклады АН СССР*, **4** (1934), 1—8 (l. még *Собрание сочинений*, Изд. АН СССР (1954) т2, 161—165).

[4] Гантмахер, Ф. Р.: *Теория матриц*, Москва, 1967.

[5] Ганзбург, И. М.: Распространение одной асимптотической формулы А. Ф. Тимана на классы функций с заданным модулем непрерывности, *Известия АН СССР, серия матем.*, **27** (1963). 485—528.

[6] Харшиладзе, Ф. И.: О функциях с ограниченным вторым изменением, *Доклады АН СССР*, **79** (1951), 201—204.

[7] Харшиладзе, Ф. И.: Функции с ограниченным вторым изменением, *Труды Тбилисского матем. Ин-та,* **20** (1954), 145—156.
[8] Kis, O.: Замечания об оценке погрешности интерполирования, *Studia Sci. Math. Hungar.,* **4** (1969), 279—289.
[9] Коминар, В. Г.: Ряд Фурье непрерывной функции ограниченной вариации, „*Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций,* Москва, 1961, 197—201.
[10] Натансон, Г. И.: Некоторые случаи, когда суммы Фурье дают приближение, порядка наилучшего, *Доклады АН СССР,* **183** (1968), 1254—1257.
[11] Névai, G. P.: Некоторые случаи, когда тригонометрическое интерполирование дает приближение, порядка наилучшего, *Studia Sci. Math. Hungar.,* ( sajtó alatt).
[12] Névai, G. P.: Об отклонении тригонометрических интерполяционных сумм, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **23** (1972), 203—205.
[13] Névai, G. P.: Асимптотическая формула для отклонения тригонометрических интерполяционных сумм, *Studia Sci. Math. Hungar.* (sajtó alatt).
[14] Névai, G. P.: Замечание к одной теореме Г. И. Натансона, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **23** (1972), 219—221.
[15] Никольский, С. М.: О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами, *Известия АН СССР, серия матем.,* **4** (1940), 509—520.
[16] Никольский, С. М.: Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами. *Доклады АН СССР,* **31** (1941), 215—218.
[17] Никольский, С. М.: Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье, *Доклады АН СССР,* **32** (1941), 386—389.
[18] Никольский, С. М.: Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, *Труды Матем. ин-та АН СССР,* **15** (1945), 1—76.
[19] Стечкин, С. Б.: О порядке наилучших приближений непрерывных функций, *Известия АН СССР, серия матем.,* **15** (1951), 219—242.
[20] Смирнов, В. И.—Лебедев, Н. А.: *Конструктивная теория функций комплексного переменного,* Москва—Ленинград, 1964.
[21] Теляковский, С. А.: а *Реферативный Журнал, Математика* folyóirat 1962/7689. sz. referátuma.
[22] Тиман, А. Ф.: *Теория приближения функций действительного переменного,* Москва, 1960.
[23] Zygmund, A.: *Trigonometric series,* vol. 2., Cambridge (University Press), 1959.

(Beérkezett: 1972. V. 17.)

# SÚLYOZOTT $L_1$ ÉS EGYOLDALI SÚLYOZOTT $L_1$ POLINOMAPPROXIMÁCIÓ A VALÓS TENGELYEN

Írta: FREUD GÉZA és NÉVAI G. PÁL

## 1. § Bevezetés

Legyen $v(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ egy tetszőleges differenciális súlyfüggvény; $p_n(v; x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ a $v(x)$ által generált ortonormált polinomok sorozata;

$$\psi_n(v; x, \xi) = p_{n-1}(v; \xi)p_n(v; x)-p_n(v; \xi)p_{n-1}(v; x) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

az $x$-változó szerint kváziortogonális polinomok. Jelölje

$$x_1=x_{1n}(v)>x_2>\ldots>x_n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

a $p_n(v; x)$ polinom gyökeit,

$$\xi_1=\xi_{1n}(v, \xi)>\xi_2>\ldots>\xi_{n^*} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

$(n^*=\mathrm{grad}\,\psi_n)$ pedig a $\psi_n(v; x, \xi)$ kváziortogonális polinom gyökeit (megjegyezzük, hogy a $\xi$ paraméter mindig gyöke $\psi_n(v; x, \xi)$-nek), a továbbiakban legyen mindig $\sigma$ a $\xi$ pont indexe, vagyis $\xi_{\sigma n}(v, \xi)\equiv\xi$. Legyen továbbá

$$\xi^* = \begin{cases} \xi_{\sigma+1, n}(v, \xi), & \text{ha} \quad \xi>0 \quad \text{és} \quad \xi_{\sigma+1}>0, \quad \text{vagy} \quad \xi=0 \\ 0, & \text{ha} \quad \xi>0 \quad \text{és} \quad \xi_{\sigma+1}\leqq 0 \\ \xi_{\sigma-1, n}(v, \xi), & \text{ha} \quad \xi<0 \quad \text{és} \quad \xi_{\sigma-1}<0 \\ 0, & \text{ha} \quad \xi<0 \quad \text{és} \quad \xi_{\sigma-1}\geqq 0, \end{cases}$$

$$\Delta_n(v; \xi)=|\xi-\xi^*| \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{1.0}$$

Jelölje $\lambda_n(v; \xi)$ $(n=1, 2, \ldots)$ a $v(x)$ súlyfüggvény $n$-edik *Christoffel*-féle függvényét, tehát

$$\lambda_n(v; \xi) = \left[\sum_{j=0}^{n-1}{}' p_j^2(v; \xi)\right]^{-1}. \tag{1.1}$$

A továbbiakban igen gyakran fel fogjuk használni a *Christoffel*-függvényeknek az előbbivel ekvivalens definícióját:

$$\lambda_n(v; \xi) = \min_{\pi_n\in \mathbf{P}_n(\xi)} \pi_n^{-2}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \pi_n^2(x)v(x)\,dx, \tag{1.2}$$

ahol $\mathbf{P}_n(\xi)$ $(n=1, 2, \ldots)$ azoknak az $n$-nél *alacsonyabb fokszámú* $\pi_n(x)$ (valós együtthatójú algebrai) polinomoknak a halmaza, amelyekre $\pi_n(\xi)\neq 0$. $\mathbf{P}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ az $n$-nél alacsonyabb fokszámú $\pi_n(x)$ polinomok összessége.

A továbbiakban $\|\cdot\|$ az $L_1\equiv L_1(-\infty, \infty)$-beli szokásos normát jelenti. Egy függvény akkor eleme $L_1$-nek, ha mérhető és a normája véges.

Ha az $F(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ függvény olyan, hogy $Fv\in L_1$, akkor jelölje

$$\mathscr{E}_n^1(v; F)=\inf_{\pi_n\in \mathbf{P}_n}\|(f-\pi_n)v\| \qquad (n=1,2,\ldots)$$

az $F(x)$ függvénynek a $\mathbf{P}_n$-beli polinomokkal történő legjobb súlyozott $L_1$-approximációjának a mértékszámát.

Dolgozatunk egyik fő célja az, hogy az $F(x)$ függvény strukturális tulajdonságai révén felső becslést adjunk $\mathscr{E}_n^1(v; F)$-re, ha a $v(x)$ súlyfüggvényt az alábbi módon választjuk:

$$w_{\alpha,k}(x)=(1+x^{2k})^{\alpha}e^{-x^{2k}} \qquad (-\infty<x<\infty),$$

ahol $k\,(=1,2,\ldots)$ és $\alpha$ $(\geqq 0)$ tetszőleges, de rögzített számok. *Kihangsúlyozzuk, hogy a továbbiakban $k$ tetszőleges, de rögzített természetes számot, $\alpha$ pedig ugyancsak tetszőleges, de rögzített nem-negatív valós számot jelöl.*

Határozzuk meg az $F(x)$ függvénynek a $w_{\alpha,k}$-val súlyozott $L_1$ folytonossági modulusát a következőképpen:

$$\omega^1(w_{\alpha,k}; F; \delta)=\max_{0\leqq t\leqq\delta}\|F(x+t)w_{\alpha,k}(x+t)-F(x)w_{\alpha,k}(x)\|+$$

$$+\left\|\tau\left(x\delta^{\frac{1}{2k-1}}\right)^{2k-1}F(x)w_{\alpha,k}(x)\right\| \qquad (\delta\geqq 0),$$

ahol

$$\tau(x)=\begin{cases}|x|, & \text{ha } |x|\leqq 1\\ 1, & \text{ha } |x|>1.\end{cases}$$

1.1. TÉTEL. *Ha az $F(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ függvény $r$ $(=0,1,2,\ldots)$-edik deriváltja*[1] *olyan, hogy $F^{(r)}w_{\alpha,k}\in L_1$, akkor*[2]

$$\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k}; F)\leqq e^{(c+r)}n^{-r\left(1-\frac{1}{2k}\right)}\omega^1\left(w_{\alpha,k}; F^{(r)}; n^{-1+\frac{1}{2k}}\right) \qquad (n>r).$$

Ez a *Jackson*-típusú tétel az alább következő 3.4 és 4.2. tételek triviális következménye.

Dolgozatunk másik fő eredménye az

1.2. TÉTEL. *Ha az $F(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ függvény $r$ $(=0,1,2,\ldots)$-ik deriváltja minden véges intervallumon korlátos változású, és*

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{\alpha,k}(x)|dF^{(r)}(x)|<+\infty,$$

*továbbá*

$$(1.3) \qquad |F(x)|<c(1+x^{2s}) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

[1] $F^{(r)}$ alatt azt a függvényt értjük, amelyre $\underbrace{\int\int\ldots\int}_{r\text{-szer}}F^{(r)}=F$, illetve $F^{(0)}\equiv F$.

[2] $c$ itt és a továbbiakban mindig véges, pozitív konstanst jelöl, amely legfeljebb csak az $\alpha$ és $k$ paraméterektől függhet. Két $c$ még egy formulán belül is más-más számokat jelenthet, sőt az esetek többségében jelent is. Ahol lényeges, hogy több $c$ konstans ugyanazt a számot jelenti, ott ezeket a mennyiségeket (azonos) indexekkel fogjuk ellátni.

*(s rögzített természetes szám), akkor minden $n(\geqq 2s)$ esetén létezik két olyan $p_n(x)$ és $P_n(x)$ $\mathbf{P}_n$-be tartozó polinom, hogy*

$$p_n(x) \leqq F(x) \leqq P_n(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

és

$$\|[P_n - p_n] w_{\alpha,k}\| \leqq A \cdot n^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(r+1)},$$

*ahol az $A(0 < A < \infty)$ szám nem függ az $n$ értékétől.*

E két tételt a NÉVAI [7] dolgozatban bizonyítás nélkül közöltük. Az $\alpha = 0$ esetre az 1.1. Tételt FREUD [1]-ben, az 1.2. Tételt pedig FREUD—NÉVAI [2]-ben bizonyítottuk be. Az 1.1. Tételt a $k = 1$ esetre l. még FREUD [4], az 1.2. Tételt pedig az $\alpha = 0$ és $k = 1$ esetre FREUD—SZABADOS [5].

A következőkben még az alábbi két súlyfüggvénnyel lesz dolgunk:

$$u_{\alpha,k}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0 \\ x^{-\frac{1}{2}}(1+x^k)^{\alpha} e^{-x^k}, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$v_{\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |x| \geqq 1 \\ (1-x)^{\beta}(1+x)^{\gamma}, & \text{ha} \quad |x| < 1 \end{cases} \qquad (\beta, \gamma > -1).$$

Végezetül megjegyezzük, hogy a $p_n(u_{\alpha,k}; x)$ és $p_n(w_{\alpha,k}; x)$ polinomok között az ortogonalitásból közvetlenül bizonyítható

(1.4) $$p_n(u_{\alpha,k}; x) = p_{2n}(w_{\alpha,k}; \sqrt{x}) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

összefüggés áll fenn.

## 2. § Becslések $\lambda_n(w_{\alpha,k}; \xi)$-re és $\Delta_n(w_{\alpha,k}; \xi)$-re.

Tekintsük a

(2.1) $$\varrho_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

polinomokat. Könnyen belátható, hogy az

(2.2) $$\frac{1}{3} e^x \leqq \varrho_n(x) \leqq 2e^x \qquad (|x| \leqq e^{-3} n)$$

és az

(2.3) $$|\varrho_n(x)| \geqq \frac{1}{4} \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (x < -2n)$$

egyenlőtlenségek minden természetes $n$ számra fennállnak. (2.2) bizonyítása úgy történhetik, hogy felírjuk a *Taylor*-féle formulából adódó

$$|e^x - \varrho_n(x)| \leqq \frac{(c_1 n)^n e^{c_1 n}}{n!} \qquad (|x| < c_1 n)$$

egyenlőtlenséget, amely minden pozitív $c_1$-re teljesül, és felhasználjuk az $n! \geqq \frac{3}{2} e^{-n} n^n$ becslést, amelyet úgy kapunk, hogy

$$n! = \left[\int_0^n + \int_n^\infty\right] x^n e^{-x}\,dx \geqq e^{-n}\frac{n^{n+1}}{n+1} + e^{-n}n^n \geqq \frac{3}{2} e^{-n} n^n.$$

A (2.3) egyenlőtlenség bizonyításához $\varrho_n(x)$-et az alábbi módon írjuk fel:

$$\varrho_n(x) = 1 - \left\{\frac{|x|}{1!} - \frac{|x|^2}{2!}\right\} - \dots - \left\{\frac{|x|^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \quad (n \text{ páratlan})$$

és

$$\varrho_n(x) = \left\{1 - \frac{|x|}{1!}\right\} + \left\{\frac{|x|^2}{2!} - \frac{|x|^3}{3!}\right\} + \dots + \left\{\frac{|x|^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \quad (n \text{ páros}) \qquad (x<0).$$

(2.3) innen rögtön következik, hiszen egyrészt a kapcsos zárójelekben levő tagok mind azonos előjelűek, ha $x < -2n$, másrészt az utolsó kapcsos zárójelben levő kifejezés abszolút értéke nagyobb, mint $\frac{1}{2}\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$, ha $x < -2n$.

Most megmutatjuk, hogy minden eléggé nagy természetes $n$ számra létezik egy olyan $r_n(x) \in \mathbf{P}_n$ polinom, hogy

$$\text{(2.4)} \qquad \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{\alpha}{2}} \leqq r_n(x) \leqq 2(1+x)^{-\frac{\alpha}{2}} \quad (0 \leqq x \leqq c_2 n),$$

ahol $c_2$ $(0<c_2<\infty)$ tetszőleges, de rögzített szám. Tekintsük a $\varphi(x) = (1+x^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ $(-\infty<x<\infty)$ páros függvényt. A *Jackson*-tétel (l. NATANSZON [8] 125. o. (152) formula) szerint minden $R$ és $n$ természetes számhoz található egy olyan $\hat{r}_n(x) \in \mathbf{P}_n$ páros polinom, hogy

$$|\varphi(x) - \hat{r}_n(x)| \leqq d\cdot(1+c_2 n)^{-\frac{R}{2}} \sup_{-\infty<x<\infty} |\varphi^{(R)}(x)| \quad \left(|x| \leqq \sqrt{c_2 n}\right),$$

ahol a $d(0<d<\infty)$ konstans csak az $R$ és $c_2$ értékektől függ. Ha most $R>\alpha+2$, akkor

$$\text{(2.5)} \qquad |\varphi(x) - \hat{r}_n(x)| \leqq d(1+c_2 n)^{-\frac{\alpha}{2}-1} \sup_{-\infty<x<\infty} |\varphi^{(R)}(x)| \leqq$$

$$\leqq d(1+c_2 n)^{-1}\varphi(x) \sup_{-\infty<x<\infty} |\varphi^{(R)}(x)| \quad \left(|x| \leqq \sqrt{c_2 n}\right).$$

Egyszerű számolással adódik, hogy $\varphi(x)$ minden deriváltja korlátos. Ha $n$ elég nagy, akkor (2.4)-et (2.5)-ből úgy nyerjük, hogy $r_n(x)$-et egyenlővé tesszük $\hat{r}_{2n}(\sqrt{x})$-szel.

Az ortonormált $P_n(v_{0,0};\, x)$ *Legendre*-féle polinomokra a SZEGŐ [10] könyv 7.1.2. tétele értelmében érvényes az

$$\text{(2.6)} \qquad |p_n(v_{0,0};\, x)| < c(2|x|)^n \qquad (|x| \geqq 2)$$

becslés. Bebizonyítjuk, hogy $\mathbf{P}_n$ $(n=1, 2, \dots)$ minden $\pi_n$ elemére

$$\text{(2.7)} \qquad \pi_n^2(x) \leqq e^{cn}|x|^{2n} \int_{-1}^{1} \pi_n^2(t)\,dt \qquad (|x| \geqq 2).$$

Valóban, a $\lambda_n(v_{0,0};\,x)$ *Christoffel*-függvény (1.1) és (1.2) definícióiból következik, hogy

$$\int_{-1}^{1} \pi_n^2(t)\,dt \geqq \pi_n^2(x)\lambda_n(v_{0,0};\,x) = \pi_n^2(x)\left[\sum_{j=0}^{n-1} p_j(v_{1,1};\,x^2\right]^{-1},$$

(2.7) pedig (2.6) és ez utóbbi egyenlőtlenségek következménye.

2.1. SEGÉDTÉTEL. *Léteznek olyan c konstansok, hogy minden* $\pi_n \in \mathbf{P}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ *polinomra*

$$\int_{c_3 n^{\frac{1}{2k}}}^{\infty} \pi_n^2(x)e^{-x^{2k}}\,dx \leqq e^{-cn} \int_{-c_4 n^{\frac{1}{2k}}}^{c_4 n^{\frac{1}{2k}}} \pi_n^2(x)e^{-x^{2k}}\,dx. \tag{2.8}$$

*Bizonyítás.* Legyen $v = n+2k(n-1)$ és

$$\psi_v(x) = \pi_n(y)\varrho_n\left(-\frac{y^{2k}}{2}\right) \in \mathbf{P}_v \qquad (y = c_4 n^{\frac{1}{2k}} x)$$

(2.7) folytán

$$\psi_v^2(x) \leqq e^{cv}|x|^{2v}\int_{-1}^{1}\psi_v^2(t)\,dt =$$

$$= c_4^{-1} n^{-\frac{1}{2k}} e^{cv}|x|^{2v} \int_{-c_4 n^{\frac{1}{2k}}}^{c_4 n^{\frac{1}{2k}}} \pi_n^2(t)\varrho_n^2\left(-\frac{t^{2k}}{2}\right)dt \qquad (|x| \geqq 2),$$

vagyis

$$\pi_n^2(x) \leqq e^{cn}\cdot\varrho_n^{-2}\left(-\frac{x^{2k}}{2}\right) n^{-\frac{2v+1}{2k}}\cdot|x|^{2v}\cdot \int_{-c_4 n^{\frac{1}{2k}}}^{c_4 n^{\frac{1}{2k}}} \pi_n^2(t)\varrho_n^2\left(-\frac{t^{2k}}{2}\right)dt \qquad \left(|x| \geqq 2c_4 n^{\frac{1}{2k}}\right).$$

Ha most $c_4$-et elég kicsinek, $c_5$-öt pedig elég nagynak választjuk, akkor (2.2) és (2.3) segítségével a

$$\pi_n^2(x) < e^{cn} n^{-\frac{n}{k}} |x|^{2n} \int_{-c_4 n^{\frac{1}{2k}}}^{c_4 n^{\frac{1}{2k}}} \pi_n^2(t)e^{-t^{2k}}\,dt \qquad \left(|x| > c_5 n^{\frac{1}{2k}}\right)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ahol is a (2.3)-ból adódó $n!$ tényezőt a *Stirling*-formula segítségével fejeztük ki. Tehát

$$\int_{c_3 n^{\frac{1}{2k}}}^{\infty} \pi_n^2(x)e^{-x^{2k}}\,dx \leqq e^{cn} n^{-\frac{n}{k}} \int_{c_3 n^{\frac{1}{2k}}}^{\infty} x^{2n}e^{-x^{2k}}\,dx \int_{-c_4 n^{\frac{1}{2k}}}^{c_4 n^{\frac{1}{2k}}} \pi_n^2(t)e^{-t^{2k}}\,dt \qquad (c_3 > c_5),$$

és ha $c_3$-at elég nagynak választjuk, akkor az

$$e^{cn} n^{-\frac{n}{k}} \int\limits_{c_3 n^{\frac{1}{2k}}}^{\infty} x^{2n} e^{-x^{2k}} dx$$

nagyságrendje $e^{-cn}$ lesz.

2.2. SEGÉDTÉTEL. *Ha $n > n_1(k, \alpha)$ akkor van olyan pozitív $c_6$ állandó, hogy az*

$$\int\limits_0^{\infty} \pi_n^2(x) u_{\alpha,k}(x)\, dx \leqq 2 \int\limits_0^{c_6 n^{\frac{1}{k}}} \pi_n^2(x) u_{\alpha,k}(x)\, dx \tag{2.9}$$

*egyenlőtlenség $\mathbf{P}_n$ minden $\pi_n$ elemére teljesül.*

*Bizonyítás.* (2.8) következtében minden természetes $m$ számra

$$\int\limits_{cm^{\frac{1}{k}}}^{\infty} \pi_m^2(x) u_{0,k}(x)\, dx \leqq e^{-cm} \int\limits_0^{cm^{\frac{1}{k}}} \pi_m^2(x) u_{0,k}(x)\, dx \quad (\pi_m \in \mathbf{P}_m).$$

Innen azt kapjuk, hogy[3]

$$\int\limits_0^{\infty} \pi_n^2(x) u_{\alpha,k}(x)\, dx \leqq \int\limits_0^{cn^{\frac{1}{k}}} \pi_n^2(x) u_{\alpha,k}(x)\, dx + \int\limits_{cn^{\frac{1}{k}}}^{\infty} \pi_n^2(x)(1+x^k)^{2\alpha'+2} u_{0,k}(x)\, dx \leqq$$

$$\leqq \int\limits_0^{cn^{\frac{1}{k}}} \pi_n^2(x) u_{\alpha,k}(x)\, dx + e^{-cn} \int\limits_0^{cn^{\frac{1}{k}}} \pi_n^2(x)(1+x^k)^{2\alpha'+2} u_{0,k}(x)\, dx \leqq$$

$$\leqq \int\limits_0^{cn^{\frac{1}{k}}} \pi_n^2(x) u_{\alpha,k}(x)\, dx + e^{-cn}(1+c^k n)^2 \int\limits_0^{cn^{\frac{1}{k}}} \pi_n^2(x)(1+x^k)^{\alpha} u_{0,k}(x)\, dx \leqq$$

$$\leqq 2 \int\limits_0^{c_6 n^{\frac{1}{k}}} \pi_n^2(x) u_{\alpha,k}(x)\, dx \quad (n > n_1(k, \alpha)).$$

2.3. SEGÉDTÉTEL. *Minden természetes $n$ számra*

$$\lambda_n(u_{\alpha,k}; \xi) \leqq c n^{-1+\frac{1}{2k}} w_{\alpha,k}(\sqrt{\xi}) \quad (0 \leqq \xi < cn^{\frac{1}{k}}). \tag{2.10}$$

*Bizonyítás.* Világos, hogy (2.10)-et elég $n > n_1(k, \alpha)$-ra bizonyítanunk. (1.1)-ből és (2.9)-ből azt kapjuk, hogy

$$\lambda_n(u_{\alpha,k}; \xi) \leqq 2 \min_{\pi_n \in \mathbf{P}_n(\xi)} \pi_n^{-2}(\xi) \int\limits_0^{c_6 n^{\frac{1}{k}}} \pi_n^2(x) u_{\alpha,k}(x)\, dx.$$

[3] A továbbiakban „egy szám vesszővel” a szám felének egész részét jelenti.

Ha most a (2.2), illetve a (2.4) egyenlőtlenségeket $x$ és $n$ helyett $\frac{x^k}{2}$ és $\frac{n}{4k}$-ra, illetve $x^k$ és $\frac{n}{4k}$-ra alkalmazzuk, akkor a

$$\lambda_n(u_{\alpha,k};\xi)\leqq cw_{\alpha,k}(\sqrt{\xi})\cdot\min_{\pi_{n'}\in P_{n'}(\xi)}\pi_{n'}^{-2}(\xi)\int_0^{c_6n^{\frac{1}{k}}}\pi_{n'}^2(x)x^{-\frac{1}{2}}\,dx\qquad \left(0\leqq\xi<cn^{\frac{1}{k}}\right)$$

becslést nyerjük (ti. (2.2) jobb oldala minden $x\geqq 0$-ra triviálisan teljesül), azaz

$$\lambda_n(u_{\alpha,k};\xi)\leqq$$

$$\leqq c\sqrt{c_6}\,n^{\frac{1}{2k}}\,w_{\alpha,k}(\sqrt{\xi})\min_{\pi_{n'}\in P_{n'}(\xi)}\pi_{n'}^{-2}(\xi)\int_{-1}^{0}\pi_{n'}^2\left(c_6n^{\frac{1}{k}}(x+1)\right)(x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx\leqq$$

$$\leqq cn^{\frac{1}{2k}}w_{\alpha,k}(\sqrt{\xi})\min_{\pi_{n'}\in P_{n'}\left(\frac{\xi}{c_6n^{\frac{1}{k}}}-1\right)}\pi_{n'}^{-2}\left(\frac{\xi}{c_6n^{\frac{1}{k}}}-1\right)\int_{-1}^{1}\pi_{n'}^2(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\left(0\leqq\xi<cn^{\frac{1}{k}}\right).$$

Ez utóbbi minimum egyenlő a $v_{-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}}(x)$ *Csebisev*-féle súlyfüggvény $n'$-edik *Christoffel*-függvényének a $\frac{\xi}{c_6n^{\frac{1}{k}}}-1$ pontban felvett értékével, amelyről jól ismert, hogy kisebb, mint $\frac{c}{n}$, ha $\left|\frac{\xi}{c_6n^{\frac{1}{k}}}-1\right|\leqq 1$ (l. FREUD [3] III. 3.2. tétel). Ily módon (2.10)-et bebizonyítottuk.

2.4. TÉTEL. *Minden természetes $n$ számra*

(2.11) $$\lambda_n(w_{\alpha,k};\xi)<cn^{-1+\frac{1}{2k}}w_{\alpha,k}(\xi)\qquad\left(|\xi|<c_7n^{\frac{1}{2k}}\right).$$

*Bizonyítás.* (2.11) következik (2.10)-ből és a

$$\lambda_n(w_{\alpha,k};\xi)\leqq\min_{\pi_{n'}\in P_{n'}(\xi^2)}\pi_{n'}^{-2}(\xi^2)\int_{-\infty}^{\infty}\pi_{n'}^2(x^2)w_{\alpha,k}(x)\,dx=\lambda_{n'}(u_{\alpha,k};\xi^2)$$

egyenlőtlenségekből.

2.5. SEGÉDTÉTEL. *Ha $n=1,2,\ldots,$ akkor*

(2.12) $$\Delta_n(u_{\alpha,k};\xi)<c\sqrt{\xi}\,n^{-1+\frac{1}{2k}}\qquad\left(0<\xi<cn^{\frac{1}{k}}\right).$$

*Bizonyítás.* Ha $\xi^*>0$, akkor a *Posse*-egyenlőtlenség szerint (l. FREUD [3] I. (5.10))

$$\int_{\xi^*}^{\xi}x^{-\frac{1}{2}}(1+x^k)^\alpha\,dx\leqq e^{(\xi^*)^k}\lambda_n(u_{\alpha,k};\xi^*)+e^{\xi^k}\lambda_n(u_{\alpha,k};\xi),$$

tehát (2.10) folytán

$$\int_{\xi^*}^{\xi} x^{-\frac{1}{2}}(1+x^k)^\alpha\,dx \leqq c(1+\xi^k)^\alpha n^{-1+\frac{1}{2k}} \quad \left(0<\xi<cn^{\frac{1}{k}}\right).$$

Ha $\xi^* \geqq \frac{\xi}{2}$, akkor (2.12) innen triviálisan következik, ha pedig $0<\xi^*<\frac{\xi}{2}$, akkor

$$\int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} x^{-\frac{1}{2}}(1+x^k)^\alpha\,dx \leqq c(1+\xi^k)^\alpha n^{-1+\frac{1}{2k}} \quad \left(0<\xi<cn^{\frac{1}{k}}\right)$$

is teljesül, tehát $\sqrt{\xi}<cn^{-1+\frac{1}{2k}}$, vagyis (2.12) most is igaz marad. Legyen most $\xi^*=0$. Ekkor — mivel a $P_n(v;x)$ és a $\psi_n(v;x,\xi)$ gyökei egymás közé ékelődnek — $\xi<x_{n-1,n}(u_{\alpha,k})$. Továbbá a FREUD [3] II. 2.4. és II. 5.2. tételekből következik, hogy $0<x_{n-1}<1(n>n_2(k,\alpha))$. Innen és a *Markov—Stieltjes*-egyenlőtlenségből (l. FREUD [3] I. (5.4)), valamint (2.10)-ből

$$\sqrt{\xi}<\sqrt{x_{n-1}}<c\int_0^{x_{n-1}} u_{\alpha,k}(x)\,dx<c\sum_{j=n-1,n}\lambda_n(u_{\alpha,k};x_j)<cn^{-1+\frac{1}{2k}},$$

és (2.12)-t a $\xi^*=0$ esetére is bebizonyítottuk.

2.6. TÉTEL. *Ha* $n=1,2,\ldots$, *akkor*

$$\Delta_n(w_{\alpha,k};\xi)<cn^{-1+\frac{1}{2k}} \quad \left(|\xi|<c_7 n^{\frac{1}{2k}}\right). \tag{2.13}$$

*Bizonyítás.* Mivel a $P_n(w_{\alpha,k};x)$ gyökei a $\psi_n(w_{\alpha,k};x,\xi)$ gyökei közé ékelődnek (l. FREUD [3] I., 4. feladat), ezért elegendő egyrészt kimutatnunk az $x_{1n}(w_{\alpha,k})>cn^{\frac{1}{2k}}$ egyenlőtlenséget, másrészt arra az esetre szorítkoznunk, amikor $\xi$ gyöke $p_n(w_{\alpha,k};x)$-nek. Mivel a $p_n(w_{\alpha,k};x)$ és a $p_{n+1}(w_{\alpha,k};x)$ gyökei is elválasztják egymást, ezért csak az $n=2m$ esetet kell megvizsgálnunk. Ha $n=2m$, akkor viszont (2.13) teljesül az (1.4) és a (2.12) relációk következtében. (2.12)-ből az is következik, hogy $p_m(u_{\alpha,k};x)$ legnagyobb gyöke nagyobb, mint $cn^{\frac{1}{k}}$, tehát $p_{2m}(w_{\alpha,k};x)$ legnagyobb gyöke eleget tesz az $x_{1n}(w_{\alpha,k})>cn^{\frac{1}{2k}}$ egyenlőtlenségnek. Ilyeténképpen (2.13) bizonyítást nyert.

## 3.§ Összefüggés $\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k};F)$ és $\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k};F')$ között

Tekintsük a

$$\Gamma_t(x)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x\leqq t\\ 0, & \text{ha} \quad x>t\end{cases}$$

ugrófüggvényt, ahol a $t$ valós paraméter. Mindenek előtt megmutatjuk, hogy

$$\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k};\Gamma_t)<cn^{-1+\frac{1}{2k}}w_{\alpha,k}(t) \qquad (-\infty<t<\infty;\ n=1,2,\ldots). \tag{3.1}$$

Valóban, a *Markov—Stieltjes*-féle $\varphi_n(w_{\alpha,k}; x, t)$, $\Phi_n(w_{\alpha,k}; x, t) \in \mathbf{P}_{2n-2}$ polinomok rendelkeznek az alábbi két tulajdonsággal:

$$\varphi_n(w_{\alpha,k}; x, t) \leqq \Gamma_t(x) \leqq \Phi_n(w_{\alpha,k}; x, t) \quad (-\infty < x < \infty)$$

és

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_n(w_{\alpha,k}; x, t) - \varphi_n(w_{\alpha,k}; x, t)]\, w_{\alpha,k}(x)\, dx = \lambda_n(w_{\alpha,k}; t)$$

(l. FREUD [3] III. (4.1) és az utána következő képletet, valamint SZÁSZ [12] 413. §). (3.1) tehát teljesül, ha $|t| < cn^{\frac{1}{2k}}$, mivel ebben az esetben $\lambda_n(w_{\alpha,k}; t)$-re fennáll a (2.11) becslés. Ha $t > cn^{\frac{1}{2k}}$, akkor $\Gamma_t(x)$-et a $\pi_1(x) \equiv 1$ polinommal approximálhatjuk, ha pedig $t < -cn^{\frac{1}{2k}}$, akkor a $\pi_0(x) \equiv 0$ polinommal. Az 5. §-ban bizonyításra kerülő 5.1. Segédtételből következik, hogy ez utóbbi két esetben is teljesül (3.1).

3.1. SEGÉDTÉTEL. *Ha a* $G(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *függvény mérhető, és*

$$\operatorname*{vraimax}_{-\infty < x < \infty} |G(x)| w_{\alpha,k}(x) \leqq 1, \tag{3.2}$$

*továbbá* $\mathbf{P}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *minden* $\pi_n$ *elemére*

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\pi_n(x) w_{\alpha,k}(x)^2\, dx = 0 \quad (\pi_n \in \mathbf{P}_n), \tag{3.3}$$

*akkor*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t(x) G(x) w_{\alpha,k}(x)^2\, dx \right| < cn^{-1+\frac{1}{2k}} w_{\alpha,k}(t) \quad (-\infty < t < \infty). \tag{3.4}$$

*Bizonyítás.* (3.3) szerint minden $\mathbf{P}_n$-beli $\pi_n$ polinomra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t(x) G(x) w_{\alpha,k}(x)^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\Gamma_t(x) - \pi_n(x)] G(x) w_{\alpha,k}(x)^2\, dx,$$

tehát (3.2) folytán

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t(x) G(x) w_{\alpha,k}(x)^2\, dx \right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_t(x) - \pi_n(x)| w_{\alpha,k}(x)\, dx.$$

(3.4) innen és (3.1)-ből következik, hiszen $\pi_n(x)$-et választhatjuk úgy, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_t(x) - \pi_n(x)| w_{\alpha,k}(x)\, dx \leqq 2\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k}; \Gamma_t).$$

3.2. SEGÉDTÉTEL. *Ha* $Fw_{\alpha,k} \in L_1$, *akkor*

$$\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k}; F) = \sup_{G \in \mathbf{G}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) G(x) w_{\alpha,k}(x)^2\, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.5}$$

*ahol* $\mathbf{G}$ *azoknak a mérhető* $G(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ *függvényeknek a halmaza, amelyekre (3.2) és (3.3) teljesül.*

A (3.5) reláció NYIKOLSZKIJ [9] 2. tételének egy speciális esete.

*Bizonyítás.* Ha $G\in\mathbf{G}$, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)G(x)w_{\alpha,k}(x)^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}[F(x)-\pi_n(x)]G(x)w_{\alpha,k}(x)^2\,dx \leqq$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{\infty}|F(x)-\pi_n(x)|w_{\alpha,k}(x)\,dx$$

$\mathbf{P}_n$ minden $\pi_n$ elemére. Ha most a bal oldalon $G\in\mathbf{G}$ szerint szuprémumot veszünk, a jobb oldalon pedig $\pi_n\in\mathbf{P}_n$ szerint minimumot, akkor a

$$\sup_{G\in\mathbf{G}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)G(x)w_{\alpha,k}(x)^2\,dx \leqq \mathcal{E}_n^1(w_{\alpha,k};F)$$

relációt nyerjük.

Tekintsük most a $\{w_{\alpha,k}(x), xw_{\alpha,k}(x), \ldots, x^{n-1}w_{\alpha,k}(x), F(x)w_{\alpha,k}(x)\}$ elemekre kifeszített $(n+1)$ dimenziós térben azt a $\varphi$ lineáris operációt, amelyet úgy definiálunk, hogy

$$\Phi\left(\sum_{j=0}^{n-1}a_jx^jw_{\alpha,k}(x)+aF(x)w_{\alpha,k}(x)\right) = a\mathcal{E}_n^1(w_{\alpha,k};F). \tag{3.6}$$

A *Hahn—Banach*-tétel (l. RIESZ—SZŐKEFALVI [11] 35., 52. és 87. fejezetek) értelmében $\Phi$-t ki lehet terjeszteni úgy az egész $L_1$-térre, hogy a $\Phi$ operáció normája továbbra is *1* maradjon. RIESZ FRIGYES előállítási tétele (l. uo. 78. o.) szerint létezik egy olyan $G(x)$ függvény, hogy

$$\operatorname*{vraimax}_{-\infty<x<\infty}|G(x)|w_{\alpha,k}(x)\leqq 1,$$

és minden $f\in L_1$-re

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)G(x)w_{\alpha,k}(x)\,dx. \tag{3.7}$$

(3.6)-ból és (3.7)-ből azt kapjuk, hogy ha $\pi_n\in\mathbf{P}_n$ akkor

$$0=\Phi(\pi_nw_{\alpha,k}) = \int_{-\infty}^{\infty}G(x)\pi_n(x)w_{\alpha,k}(x)^2\,dx,$$

azaz $G\in\mathbf{G}$. Továbbá

$$\mathcal{E}_n^1(w_{\alpha,k};F)=\Phi(Fw_{\alpha,k}) = \int_{-\infty}^{\infty}F(x)G(x)w_{\alpha,k}(x)^2\,dx \leqq \sup_{G\in\mathbf{G}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)G(x)w_{\alpha,k}(x)^2\,dx.$$

(3.5) -öt tehát bebizonyítottuk.

3.3. SEGÉDTÉTEL. *Ha az* $F(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ *függvény minden véges intervallumon korlátos változású, akkor*

$$\mathcal{E}_n^1(w_{\alpha,k};F)\leqq cn^{-1+\frac{1}{2k}}\int_{-\infty}^{\infty}w_{\alpha,k}(x)|dF(x)| \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{3.8}$$

*Bizonyítás.* Csak azt az esetet kell vizsgálnunk, amikor

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{\alpha,k}(x)|dF(x)| < +\infty.$$

Először megmutatjuk, hogy ekkor

$$\lim_{|t|\to\infty} w_{\alpha,k}(t)F(t)=0. \tag{3.9}$$

Tetszőleges $\varepsilon(>0)$-hoz válasszunk olyan $\Omega(>0)$-t, hogy

$$\int_{\Omega}^{\infty} w_{\alpha,k}(x)\,|dF(x)|<\varepsilon.$$

Feltehetjük, hogy $\Omega$ olyan nagy, hogy $w_{\alpha,k}(t)$ monoton csökken, ha $t>\Omega$. Tehát

$$|F(t)| \leqq \left|F(\Omega)+\int_{\Omega}^{t} w_{\alpha,k}(x)^{-1} w_{\alpha,k}(x)|dF(x)|\right| \leqq |F(\Omega)|+w_{\alpha,k}(t)^{-1}\cdot\varepsilon,$$

vagyis (3.9) teljesül, ha $t\to+\infty$. Ha $t\to-\infty$, akkor a bizonyítás ugyanilyen módon történhetik. (3.5) szerint

$$\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k};F) = \sup_{G\in\mathbf{G}}\Big[F(t)\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t(x)G(x)w_{\alpha,k}(x)^2\,dx\,\Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t(x)G(x)w_{\alpha,k}(x)^2\,dx\,dF(t)\Big],$$

azaz (3.4) és (3.9) folytán

$$\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k};F)\leqq cn^{-1+\frac{1}{2k}}\sup_{G\in\mathbf{G}}\int_{-\infty}^{\infty} w_{\alpha,k}(t)|dF(t)|.$$

(3.8)-at be is bizonyítottuk, hiszen a szuprémum integrálja nem függ **G**-től.

3.4. TÉTEL. *Ha az $F(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ függvény olyan, hogy $F'w_{\alpha,k}\in L_1$, akkor*

$$\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k};F)\leqq cn^{-1+\frac{1}{2k}}\int_{-\infty}^{\infty} |F'(x)|\,w_{\alpha,k}(x)\,dx \tag{3.10}$$

*és*

$$\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k};F)\leqq cn^{-1+\frac{1}{2k}}\mathscr{E}_{n-1}^1(w_{\alpha,k};F') \qquad (n=2,3,\dots). \tag{3.11}$$

*Bizonyítás.* (3.10) következik (3.8)-ból. Tekintsük most (3.11)-et. Legyen $\pi_{n-1}\in$ $\in\mathbf{P}_{n-1}$ egy olyan polinom, hogy

$$\|(F'-\pi_{n-1})w_{\alpha,k}\|\leqq 2\mathscr{E}_{n-1}^1(w_{\alpha,k};F'),$$

és ha

$$\pi_n(x) = F(0)+\int_0^x \pi_{n-1}(t)\,dt,$$

akkor (3.10)-ből következően

$$\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k}; F) = \mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k}; F-\pi_n) \leqq$$

$$\leqq cn^{-1+\frac{1}{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |F'(x)-\pi_{n-1}(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx \leqq cn^{-1+\frac{1}{2k}} \mathscr{E}_{n-1}^1(w_{\alpha,k}; F').$$

## 4. § Az $L_1$-approximáció és a folytonossági modulus

Ebben a pontban legyen mindvégig $F(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ olyan függvény, hogy $Fw_{\alpha,k}\in L_1$; $h_n \equiv n^{-1+\frac{1}{2k}}$. Az $F(x)$ függvény megközelítésére vezessük be az $F_n(x)$ függvényeket a következő módon:

$$F_n(x) = w_{\alpha,k}(x)^{-1} h_n^{-1} \int_x^{x+h_n} \Phi_n(t)\, dt,$$

ahol

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} F(x)\, w_{\alpha,k}(x), & \text{ha} \quad |x| < n^{\frac{1}{2k}} \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geqq n^{\frac{1}{2k}}. \end{cases}$$

4.1. SEGÉDTÉTEL. *Ha* $n=1, 2, \ldots,$ *akkor*

$$\|(F-F_n)\, w_{\alpha,k}\| \leqq c\omega^1(w_{\alpha,k}; F; h_n) \tag{4.1}$$

és

$$\|F_n'\, w_{\alpha,k}\| \leqq ch_n^{-1} \omega^1(w_{\alpha,k}; F; h_n). \tag{4.2}$$

*Bizonyítás.* Világos, hogy

$$\|F-F_n)\, w_{\alpha,k}\| \leqq \int_{-\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}}^{\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}} |F_n(x)-F(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx +$$

$$+ \int_{|x|>\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}} |F(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx + \int_{|x|>\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}} |F_n(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx,$$

továbbá

$$\left| \int_{\pm\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}}^{\pm\infty} |F_n(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx \right| \leqq h_n^{-1} \left| \int_{\pm\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}}^{\pm\infty} \int_x^{x+h_n} |F(t)|\, w_{\alpha,k}(t)\, dt\, dx \right| =$$

$$= h_n^{-1} \left| \int_0^{h_n} \int_{t\pm\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}}^{\pm\infty} |F(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx\, dt \right| \leqq \left| \int_{\pm\frac{1}{4}n^{\frac{1}{2k}}}^{\pm\infty} |F(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx \right|,$$

ha $n > n_3(k)$. Tehát

$$\int_{|x|>\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}} [|F(x)|+|F_n(x)|]\, w_{\alpha,k}(x)\, dx \leqq c \int_{-\infty}^{\infty} \tau\left(n^{-\frac{1}{2k}} x\right)^{2k-1} |F(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx$$

(a $\tau(x)$ függvény definícióját l. a Bevezetésben).

Ezenkívül

$$\int_{-\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}}^{\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}} |F_n(x)-F(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx \leqq$$

$$\leqq h_n^{-1} \int_{-\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}}^{\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2k}}} \int_0^{h_n} |F(x+t)\, w_{\alpha,k}(x+t) - F(x)\, w_{\alpha,k}(x)|\, dt\, dx \leqq$$

$$\leqq \max_{0 \leqq t \leqq h_n} \|F(x+t)\, w_{\alpha,k}(x+t) - F(x)\, w_{\alpha,k}(x)\| \quad (n > n_3(k)).$$

(4.1)-et tehát kimutattuk. Rátérünk (4.2) bizonyítására. Egyszerű differenciálással azt kapjuk, hogy

$$F_n'(x) = 2kx^{2k-1}\left(1-\frac{\alpha}{1+x^{2k}}\right) F_n(x) + h_n^{-1} w_{\alpha,k}(x)^{-1} [\Phi_n(x+h_n) - \Phi_n(x)].$$

Vizsgáljuk meg külön-külön a jobb oldali két kifejezés súlyozott normáját. Mivel $F_n(x)$ definíciója folytán $F_n(x) \equiv 0$ $\left(|x| > 2n^{\frac{1}{2k}}\right.$ és $\left.n > n_3(k)\right)$, ezért

$$\left\| 2kx^{2k-1}\left(1-\frac{\alpha}{1+x^{2k}}\right) F_n(x)\, w_{\alpha,k}(x) \right\| \leqq c \int_{-2n^{\frac{1}{2k}}}^{2n^{\frac{1}{2k}}} |x|^{2k-1} |F_n(x) - F(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx +$$

$$+ c \int_{-2n^{\frac{1}{2k}}}^{2n^{\frac{1}{2k}}} |x|^{2k-1} |F(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx \leqq$$

$$\leqq c h_n^{-1} \|(F_n - F)\, w_{\alpha,k}\| + c h_n^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tau\left(n^{-\frac{1}{2k}} x\right)^{2k-1} |F(x)|\, w_{\alpha,k}(x)\, dx,$$

azaz (4.1) következtében

$$\left\| 2kx^{2k-1}\left(1-\frac{\alpha}{1+x^{2k}}\right) F_n(x)\, w_{\alpha,k}(x) \right\| \leqq c \cdot h_n^{-1} \omega^1(w_{\alpha,k}; F; h_n).$$

Továbbá

$$h_n^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} w_{\alpha,k}(x)^{-1}|\Phi_n(x+h_n)-\Phi_n(x)|\,w_{\alpha,k}(x)\,dx \leqq$$

$$\leqq 2h_n^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_n(x)-F(x)w_{\alpha,k}(x)|dx+h_n^{-1}\|F(x+h_n)w_{\alpha,k}(x+h_n)-F(x)w_{\alpha,k}(x)\|.$$

A jobb oldali első integrandus eltűnik, ha $|x|<n^{\frac{1}{2k}}$, tehát ez a tag kisebb, mint $ch_n^{-1}\|\tau(n^{-\frac{1}{2k}}x)^{2k-1}F(x)w_{\alpha,k}(x)\|$. A jobb oldali második kifejezés a folytonossági modulus definíciója folytán kisebb, mint $n_n^{-1}\omega^1(w_{\alpha,k};F;h_n)$. A (4.2) egyenlőtlenség is bizonyítást nyert.

4.2. TÉTEL. *Ha* $Fw_{\alpha,k}\in L_1$, akkor

$$\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k};F)\leqq c\cdot\omega^1\left(w_{\alpha,k};F;n^{-1+\frac{1}{2k}}\right)\qquad(n=1,2,\ldots).\tag{4.3}$$

*Bizonyítás.* Világos, hogy

$$\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k};F)\leqq\|(F-F_n)w_{\alpha,k}\|+\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k};F_n),$$

tehát (3.10)-et figyelembe véve

$$\mathscr{E}_n^1(w_{\alpha,k};F)\leqq\|(F-F_n)w_{\alpha,k}\|+ch_n\|F_n'w_{\alpha,k}\|,$$

és így (4.3) a (4.1) és (4.2) egyenlőtlenségek következménye.

## 5. § Az egyoldali súlyozott $L_1$ polinomapproximációról

Ebben a pontban az 1.2. Tételt fogjuk bebizonyítani.

5.1. SEGÉDTÉTEL. *Ha $j$ tetszőleges, de rögzített nem negatív egész szám, akkor*[4]

$$I_j(x)=\int_x^{\infty}(y-x)^j w_{\alpha,k}(y)\,dy<A_jx^{(1-2k)(j+1)}w_{\alpha,k}(x)\qquad(|x|\geqq 1).\tag{5.1}$$

*Bizonyítás.* Ha $j=0$, akkor

$$I_0(x)\leqq 2^{\alpha}\int_x^{\infty}y^{2k\alpha}e^{-y^{2k}}dy=\frac{2^{\alpha-1}}{k}\int_{x^{2k}}^{\infty}y^{\alpha}y^{\frac{1}{2k}-1}e^{-y}dy\leqq$$

$$\leqq cx^{1-2k}\int_{x^{2k}}^{\infty}y^{\alpha}e^{-y}dy=cx^{1-2k}\int_0^{\infty}(y+x^{2k})^{\alpha}e^{-y-x^{2k}}dy\leqq$$

$$\leqq cx^{1-2k}e^{-x^{2k}}\left[\int_0^{\infty}y^{\alpha}e^{-y}dy+x^{2k\alpha}\int_0^{\infty}e^{-y}dy\right]\leqq cx^{1-2k}w_{\alpha,k}(x).$$

[4] Az $A$ mennyiség — esetleg indexszel — $n$-től és $x$-től független, pozitív, véges konstansot jelent.

Ha pedig $j \geqq 1$, akkor parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$I_j(x) = j \int_x^\infty (y-x)^{j-1} I_0(y)\, dy \leqq$$

$$\leqq cj \int_x^\infty (y-x)^{j-1} y^{1-2k} w_{\alpha,k}(y)\, dy \leqq A_j x^{1-2k} I_{j-1}(x).$$

5.3. SEGÉDTÉTEL. *Ha teljesül az*

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{\alpha,k}(x) |dF^{(r)}(x)| < +\infty$$

*feltétel, akkor*

$$|F^{(j)}(x)| w_{\alpha,k}(x) |x|^{(2k-1)(r-j)} < A \qquad (j=0, 1, \dots r; -\infty < x < \infty). \tag{5.2}$$

*Bizonyítás.* (5.2)-t csak nagy abszolút értékű $x$-ekre kell kimutatnunk; kis $x$-ekre mindig teljesül. Legyen $x>0$. Ha $j=r$ és $t_r$ olyan, hogy $x>t_r$ esetén $w_{\alpha,k}(x)$ monoton, akkor

$$|w_{\alpha,k}(x)[F^{(r)}(x) - F^{(r)}(t_r)]| \leqq \int_{t_r}^{x} w_{\alpha,k}(y) |dF^{(r)}(y)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} w_{\alpha,k}(y) |dF^{(r)}(y)| < +\infty$$
$$(x > t_r).$$

Tételezzük fel, hogy $x(>0)$-ra az

$$|F^{(j)}(x)| < A w_{\alpha,k}(x)^{-1} x^{(1-2k)(r-j)} \qquad (x>0)$$

egyenlőtlenség fennáll. Ekkor

$$|F^{(j-1)}(x) - F^{(j-1)}(t_{j-1})| < A \int_{t_{j-1}}^{x} w_{\alpha,k}(y)^{-1} y^{(1-2k)(r-j)}\, dy =$$

$$= A \int_{t_{j-1}}^{x} \frac{[w_{\alpha,k}(y)^{-1} y^{(1-2k)(r-j+1)}]'}{\left[2k - \dfrac{2k\alpha}{1+y^{2k}} - \dfrac{(2k-1)(r-j+1)}{y^{2k}}\right]}\, dy \qquad (x > t_{j-1} > 0),$$

és ha $t_{j-1}$-et elég nagynak választjuk, akkor az

$$|F^{(j-1)}(x) - F^{(j-1)}(t_{j-1})| < A \int_{t_{j-1}}^{x} [w_{\alpha,k}(y)^{-1} y^{(1-2k)(r-j+1)}]'\, dy \qquad (x > t_{j-1} > 0)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, és ily módon (5.2) bizonyítást nyert $x$ pozitív értékeire. Negatív $x$ értékekre a bizonyítás nem változik.

5.3. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $v(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ egy tetszőleges (differenciális) súlyfüggvény. Legyen továbbá $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ egy korlátos változású $f_r(x)$ függvény $r$-szeres $(r=0,1, \dots)$ integrálfüggvénye. Ha $f_r(x) \equiv \text{const}$ az $(a, b) \subset (x_{n-r'-4,n}(v), x_{r'+4,n}(v))$ intervallumon kívül, akkor létezik két olyan legfeljebb $(2n-2)$ fokszámú $\pi_n(x)$* és *$\pi_n^*(x)$ polinom, hogy*

$$\pi_n(x) \leqq f(x) \leqq \pi_n^*(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

*és*

$$\|(\pi_n^* - \pi_n)v\| \leqq A \int_a^b \Phi(\xi)|df_r(\xi)| \qquad (n = r+5, r+6, \ldots),$$

*ahol $\Phi(\xi)$ a*

$$\varphi(\xi) = [\xi_{\sigma-r'-1,n}(v;\xi) - \xi_{\sigma+r'+1,n}(v;\xi)]^r \max_{\xi_{\sigma-r'-1} \leqq t \leqq \xi_{\sigma+r'+1}} \lambda_n(v;t)$$

*függvénynek egy olyan tetszőleges majoránsa, amire a jobb oldali integrál létezik.*

Az 5.3. Segédtétel bizonyítását l. NÉVAI [6].

*Az 1.2. Tétel bizonyítása.* Az alább következő okoskodások csak $n > n_4(k, \alpha, F)$ esetén helytállók, viszont a tétel állítása $n$ kis értékeire (1.3) folytán triviális. Elegendő olyan függvényeket vizsgálnunk, amelyek eltűnnek, ha $x<0$, hiszen minden olyan $F(x)$ függvényt, amely eleget tesz az 1.2. Tétel feltételeinek, elő lehet állítani az

$$F(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{F^{(j)}(0)}{j!} x^j + \frac{1}{2r!}[F^{(r)}(+0) + F^{(r)}(-0)] + F_1(x) + F_2(-x)$$

formában, ahol $F_1$ és $F_2$ eltűnik $x<0$-ra és mindkettő kielégíti az 1.2. Tétel feltételeit.

Legyen $\omega_n \in \left[\frac{1}{4} c_7 n^{\frac{1}{2k}}, \frac{1}{2} c_7 n^{\frac{1}{2k}}\right]$ az $F^{(r)}(x)$ függvénynek egy folytonossági pontja, és legyen

$$F(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{F^{(j)}(\omega_n)}{j!}(x-\omega_n)^j + F^*(x) + F^{**}(x),^5 \tag{5.3}$$

ahol $F^*$ is, $F^{**}$ is eleget tesz az 1.2. Tétel feltételeinek, továbbá $F^*(x)$ eltűnik, ha $x \geqq \omega_n$, $F^{**}(x)$ pedig ha $x \leqq \omega_n$, és minden véges intervallumon $F^{*(r)}$, illetve $F^{**(r)}$ variációja nem haladja meg $F^{(r)}$ variációját.

$F^*(x)$-re közvetlenül alkalmazhatjuk az 5.3. Segédtételt. Eszerint létezik két olyan $p_n^*(x)$ és $P_n^*(x)$ $\mathbf{P}_{2n}$-beli polinom, hogy

$$p_n^*(x) \leqq F^*(x) \leqq P_n^*(x) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

továbbá a (2.11) és (2.13) becslésekből könnyű számolással adódik, hogy

$$\|[P_n^* - p_n^*]w_{\alpha,k}\| \leqq An^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(r+1)} \int_0^{\omega_n} w_{\alpha,k}(x)|dF^{*(r)}(x)| \leqq$$

$$\leqq An^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(r+1)} \int_{-\infty}^{\infty} w_{\alpha,k}(x)|dF^{(r)}(x)| \leqq An^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(r+1)}.$$

Mivel $F^{**}(x)$ $x<\omega_n$-re eltűnik, ezért (1.3) és (5.3) következtében

$$|F^{**}(x)| < A_1\omega_n^{2s}\Gamma_0(x,\omega_n) + A_2\Gamma_{2s}(x,\omega_n) + \\ + \sum_{j=0}^{r} |F^{(j)}(\omega_n)|\Gamma_j(x,\omega_n) \equiv T_r(x,\omega_n), \tag{5.4}$$

[5] $\omega_n$-et úgy választjuk, hogy $\sum_{j=0}^{r} |F^{(j)}(\omega_n)| > 0$.

ahol

$$\Gamma_j(x,\omega_n)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x<\omega_n\\ \dfrac{1}{j!}(x-\omega_n)^j, & \text{ha} \quad x\geqq\omega_n\end{cases}$$

($j=0, 1, \ldots$). A $\Gamma_j(x, \omega_n)$, mint az $x$ változó függvénye, az egész valós tengelyen korlátos változású $\Gamma_0(x, \omega_n)$ függvénynek a $j$-szeres integrálfüggvénye, tehát alkalmazhatjuk reá az 5.3. Segédtételt. Létezik tehát két olyan $p_n(x, \omega_n, j)$, $P_n(x, \omega_n, j)$, az $x$ változó szerint legfeljebb $(2n-2)$ fokszámú polinom, hogy

$$p_n(x,\omega_n,j)\leqq\Gamma_j(x,\omega_n)\leqq P_n(x,\omega_n,j) \quad (-\infty<x<\infty)$$

és

$$\|[P_n(\cdot,\omega_n,j)-p_n(\cdot,\omega_n,j)]w_{\alpha,k}\|< \tag{5.5}$$

$$<cn^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(j+1)}\int_{\omega_n-0}^{\omega_n} w_{\alpha,k}(x)|d\Gamma_0(x,\omega_n)| = cn^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(j+1)}w_{\alpha,k}(\omega_n),$$

miközben felhasználtuk a (2.11) és (2.13) egyenlőtlenségeket. Legyen

$$P_n^{**}(x) = A_1\omega_n^{2s}P_n(x,\omega_n,0)+A_2P_n(x,\omega_n,2s)+\sum_{j=0}^{r}|F^{(j)}(\omega_n)|P_n(x,\omega_n,j). \tag{5.6}$$

Világos, hogy

$$-P_n^{**}(x)\leqq F^{**}(x)\leqq P_n^{**}(x) \quad (-\infty<x<\infty).$$

Továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n^{**}(x)w_{\alpha,k}(x)\,dx= \tag{5.7}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[P_n^{**}(x)-T_r(x,\omega_n)]w_{\alpha,k}(x)\,dx+\int_{\omega_n}^{\infty}T_r(x,\omega_n)w_{\alpha,k}(x)\,dx.$$

Az (5.4)—(5.6) formulákból következik, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty}[P_n^{**}(x)-T_r(x,\omega_n)]w_{\alpha,k}(x)\,dx\leqq$$

$$\leqq Aw_{\alpha,k}(\omega_n)\left[A_1\omega_n^{2s}n^{-1+\frac{1}{2k}}+A_2n^{\left(-1+\frac{1}{2k}\right)(2s+1)}+\sum_{j=0}^{r}|F^{(j)}(\omega_n)|n^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(j+1)}\right]\leqq$$

$$\leqq A\sum_{j=0}^{r}|F^{(j)}(\omega_n)|\omega_n^{(1-2k)(j+1)}w_{\alpha,k}(\omega_n)=$$

$$=A\omega_n^{-(2k-1)(r+1)}\sum_{j=0}^{r}|F^{(j)}(\omega_n)|\omega_n^{(2k-1)(r-j)}w_{\alpha,k}(\omega_n),$$

azaz (5.2) folytán

$$\int_{-\infty}^{\infty}[P_n^{**}(x)-T_r(x,\omega_n)]w_{\alpha,k}(x)\,dx\leqq A\omega_n^{(1-2k)(r+1)}\leqq An^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(r+1)}. \tag{5.8}$$

(5.7) jobb oldala második integráljának becsléséhez az 5.1. Segédtételt használjuk fel. Tehát

$$\int_{\omega_n}^{\infty} T_r^*(x, \omega_n) w_{\alpha,k}(x)\,dx \leqq$$

$$\leqq A \int_{\omega_n}^{\infty} \left[\omega_n^{2s} + (x-\omega_n)^{2s} + \sum_{j=0}^{r} |F^{(j)}(\omega_n)|(x-\omega_n)^j\right] w_{\alpha,k}(x)\,dx \leqq$$

$$\leqq A \sum_{j=0}^{r} |F^{(j)}(\omega_n)|\,\omega_n^{(1-2k)(j+1)} w_{\alpha,k}(\omega_n),$$

vagyis az (5.2) becslést ismét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_{\omega_n}^{\infty} T_r(x, \omega_n) w_{\alpha,k}(x)\,dx \leqq A n^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(r+1)}. \tag{5.9}$$

(5.7)—(5.9)-ből következően

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n^{**}(x) w_{\alpha,k}(x)\,dx \leqq A n^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(r+1)}.$$

Végezetül az 1.2. Tétel megfogalmazásában szereplő $p_n(x)$ és $P_n(x)$ polinomokat a következőképpen konstruálhatjuk meg:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{F^{(j)}(\omega_n)}{j!}(x-\omega_n)^j + p_{n'}^*(x) - P_{n'}^{**}(x)$$

és

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{F^{(j)}(\omega_n)}{j!}(x-\omega_n)^j + P_{n'}^*(x) + P_{n'}^{**}(x).$$

## IRODALOMJEGYZÉK


[1] FREUD G.: On weighted $L_1$-approximation by polynomials, *Studia Math.* **46** (1973), 125—133.
[2] FREUD G. —NÉVAI G. P.: Über einseitige Approximation durch Polynome, III, *Acta Sci. Math.*
[3] FREUD G.: *Orthogonale Polynome,* Budapest, 1969.
[4] FREUD G.: A contribution to the problem of weighted polynomial approximation, *I. S. N. M., 20. kötet,* Birkhäuser Verlag, Basel, 1972, 431—447.
[5] FREUD G.—SZABADOS J.: Über einseitige Approximation durch Polynome, II, *Acta Sci. Math.,* **16** (1970), 59—67.
[6] NÉVAI G. P.: Einseitige Approximation durch Polynome, mit Anwendungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **23** (1972), 495—506.
[7] NÉVAI G. P.: Некоторые свойства многочленов, ортонормальных с весом $(1+x^{2k})^{\alpha}e^{-x^{2k}}$ и их применения в теории приближения, *Доклады АН СССР*
[8] NATANSZON, I. P.: *Konstruktív függvénytan,* Budapest, 1952.
[9] Никольский, С. М.: Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, *Известия АН СССР, сер. матем.,* **10** (1946), 207—256.
[10] SZEGŐ G.: *Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Coll. Publ.,* Vol. XXIII, rev. ed. 1959.
[11] RIESZ F.—SZŐKEFALVI—NAGY B.: *Lecons d'Analyse Fonctionelle,* Budapest, 1952.
[12] SZÁSZ P.: *A differenciál- és integrálszámítás elemei,* 2. kötet, Budapest, 1951.


(Beérkezett: 1972. VI. 26.)

# NYÍLT PONTHALMAZON ADDITÍV FÜGGVÉNY ÁLTALÁNOS ELŐÁLLÍTÁSA

Írta: SZÉKELYHIDI LÁSZLÓ

## 0. Összefoglalás

A síkbeli $D$ ponthalmazon additív $f$ függvény fogalmát Daróczy Z. és Losonczi L [1] dolgozata tartalmazza, ahol a szerzők megadták $f$ általános előállítását *összefüggő és nyílt* $D$ halmaz esetén. Ebben a dolgozatban a fenti eredmény általánosításaként megadjuk egy *tetszőleges nyílt* $D$ ponthalmazon additív függvény általános előállítását.

## 1. Jelölések és definíciók

Legyen $D\subset R^2$ tetszőleges, nem üres nyílt halmaz, és $D_0=D_x\cup D_y\cup D_{x+y}$, ahol

$$D_x = \{x|\exists y \quad (x,y)\in D\},$$
$$D_y = \{y|\exists x \quad (x,y)\in D\},$$
$$D_{x+y}= \{x+y| \quad (x,y)\in D\}.$$

($R$ jelöli a valós számok halmazát.)

Az $f: D_0\to R$ függvényt a $D$ halmazon *additív függvénynek* nevezzük, ha bármely $(x,y)\in D$-re

$$f(x+y) = f(x)+f(y)$$

teljesül. Nyilvánvaló, hogy bármely $D$ esetén létezik nem triviális (nem azonosan zéró) additív függvény $D$-n, ugyanis tetszőleges, az $R^2$-en additív függvény $D$-n is additív. A megfordítás általában nem igaz; könnyű konstruálni olyan $D$ halmazt, melyen definiálható a fenti módon nem származtatható additív függvény. Igaz viszont a következő állítás, melyet Daróczy Z. és Losonczi L. [1] dolgozatában bizonyított be: Ha $D\subset R^2$ nyílt és összefüggő halmaz, és $f: D_0\to R$ tetszőleges additív függvény $D$-n, akkor létezik egy és csak egy $F$, $R^2$-en additív függvény, hogy

$$\begin{aligned} &x\in D_x\text{-re} && f(x)-f(u) = F(x)-F(u), \\ &x\in D_y\text{-ra} && f(x)-f(v) = F(x)-F(v), \\ &x\in D_{x+y}\text{-ra} && f(x)-f(u+v) = F(x)-F(u+v) \quad (u,v)\in D. \end{aligned}$$

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha $D\subset R^2$ nyílt és összefüggő halmaz, akkor egyértelműen létezik olyan $F$, $R^2$-en additív függvény és $(g_1, g_2, g_3)$ konstansrendszer, hogy

$$\begin{aligned} &x\in D_x\text{-re} && f(x)=F(x)+g_1, \\ &x\in D_y\text{-ra} && f(x)=F(x)+g_2, \\ &x\in D_{x+y}\text{-ra} && f(x)=F(x)+g_3, \end{aligned}$$

továbbá

$$g_1+g_2-g_3=0$$

teljesül. Ez tehát a nyílt és összefüggő $D$ halmazon additív függvény legáltalánosabb előállítása.

## 2. Nyílt ponthalmazon additív függvény általános előállítása

Definíció: Ha a $D\subset R^2$ nyílt halmaz előállítható $A$ és $B$ nem üres halmazok egyesítéseként úgy, hogy $A_0\cap B_0=\emptyset$, akkor a $D$ halmazt *felbonthatónak* nevezzük.

1. TÉTEL. *Ha $D\subset R^2$ nyílt körlemez, akkor $D$ nem felbontható.*

*Bizonyítás.* Legyen $(u, v)\in D$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $D=A\cup B$, $A_0\cap B_0=\emptyset$ és $A$, $B$ nem üres halmazok, tehát $D$ felbontható. Ha pl. $(u, v)\in A$, akkor nyilvánvaló, hogy az $(u, v)$ ponton áthaladó $x$ illetve $y$ tengellyel párhuzamos egyenesek $D$-be eső szakaszainak minden pontja szükségképpen $A$-beli. Jelölje ezen pontok halmazát $A^1$, ekkor könnyen látható, hogy bármely $(x, y)\in D$-re $\{(x, y)\}_0\cap A_0^1\neq\emptyset$ így $\{(x, y)\}_0\cap A_0\neq\emptyset$. Ebből következik, hogy $B=\emptyset$, ami ellentmondás.

2. TÉTEL: *Ha a $D\subset R^2$ nyílt halmaz előállítható $A$ és $B$ nem üres halmazok egyesítéseként, ahol $A_0\cap B_0=\emptyset$, akkor $A$ és $B$ nyílt halmazok.*

*Bizonyítás:* Megmutatjuk, hogy pl. $A$-nak minden pontja belső pont. Legyen $(x, y)\in A$, akkor $(x, y)\in D$ és $D$ nyíltsága miatt van olyan $K=K(x, y)$, $(x, y)$ középpontú nyílt körlemez, hogy $K\subset D$.

Elég azt belátni, hogy $K\subset A$.

Tegyük fel, hogy $K\cap B\neq\emptyset$; legyen ekkor $K^A=K\cap A\neq\emptyset$, $K^B=K\cap B\neq\emptyset$. Nyilván $K^A\cup K^B=K$ és $K_0^A\cap K_0^B=\emptyset$, s ez ellentmond annak, hogy a $K$ nyílt körlemez nem felbontható.

Hasonlóan igazolható a szimmetria miatt $B$ nyíltsága is.

3. TÉTEL. *Ha $D\subset R^2$ nyílt halmaz, akkor $D$ előállítható legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok $D^i$, nem felbontható nyílt halmaz egyesítéseként úgy, hogy $i\neq j$ esetén $D_0^i\cap D_0^j=\emptyset$. Ez az előállítás a sorrendtől eltekintve egyértelmű.*

*Bizonyítás.* Ha $D$ nem felbontható, akkor készen vagyunk. Ha felbontható, akkor $D=A\cup B$, $A_0\cap B_0=\emptyset$ és $A$, $B$ nem üres nyílt halmazok. Ha $A$ és $B$ nem felbontható, akkor készen vagyunk; ha valamelyik felbontható, akkor arra megismételjük a fentieket. Ezt az eljárást folytatva a kívánt felbontáshoz jutunk, s mivel a számegyenes bármely diszjunkt nyílt intervallumrendszere legfeljebb megszámlálható, az állítás első részét igazoltuk.

Az unicitást a következőképpen igazoljuk: tegyük fel, hogy $D$ kétféleképpen állítható elő a fenti módon:

$$D=D^1\cup D^2\cup\ldots=B^1\cup B^2\cup\ldots.$$

Megmutatjuk, hogy a bal oldalon szereplő $D^i$-hez van a jobb oldalon $B^j$, hogy $D^i=B^j$.

Legyen $i$ tetszőleges. Ekkor a következő esetek lehetségesek:

(a) $\exists j$: $D^i \subset B^j$, $D^i \neq B^j$;

(b) $\exists j \neq k$: $D^i \cap B^j \neq \emptyset$ és $D^i \cap B^k \neq \emptyset$;

(c) $\exists j$: $D^i = B^j$.

Az (a) esetben: $B^j \cap (D \setminus D^i) \neq \emptyset$, ha tehát

$$A = B^j \cap D^i \neq \emptyset,$$

$$B = B^j \cap (D \setminus D^i) \neq \emptyset,$$

akkor $A \cup B = B^j$, $A_0 \cap B_0 = \emptyset$, s ez ellentmond annak, hogy $B^j$ nem felbontható.

Hasonló módon juthatunk ellentmondásra a ($b$) esetben is, így csak ($c$) állhat fenn, amivel az unicitást igazoltuk.

A következő tétel feltehetőleg ismeretes, de a teljesség kedvéért itt bizonyítással együtt közöljük.

4. TÉTEL. *Ha $D \subset R^2$ nem üres, nyílt halmaz, akkor $D$ egyértelműen előállítható legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok, páronként diszjunkt nyílt és összefüggő halmaz egyesítéseként. (A $D$ halmaz ezen előállítását a továbbiakban $D$ kanonikus alakjának nevezzük.)*

*Bizonyítás:* Legyen $(u_1, v_1) \in D$. Legyen $D^1$ azon $D$-beli, nyílt és összefüggő részhalmazok egyesítése, melyek mindegyike tartalmazza $(u_1, v_1)$-et.

Ekkor $D \setminus D^1$ nyílt. Ugyanis, ha $(x, y) \in D \setminus D^1$, akkor $(x, y) \in D$, de $D$ nyílt, s így $(x, y)$ belső pontja. Létezik tehát olyan $(x, y)$ középpontú $K$ nyílt körlemez, melyre $K \subset D$. Ha most $K \cap D^1 \neq \emptyset$, akkor — mivel $K \cup D^1$ az $(u_1, v_1)$-et tartalmazó, nyílt összefüggő részhalmaza $D$-nek — $K \cup D^1 \subset D^1$, így szükségképpen $K \subset D^1$, ami ellentmondás. Így $K \subset D \setminus D^1$, azaz $D \setminus D^1$ nyílt.

A $D \setminus D^1$-re (amennyiben nem üres) a fentieket megismételhetjük, majd ezt az eljárást folytatva kapjuk a $D^1, D^2, \ldots$ nyílt és összefüggő részhalmazait $D$-nek, melyek egyesítése kiadja $D$-t, s mivel páronként diszjunktak, így számuk legfeljebb megszámlálható.

Ha most

$$D = D^1 \cup D^2 \cup \ldots = B^1 \cup B^2 \cup \ldots$$

két ilyen felbontás, akkor könnyen megmutatható, hogy a bal oldalon szereplő bármely $D^i$-hez létezik a jobb oldalon $B^j$, hogy $D^i = B^j$, ami az egyértelműséget bizonyítja.

5. TÉTEL. *Ha $D \subset R^2$ nem felbontható nyílt halmaz, akkor bármely $D$-n additív függvényhez egyértelműen létezik $F$, az $R^2$-en additív függvény, és $(g_1^i, g_2^i, g_3^i)$ konstansrendszerek úgy, hogy a $D$ kanonikus alakjában szereplő $D^i$-k esetén*

$$x \in D^i_x\text{-re} \qquad f(x) = F(x) + g_1^i,$$

$$x \in D^i_y\text{-ra} \qquad f(x) = F(x) + g_2^i,$$

$$x \in D^i_{x+y}\text{-ra} \qquad f(x) = F(x) + g_3^i$$

*teljesül; továbbá minden i-re*

$$g_1^i + g_2^i - g_3^i = 0.$$

*Bizonyítás:* Az 1. pontban említett eredmény alapján minden $i$-re létezik ilyen $F_i$ és $(g_1^i, g_2^i; g_3^i)$ konstansrendszer. Könnyű belátni, hogy ha $D$ nem felbontható, akkor a kanonikus alakjában szereplő $D^i$-k olyan $\{D^1, D^2, \ldots\}$ sorozatba rendezhetők, hogy minden $i$-re

$$D_0^i \cap \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} D^j \right)_0 \neq \emptyset.$$

Tekintsük ezt a sorozatot. Itt $D_0^2 \cap D_0^1 \neq \emptyset$, ezért pl. $D_x^2 \cap D_x^1 \neq \emptyset$. (A többi esetben ugyanígy megy a bizonyítás.) Ekkor minden $x \in D_x^2 \cap D_x^1$-re $F_1(x) - F_2(x)$ konstans. Felhasználva $F_1$ és $F_2$ additivitását, valamint azt, hogy $D_x^2 \cap D_x^1 \neq \emptyset$ nyílt halmaz, kapjuk, hogy

$$x \in R\text{-re} \qquad F_1(x) = F_2(x).$$

Teljes indukcióval belátható, hogy minden $i$-re $F_i \equiv F_1$, ezért az

$$x \in R\text{-re } F(x) \stackrel{\text{def}}{=} F_1(x)$$

függvény valóban a kívánt tulajdonságú lesz; egyértelműsége az $F_i$-k egyértelműségéből következik.

Definíció. Legyen $D \subset R^2$ nyílt halmaz és kanonikus előállítása $D = \bigcup_i D^i$. A $g: D_0 \to R$, $D$-n additív függvényt *lépcsős additív függvénynek* nevezzük $D$-n, ha minden $i$-re $g$ a $D_x^i$-en és $D_y^i$-on konstans. (Ekkor természetesen $D_{x+y}^i$-on is konstans.)

6. TÉTEL. *Legyen $D \subset R^2$ nyílt, nem felbontható halmaz. Bármely, a D-n additív f függvény egyértelműen előállítható*

$$f(x) = F(x) + g(x) \qquad (x \in D_0)$$

*alakban, ahol F az $R^2$-en additív függvény, g pedig a D-n lépcsős additív függvény.*

*Bizonyítás:* Legyen $f: D_0 \to R$ additív függvény $D$-n, akkor az 5. Tételben szereplő $F$ segítségével definiáljuk a következő $g$-t:

$$x \in D_0\text{-ra } g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - F(x).$$

Triviális, hogy az így definiált $g$ a $D$-n lépcsős additív függvény. Ha most $f$ kétféleképpen állítható elő a kívánt módon, akkor a kanonikus alakban szereplő tetszőleges $i$-re, $x \in D_x^i$-re

$$F_1(x) - F_2(x) = g_2(x) - g_1(x) = \text{konstans},$$

ami — felhasználva $F_1$ és $F_2$ additivitását, és azt, hogy $D_x^i$ nem üres nyílt halmaz — azt jelenti, hogy $F_1 \equiv F_2$ s így $g_1 \equiv g_2$.

7. TÉTEL. *Legyen* $D \subset R^2$ *nyílt halmaz,* $D_0 = \bigcup_i G_i$, *ahol* $\{G_i\}$ *páronként diszjunkt nyílt intervallumok D által egyértelműen meghatározott rendszere. Ha* $g\colon D_0 \to R$ *a D-n tetszőleges lépcsős additív függvény, akkor minden i-re g a* $G_i$*-n konstans.*

*Bizonyítás:* Ha $D$ kanonikus alakja $D = \bigcup_j D^j$, akkor $G_i$-t olyan $D_x^k$, $D_y^l$, $D_{x+y}^m$ nyílt intervallumok alkotják, melyek egyesítése intervallum. Ezek viszont olyan sorozatba rendezhetők, hogy a sorozat bármely elemének a következővel való metszete nem üres. De egy lépcsős additív függvény a $D_x^k$, $D_y^l$, $D_{x+y}^m$ intervallumokon konstans, így ha két ilyen egymásba nyúlik, akkor mindkettőn azonos értéket vesz fel. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy $G_i$-n konstans.

Definíció. Legyen $D \subset R^2$ tetszőleges, nem üres nyílt halmaz; kanonikus alakja $D = \bigcup_i D^i$, és $D_0 = \bigcup_j G_j$. Legyen $(u_i, v_i) \in D^i$ tetszőleges. Ekkor nyilván pontosan egy olyan $(k, l, m)$ indexhármas létezik, hogy $u_i \in G_k$, $v_i \in G_l$, $u_i + v_i \in G_m$. Tekintsük ekkor a következő egyenletet:

$$x_k + x_l - x_m = 0.$$

Ezt az egyenletet a $D^i$ *karakterisztikus egyenletének* nevezzük; az összes $D^i$ karakterisztikus egyenleteiből álló homogén lineáris egyenletrendszert pedig *D karakterisztikus egyenletrendszerének.*

MEGJEGYZÉSEK: (a) Nyilvánvaló, hogy ha $D$ kanonikus alakja $D = \bigcup_i D^i$ és $D_0 = \bigcup_j G_j$; továbbá $u_i \in D_x^i$-re $u_i \in G_j$, akkor bármely $x \in D_x^i$-re $x \in G_j$. Így a karakterisztikus egyenletrendszer nem függ az $(u_i, v_i)$ pontok választásától. Mivel a $D$ kanonikus alakja és a $D_0 = \bigcup_j G_j$ előállítás egyértelmű, ezért bármely nyílt halmaz egyértelműen meghatározza karakterisztikus egyenletrendszerét.

(b) A karakterisztikus egyenletrendszerben szereplő egyenletek száma a $D^i$-k, az ismeretlenek száma pedig a $G_j$-k számával lesz egyenlő. Az egyenletek azonban nem feltétlenül függetlenek.

(c) Könnyű példát adni olyan halmazokra, melyek karakterisztikus egyenletrendszere előre adott számú egyenletből áll. Ha például a $D = \bigcup_i D^i$ kanonikus alakban $i \neq j$ esetén $D_0^i \cap D_0^j = \emptyset$, akkor $D$ karakterisztikus egyenletrendszere megszámlálhatóan végtelen sok egyenletből fog állni ugyanannyi ismeretlennel.

A karakterisztikus egyenletrendszer definíciójából azonnal következik az alábbi tétel:

8. TÉTEL: *Ha* $D \subset R^2$ *tetszőleges, nem felbontható nyílt halmaz és* $D_0 = \bigcup_i G_i$, *akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az*

$$x \in G_i\text{-re } \; g(x) \stackrel{\text{def}}{=} g_i$$

*lépcsős függvény additív legyen D-n az, hogy a* $(g_1, g_2, \cdots)$ *konstansrendszer megoldása legyen D karakterisztikus egyenletrendszerének.*

A 6. és 8. tétel alapján igaz az alábbi

9. TÉTEL. *Ha $D \subset R^2$ tetszőleges, nem felbontható nyílt halmaz, $D_0 = \bigcup_i G_i$, akkor bármely, a D-n additív f függvény egyértelműen előállítható*

$$f(x) = F(x) + g_i \qquad x \in G_i, \; i = 1, 2, \ldots$$

*alakban, ahol F az $R^2$-en additív függvény, $(g_1, g_2, \ldots)$ pedig a D karakterisztikus egyenletrendszerének megoldása.*

Végül a 3. és 9. tétel alapján eredményeinket a következő módon foglalhatjuk össze:

10. TÉTEL. *Legyen $D \subset R^2$ tetszőleges, nem üres nyílt halmaz, és tegyük fel, hogy $D = \bigcup_i D^i$ a 3. tételben szereplő felbontása, ahol $D^i$ nem felbontható nyílt halmaz. Legyen $D_0^i = \bigcup_j G_j^i$. Bármely, a D-n additív f függvény előállítható egyértelműen*

$$(1) \qquad f(x) = F_i(x) + g_j^i \quad x \in G_j^i \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

*alakban, ahol $F_i$ az $R^2$-en additív függvény, $(g_1^i, g_2^i, \ldots)$ pedig a $D^i$ karakterisztikus egyenletrendszerének megoldása.*

Minthogy az $R^2$-en additív függvények általános előállítása ismeretes (l. [2]), a 10. tétel a nyílt halmazokon additív függvények teljes leírását adja.

### 3. Speciális következmények

3.1. Daróczy Z.—Losonczi L. [1] dolgozatában szerepel a $D$ halmazon additív függvény additív bővítésének fogalma. A fentiek alapján erre vonatkozóan a következőt mondhatjuk: Ha $D \subset R^2$ nyílt halmaz, $(0,0) \in D$, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy bármely $D$-n additív függvénynek létezzen additív bővítése az, hogy $D$ ne legyen felbontható, és karakterisztikus egyenletrendszerének csak triviális megoldása legyen.

A szerzők azt igazolták, hogy ha $(0,0) \in D$ és $D$ összefüggő, nyílt halmaz, akkor bármely $D$-n additív függvénynek létezik additív bővítése. Ez nyilván abból következik, hogy ilyen halmazok karakterisztikus egyenletrendszere egy egyenletből áll, egy ismeretlent tartalmaz — s mint ilyennek, csak triviális megoldása lehet.

3.2. Legyen $D \subset R^2$ tetszőleges nyílt halmaz. Tekintsük $D$-n a Cauchy-féle függvényegyenletet; azaz határozzuk meg mindazon $f$: $D_0 \to R$ függvényeket, melyekre bármely $(x, y) \in D$ esetén

$$(2) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

teljesül. Az eddigiek alapján azt mondhatjuk, hogy a függvényegyenlet általános megoldását az (1) alakú függvények adják.

Végezetül köszönetet mondok Daróczy Zoltánnak, aki a problémát számomra felvetette, vizsgálatára ösztönzött és értékes tanácsaival sokat segített.

## IRODALOM

[1] DARÓCZY Z.—LOSONCZI L., Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additive Funktionen, Publ. Math. **14** (1967) 239—245.
[2] G. HAMEL, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$, Math. Ann. **60** (1905) 459—462.

(Beérkezett: 1972. XI. 2.)

## REPRESENTATION OF ADDITIVE FUNCTIONS ON OPEN POINT SETS

by
L. SZÉKELYHIDI

Summary

The concept of the additive function $f$ on a point set $D$ given by Z. DARÓCZY and L. LOSONCZY [1]. The authors found the general representation of $f$ in case of *open* and *connected* set. $D$. In this paper — generalizing the result of [1] — is given the general representation of the additive functions on *open* set.

# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA RENDES ÉS LEVELEZŐ TAGJAINAK 1970-BEN MEGJELENT PUBLIKÁCIÓI JEGYZÉKE

## CSÁSZÁR ÁKOS levelező tag

Gleichmässige Approximation und gleichmässige Stetigkeit, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **20** (1969), 253—262.

Kedvező pozíciónkat csak az utánpótlás megfelelő irányú állandó nevelésével tudjuk megőrizni, *Magyar Tudomány*, **15** *(77)* (1970) 648—651.

Double compactification and Wallman compactification, *Proc. Internat. Symp. Topology*, Herceg Novi, 1968, 113—117.

## DETRE LÁSZLÓ levelező tag

Periodenänderungen bei Bedeckungs- und Pulsationsveränderlichen, *Annalen d. Universitäts Sternwarte*, Wien, Bd. **29.** Nr. 2., S. 79—92.

Report on Variable Star Research for 1968—70. *Transactions of the International Astronomical Union*, Vol. XIV A, pp. 259—289 (T.: R. Kippenhahn).

## GÁSPÁR REZSŐ levelező tag

Many-Electron Problems. IV. Internal Field and $\beta$-decay, *Acta Phys. Hung.*, **28** (1970), 71—74.

Exchange potential for electrons in bound and scattering states, *Acta Phys. Chim. Debr.*, XV—XVI/IV, (1969—70) 5—9.

Quantum numbers and the universal potential, *Acta Phys. Chim. Debr.*, XV—XVI/IV (1969—70), 11—17; (J. GLEMBOCKIS és A. JUCYS-szal közösen).

Higher Orbitals and eigenvalues for the ground state of atoms with the universal potential with exchange and Fermi-Amaldi correction, *Acta Phys. Chim. Debr.*, XV—XVI/IV (1969—70), 19—55 (G. ERDŐS—GYARMATI és I. TAMÁSSY—LENTEIvel közösen).

## GOMBÁS PÁL rendes tag

Über den Zusammenhang der Grundgleichung des statistischen Atommodels und der Schrödinger-Gleichung, *Acta Phys. Hung.* **28** (1970), 225—228.

Über die Grundlagen der statistischen Theorie des Atomkerns, *Acta Phys. Hung.* **29,** (1970), 267—278.

*Einführung in die Quantenmechanik und ihre Anwendungen*, Springer, Wien, 1970. (D. KISDIvel közösen).

*Simplified SCF for all atoms*, Akadémia—Hilger, Bp.—London, 1970. (T. SZONDYval közösen).

## JÁNOSSY LAJOS rendes tag

A New Approach to the Theory of Relativity, *Foundations of Physics*, **1** (1970), №. 2. 111—131.

On the Physical Significance of the Vector Potential, *Acta Phys. Hung.*, **29,** (1970), 419—425.

A fizika középiskolai oktatása, *Fizikai Szemle*, **20**/1, (1970) 16—20.

Van-e a vektorpotenciálnak fizikai jelentése, *Fizikai Szemle*, **20**/8, (1970) 240—241.

Véletlen és törvényszerűség, *Társadalmi Szemle*, **25**, (1970), № 10 36—46.

*Fizika (kisérleti tankönyv) a gimnáziumok szakositott IV. osztálya számára, Elektromosságtan* II. rész, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

## KALMÁR LÁSZLÓ rendes tag

A kibernetikáról, *Fizikai Szemle*, **5** (1970), 129—134.

Ist ALGOL wirklich eine algoritmische Sprache? J. DÖRR — G. HOLTZ: Tagungsbericht Automatentheorie und formale Sprachen, Oberwolfach, 1969. (Mannheim, 1970), 305—315.

## KOVÁCS ISTVÁN rendes tag

On the anomalous multiplet splitting of the triplet terms of the ND molecule, *Acta Phys. Hung.*, **29** (1970), 85—90. (V. M. KORWARral közösen).

Re-investigation of the coupling constants of the revised molecular states of TiO., *Acta Phys. Hung.*, **29**, (1970) 399—406. (V. M. KORWARral közösen).

Otnoszityelno interkombinacionnovo perehoda molekulü $N_2$. *Zsurnal Optika i Spektroszkopia*, XXVIII, (1970), 444—447.

Budó Ágoston, *Fizikai Szemle*, XX., (1970), 65—70.

Az Európai Fizikai Társaság 1970 októberében Budapesten tartott tanácsülése, *Fizikai Szemle*, XX. (1970. január).

## PÁL LÉNÁRD levelező tag

Electrical resistivity and thermoelectric power of Ni near the Curie point, *Phys. Rev. Letters*, **24**. (1970), 894. (I. NAGYgyal közösen).

Effect of atomic ordering on the magnetic structure of the $MnPd_3$ phase. *J. Appl. Phyis.*, **41**, (1970), 941. (E. KRÉNnel és G. KÁDÁRral közösen).

Mössbauer investigation of the magnetic field effect on the ordering process in $Fe_3Al$, *Phys. St. Solidi*, **42**, K147 (1970). (L. CSERrel és Yu OSTANEVICHcsel közösen).

Magnetic susceptibility anomaly in nearly equiatomic Mn-Ni alloys, *Phys. St. Solidi*, **42** (1970), 49 (T. TARNÓCZIval és G. KONCZOSsal közösen).

## RÉDEI LÁSZLÓ rendes tag

The matrix equation $A^k = E$ $(aij \geqq 0)$ over a strict partially ordered integral domain, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **21** (1970), 453—455. (LEE ANNÁval közösen).

## SZALAY SÁNDOR rendes tag

Mikroelem hiányjelenségek Enying környéki lápterületeken. *Agrokémia és Talajtan*, **19** (1970), № 1—2, 1—12. (SÁMSONI Z. és SZILÁGYI M. társszerzőkkel).

Összehasonlító vizsgálatok néhány magyarországi lápterület és ásványi talaj flórájának mikroelem tartalmáról, *Agrokémia és Talajtan*, **19** (1970), №. 1—2, 13—26. (SÁMSONI Z. és SZILÁGYI M. társszerzőkkel).

A mikroelem felvételének tanulmányozása a keszthelyi rétlápon, III., *Agrokémia és Talajtan*, **19** (1970, № 1—2, 27—38. (BELÁK S., GYŐRI D., SÁMSONI Z., SZILÁGYI M., TÓTH A. társszerzőkkel.

A mikroelem felvételének tanulmányozása a keszthelyi rétlápon, III., *Agrokémia és Talajtan*, **19** (1970), № 1—2, 39—54. (SÁMSONI Z. és SZILÁGYI M. társszerzőkkel).

An Electromagnetic Ion Beam Shutter, *Nucl. Instruments and Methods*, **84** (1970), № 1, 149—150. (COMBI I. társszerzővel).

Fission Products in the Atmosphereic Precipitation in Debrecen, Hungary, During 1968. and 1969., *Acta Phys. Hung.*, **29** (4, 407—413.) (CSONGOR É. társszerzővel).

Retention of Micronutrient Cations by Peat Humic Acids and Deficiency of Plants, Preprint, *ATOMKI* kiadv. (pp 1—10).

Study of the Decay of $^{145}$BY Ge(Li) Detector Techniques, *Acta Phys.*, **28** (4, 431—434.) (BERÉNYI D., VARGA D., MOLNÁR F. és UCHRIN J. társzerzőkkel).

Basic Techniques of Physical Experimenting. Part 2., *ATOMKI Közl.*, **12** (1/2 Supplement) (BERECZ I., MEDVECZKY L., SEBESTYÉN B. és SZABÓ J. társszerzőkkel).

Atommagfizikai kutató- és oktatómunka Debrecenben, *Fiz. Szemle*, **20**, 257—262.

A fizikusok szerepe az ipar fejlődésében, *Alföld*, **24**, 62—68.

A fizikai ismeretek elmélyülése az atomhéj és mag megismeréséig, *Fiz. Szemle*, **20** 289—297.

## SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA rendes tag

Matematika, *Magyar Tudomány,* 1970. 269—283. old.

Modèle de Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.* **31** (1970), 91—115. (C. FOIAŞ-sal közösen)

Compléments à l'étude des opérateurs de classe $C_0$, *Acta Sci. Math.,* **31** (1970), 287—296. (C. FOIAŞ-sal közösen).

*Harmonic analysis of operators on Hilbert space,* North Holland Publ. Co. Amsterdam—Akadémiai Kiadó Budapest, XIII+384. old. (C. FOIAŞ-sal közösen).

*Garmonicseszkij analiz operatorov v Gilbertovom prosztransztve,* Mir, Moszkva, 431. old. (M. G. KREJN professzor előszavával. Fordította Ju. L. SMULJAN, szerkesztő Ju. P. GINZBURG) (C. FOIAŞ-sal közösen).

## TARJÁN IMRE levelező tag

The Effect of Charged Dislocation Electric Field on Colour Centers, *Acta Phys. Hung.,* **28** (1970), 291—301. (TURCHÁNYI GY. társszerzővel).

On the Stark Effects Produced by the Local Electric Field of Charged Dislocations, *Phys. Stat. Sol.,* **38** (1970), K35—37, (TURCHÁNYI GY., JANSZKY J. és MÁTRAI M. társszerzőkkel).

DNS-tartalmú bakteriofágok sugársérülésének néhány kérdése, *MTA Biol. Oszt. Közl.,* **12** (1970), 318—341. (RONTÓ GY. társszerzővel).

Einige Fragen der Strahlenschädigungen bei Bakteriophagen. *Vorträge der II. Ungarischen Biometrischen Konferenz,* Budapest, vom 19. bis 22. März 1968., Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970. (RONTÓ GY. és SARKADI K. társszerzőkkel).

Az Akadémia új levelező tagjai munkájukról és a tudományról, *Magyar Tudomány,* **11** (1970) 787—790.

## TURÁN PÁL rendes tag

Analysis and diophantine approximation. Istituto Nazionale di Alta Matematica. *Symposia Mat.* Vol. **4** (1970) 133—153.

Zeta roots and prime numbers, *Colloquia Math. Soc. János Bolyai.* 2, *Debrecen, Hung.* p. 205—216.

On the distribution of roots of Riemann zeta and allied functions, II., *Acta Math. Hung.* **21** (1970) 3—4, 403—419.

On some connections between combinatorics and group theory, *Colloquia Mat. Soc. J. Bolyai,* 4. *Combinat. Theory and its Applications, Balatonfüred,* p. 1055—1082.

Applications of graph theory to geometry and potential theory, *Proc. of the Calgary Intern. Confer. on Combinatorial Structures.* p. 423—424.

## TARTALOMJEGYZÉK

# INDEX



Technikai szerkesztő: Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója    Műszaki szerkesztő: Helle Mária

A kézirat nyomdába érkezett: 1973. II. 6. — Ívterjedelem: 27,75 (A/5) ív

73-622 — Szegedi Nyomda

# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. OSZTÁLYÁNAK

## FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

Kutató fizikusok számára önálló eredményeket tartalmazó és összefoglaló jellegű fizikai, csillagászati dolgozatokat, könyvismertetéseket, laboratóriumi fogásokat és ma már klasszikussá vált dolgozatokat közöl hazai és külföldi szerzőktől.

Évenként 1 kötet (kb. 36 ív) jelenik meg 6 számban.
A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 forint.

---

Belföldi megrendelések
*Akadémiai Kiadó*, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21.
(Pénzforgalmi jelzőszám 215-11488.)

Külföldi megrendelések
„*Kultúra*" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,
1389 Budapest I., Fő utca 32.
Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

Ára: 60,— Ft

*Megjelent 1973. XII. 31.*

Index: 26 498